Mathematik und Modellbildung in der Naturwissenschaft

im Rahmen der Ringvorlesung
„Facetten naturwissenschaftlichen Denkens“
(Erweiterungscurriculum „Naturwissenschaftliches Denken: Fallbeispiele, Grundlagen und Einflüsse“)

Franz Embacher

http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

franz.embacher@univie.ac.at

Fakultät für Physik der Universität Wien

Universität Wien, 24. und 31. März 2014

Inhalt

- Zur Bedeutung mathematischer Modelle
- Die Struktur physikalischer Theorien
- Mathematische Modellierung und der Blick hinter die Phänomene
- Vereinfachungen mathematischer Modelle
- Ein mathematisches Modell aus der Biologie
- Der Logarithmus in der Geologie

Wozu mathematische Modelle?

Mathematische Modelle

- liefern quantitative (in Zahlen ausdrückbare) Aussagen,
- helfen, vermutete Zusammenhänge möglichst klar (und genau) zu formulieren („Theorien aufzustellen“),
- helfen, die Konsequenzen unserer Theorien zu verstehen,
- helfen bei der empirischen Überprüfung (und bei der Beurteilung deren Zuverlässigkeit),
- zwingen uns, Begriffe (Konzepte) zu schärfen und
- helfen uns, zwischen dem *Bild*, das wir uns von einem Sachverhalt machen, und dem *Sachverhalt* selbst zu unterscheiden.

Wozu mathematische Modelle?

Aber:

- Aussagen worüber?
- Zusammenhänge zwischen was?

Mathematische Modelle in den Naturwissenschaften

- beziehen sich auf „die Natur"
- und werden mit Beobachtungen (Messungen) konfrontiert.

Sie sind nicht einfach „wahr" oder „falsch".

Mathematisches Modell: das Fallgesetz

- Das Fallgesetz von Galileo Galilei (1636/38):
  Ein Körper, der aus der Ruhe zu fallen beginnt, hat nach der Zeitspanne t die Strecke

  $$s = \frac{g}{2} t^2$$

  durchfallen. Dabei ist $g = 9.81$ m/s^2 die Erdbeschleunigung.
- Beispiel: Die nach 1 Sekunde durchfallene Strecke beträgt

  $$s = \frac{9.81}{2} \text{ m} = 4.9 \text{ m}.$$

Mathematisches Modell: das Fallgesetz

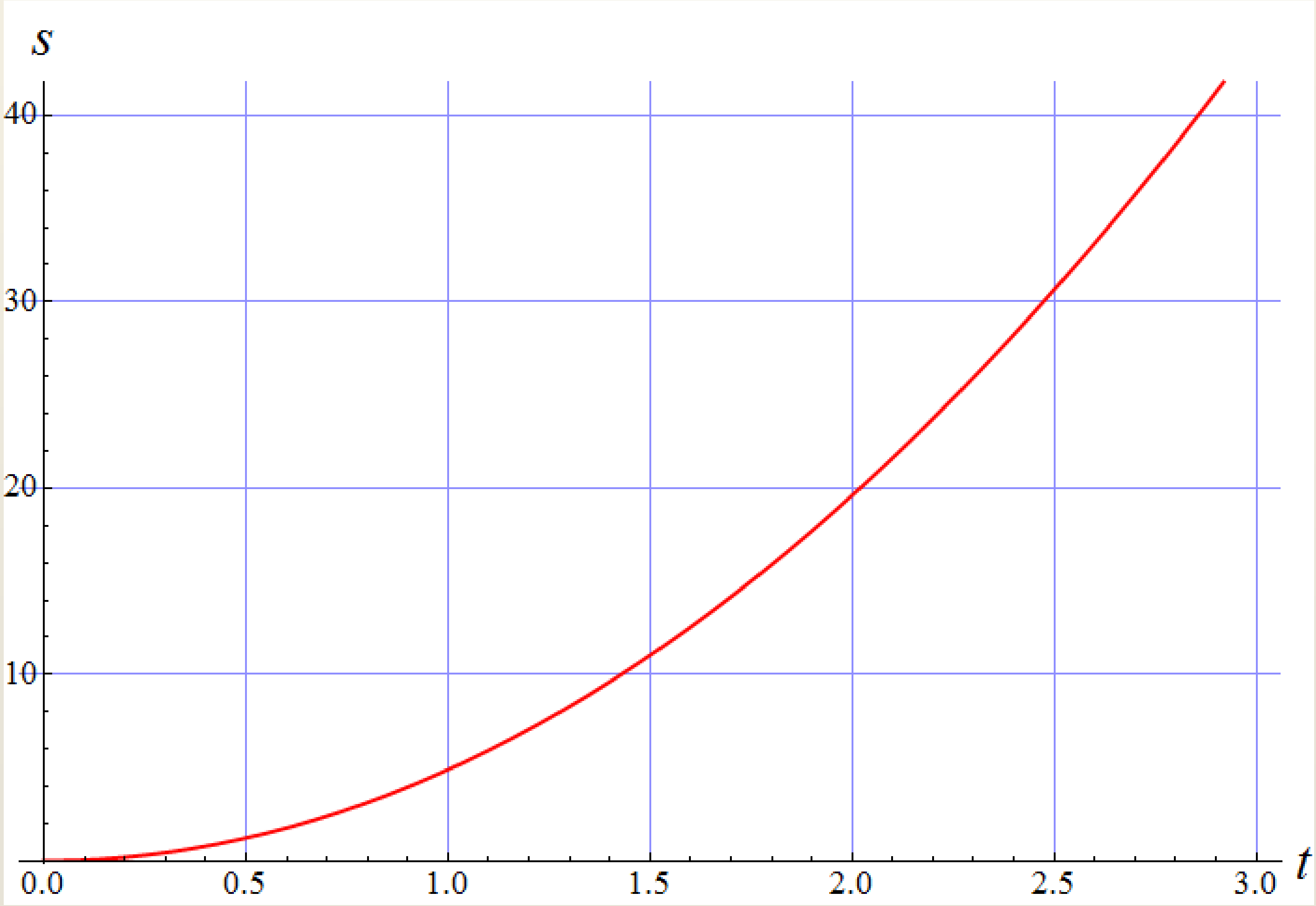
- Erdbeschleunigung: $g = 9.81$ m/s^2
- Was bedeutet „m/s^2“ („Meter pro Sekundenquadrat“)?
- „pro“ kennzeichnet eine „Rate“!
  - Die Beschleunigung ist die zeitliche Änderungsrate der Geschwindigkeit.
  - Geschwindigkeit wird (z.B.) angegeben in m/s.
  - Eine Beschleunigung von 9.81 m/s^2 bedeutet:

$$9.81 \; \frac{\text{m/s Geschwindigkeitsänderung}}{\text{s}}$$

$$\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

  - Fallgesetz → die Geschwindigkeit nimmt in gleichen Zeiten um den gleichen Betrag zu.

Mathematisches Modell: das Fallgesetz



Mathematisches Modell: das Fallgesetz

Ein mathematisches Modell besitzt einen Gültigkeitsbereich (der u.a. durch idealisierte Annahmen zustande kommt).

Welche Annahmen wurden im Fallgesetz getroffen, was alles wird (aus heutiger Sicht) nicht berücksichtigt?

Mathematisches Modell: das Fallgesetz

Ein mathematisches Modell besitzt einen Gültigkeitsbereich (der u.a. durch idealisierte Annahmen zustande kommt).

Welche Annahmen wurden im Fallgesetz getroffen, was alles wird (aus heutiger Sicht) nicht berücksichtigt?

- Der Körper wird als Punktteilchen behandelt.
- Luftauftrieb und Luftwiderstand werden vernachlässigt.
- Die Erdbeschleunigung hängt vom Ort auf der Erde ab, da die Erde keine exakte Kugel ist zu zudem rotiert.
- Auch während des Fallens ist g nicht konstant. (Warum?)
- …

Mathematisches Modell: das Fallgesetz

Ein mathematisches Modell besitzt eine innere Logik, die unabhängig vom Gültigkeitsbereich ist.

- Aus dem Fallgesetz folgt

$$v = g\,t$$

  (Geschwindigkeit wächst proportional zur Zeit).

- Weiters folgt

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{g\,t}{2} = \frac{v}{2}$$

  (Durchschnittsgeschwindigkeit = ½ * Momentan-geschwindigkeit).

Mathematisches Modell: das Fallgesetz

- Wie schnell bewegt sich der Körper nach einem Jahr?
  Berechnung → 310 000 km/s.
  (Lichtgeschwindigkeit = 300 000 km/s)
- Hat eine solche Frage einen Sinn?

Mathematisches Modell: das Fallgesetz

- Wie schnell bewegt sich der Körper nach einem Jahr?
  Berechnung → 310 000 km/s.
  (Lichtgeschwindigkeit = 300 000 km/s)
- Hat eine solche Frage einen Sinn?

  Ja!
- In der Nähe eines Neutronensterns ist die Schwerebeschleunigung um einen Faktor

  $$10^{11}$$

  größer als auf der Erde. Ein fallender Körper erreicht (nach dem Fallgesetz) bereits nach einer Tausendstel Sekunde Überlichtgeschwindigkeit!
- Das Fallgesetz ist nicht-relativistisch, d.h. es ignoriert die Relativitätstheorie!

Mathematische Modelle in der Physik

Mathematische Modelle in der Physik

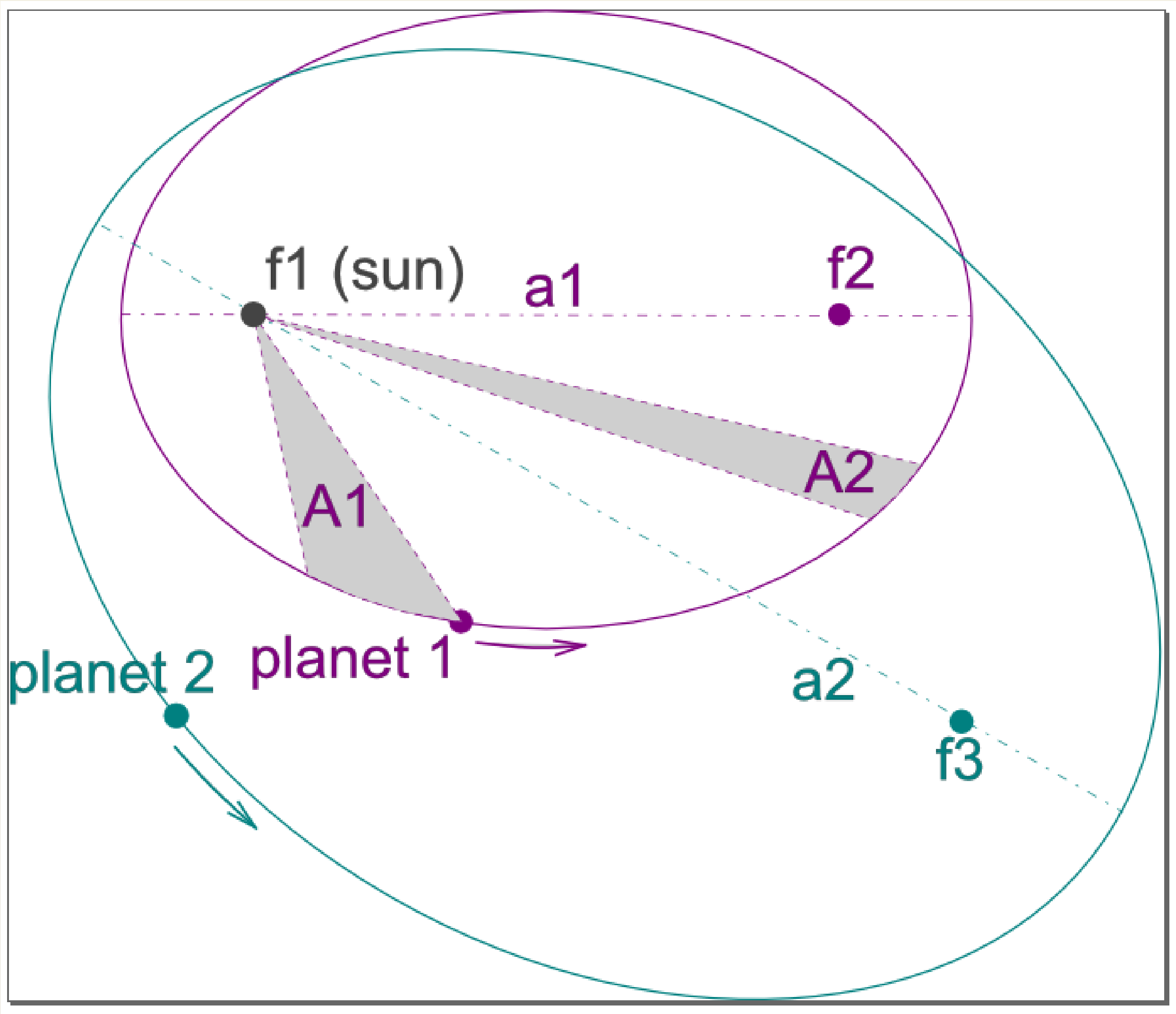
- sind im allgemeinen komplexer und umfassender als das Fallgesetz,
- haben aber eine grundsätzlich ähnliche logische Struktur!

Vereinheitlichung

Wie ging es mit dem Fallgesetz weiter?

- Galileo Galilei: Fallgesetz („Alle auf der Erde fallenden Körper erfahren die gleiche Beschleunigung, nämlich g“)
- Johannes Kepler (1609, 1619): Mathematische Beschreibung der Planetenbewegungen:
  1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
  2. Die Linie von der Sonne zu einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
  3. Das Verhältnis Umlaufszeit^2/(große Halbachse)^3 ist für alle Planeten gleich.

Vereinheitlichung



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler_laws_diagram.svg

Vereinheitlichung

- Isaac Newton (1686):
  - Grundgesetz der Mechanik („Zweites Newtonsches Axiom“): Die Kraft ist nicht die Ursache der Bewegung, sondern die Ursache der Bewegungsänderung (Bescheunigung):

$$a = \frac{F}{m}$$

  - Gravitationsgesetz:

$$F = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^2}$$

Vereinheitlichung

- Isaac Newton (1686):
  - Grundgesetz der Mechanik („Zweites Newtonsches Axiom“): Die Kraft ist nicht die Ursache der Bewegung, sondern die Ursache der Bewegungsänderung (Bescheunigung):

$$a = \frac{F}{m}$$

  - Gravitationsgesetz:

$$F = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^2} \qquad g = \frac{G\, M_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Erde}}^{\;2}}$$

→ Mathematische Ableitung des Fallgesetzes

→ Mathematische Ableitung der Keplerschen Gesetze

Vereinheitlichung

- Isaac Newton:
  - Das Fallgesetz und die Planetenbewegungen sind Spezialfälle eines einzigen fundamentalen Naturgesetzes!
  - Auf der Erde und im Himmel gelten die gleichen physikalischen Gesetze!
  - Mathematische Konzepte und Probleme in Newtons Mechanik:
    - Beschleunigung (zeitliche Änderungsrate der Geschwindigkeit)
    - Das Grundgesetz „Beschleunigung = Kraft/Masse“ ist eine Differentialgleichung → muss gelöst werden!
    - Für diesen Zweck entwickelte Newton die Differential- und Integralrechnung!

Struktur physikalischer Theorien

Anliegen der Physik:

- möglichst viele Phänomene durch möglichst wenige Grundannahmen („physikalische Gesetze“) verstehen und erklären
- „dem Alten über die Schulter schauen“ (Einstein)
- physikalische Gesetze mathematisch formulieren
- soweit möglich: „vereinheitlichen“!

Weiteres Beispiel einer Vereinheitlichung:

$$\left.\begin{array}{l}\text{elektrische Phänomene}\\ \text{magnetische Phänomene}\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{elektromagnetische}\\ \text{Phänomene}\\ \text{(Faraday 1831,}\\ \text{ Maxwell 1865)}\end{array}$$

Fundamentale physikalische Gesetze

Die fundamentalen physikalischen Gesetze
(aus heutiger Sicht):

- Es gibt drei/vier fundamentale Wechselwirkungen in der Natur:
  - die elektromagnetische
  - die schwache
  - die starke
  - die Gravitation (Schwerkraft).

} die „elektroschwache“

- Sie wirken zwischen Elementarteilchen
  - Leptonen (Elektron, Neutrino,…)
  - Quarks (deren Bindungszustände → Protonen, Neutronen,…)
  - Austauschteilchen (Photon,…)
  - Higgs-Teilchen

Fundamentale physikalische Gesetze

- Es gelten „übergeordnete“ Prinzipien:
  - Spezielle Relativitätstheorie (sofern die Gravitation nicht berücksichtigt wird)
  - Allgemeine Relativitätstheorie (sofern die Gravitation berücksichtigt wird)
  - Quantentheorie

Das größte bestehende Problem: bis heute ist es nicht gelungen, die Allgemeine Relativitätstheorie und die Quantentheorie zu einer „Quantengravitation“ zu vereinigen. Von diesem Problem abgesehen, sollten die meisten beobachtbaren physikalischen Phänomene im Prinzip auf der Basis dieser „fundamentalen Physik“ erklärt werden können.
Aber eben nur „im Prinzip“, denn die mathematischen Schwierigkeiten sind enorm!

Das „Standardmodell“ der Teilchenphysik

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_{SM} = -\tfrac{1}{2}\partial_\nu g^a_\mu \partial_\nu g^a_\mu - g_s f^{abc}\partial_\mu g^a_\nu g^b_\mu g^c_\nu - \tfrac{1}{4} g_s^2 f^{abc} f^{ade} g^b_\mu g^c_\nu g^d_\mu g^e_\nu - \partial_\nu W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - \\
M^2 W^+_\mu W^-_\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\nu Z^0_\mu \partial_\nu Z^0_\mu - \tfrac{1}{2c_w^2} M^2 Z^0_\mu Z^0_\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - igc_w(\partial_\nu Z^0_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - \\
W^+_\nu W^-_\mu) - Z^0_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + Z^0_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)) - \\
igs_w(\partial_\nu A_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - A_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + A_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - \\
W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)) - \tfrac{1}{2} g^2 W^+_\mu W^-_\mu W^+_\nu W^-_\nu + \tfrac{1}{2} g^2 W^+_\mu W^-_\nu W^+_\mu W^-_\nu + g^2 c_w^2 (Z^0_\mu W^+_\mu Z^0_\nu W^-_\nu - \\
Z^0_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w^2 (A_\mu W^+_\mu A_\nu W^-_\nu - A_\mu A_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w c_w (A_\mu Z^0_\nu (W^+_\mu W^-_\nu - \\
W^+_\nu W^-_\mu) - 2 A_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) - \tfrac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - 2M^2 \alpha_h H^2 - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - \tfrac{1}{2}\partial_\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - \\
\beta_h \left(\tfrac{2M^2}{g^2} + \tfrac{2M}{g} H + \tfrac{1}{2}(H^2 + \phi^0\phi^0 + 2\phi^+\phi^-) \right) + \tfrac{2M^4}{g^2}\alpha_h - \\
g\alpha_h M \left(H^3 + H\phi^0\phi^0 + 2H\phi^+\phi^- \right) - \\
\tfrac{1}{8} g^2 \alpha_h \left(H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + 2(\phi^0)^2 H^2 \right) - \\
gM W^+_\mu W^-_\mu H - \tfrac{1}{2} g \tfrac{M}{c_w^2} Z^0_\mu Z^0_\mu H - \\
\tfrac{1}{2} ig \left(W^+_\mu (\phi^0 \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^0) - W^-_\mu (\phi^0 \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \partial_\mu \phi^0) \right) + \\
\tfrac{1}{2} g \left(W^+_\mu (H \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu H) + W^-_\mu (H \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \partial_\mu H) \right) + \tfrac{1}{2} g \tfrac{1}{c_w} (Z^0_\mu (H \partial_\mu \phi^0 - \phi^0 \partial_\mu H) + \\
M \left(\tfrac{1}{c_w} Z^0_\mu \partial_\mu \phi^0 + W^+_\mu \partial_\mu \phi^- + W^-_\mu \partial_\mu \phi^+ \right) - ig \tfrac{s_w^2}{c_w} M Z^0_\mu (W^+_\mu \phi^- - W^-_\mu \phi^+) + igs_w M A_\mu (W^+_\mu \phi^- - \\
W^-_\mu \phi^+) - ig \tfrac{1-2c_w^2}{2c_w} Z^0_\mu (\phi^+ \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^+) + igs_w A_\mu (\phi^+ \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^+) - \\
\tfrac{1}{4} g^2 W^+_\mu W^-_\mu \left(H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+\phi^- \right) - \tfrac{1}{8} g^2 \tfrac{1}{c_w^2} Z^0_\mu Z^0_\mu \left(H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2 - 1)^2 \phi^+\phi^- \right) - \\
\tfrac{1}{2} g^2 \tfrac{s_w^2}{c_w} Z^0_\mu \phi^0 (W^+_\mu \phi^- + W^-_\mu \phi^+) - \tfrac{1}{2} ig^2 \tfrac{s_w^2}{c_w} Z^0_\mu H (W^+_\mu \phi^- - W^-_\mu \phi^+) + \tfrac{1}{2} g^2 s_w A_\mu \phi^0 (W^+_\mu \phi^- + \\
W^-_\mu \phi^+) + \tfrac{1}{2} ig^2 s_w A_\mu H (W^+_\mu \phi^- - W^-_\mu \phi^+) - g^2 \tfrac{s_w}{c_w} (2c_w^2 - 1) Z^0_\mu A_\mu \phi^+ \phi^- - \\
g^2 s_w^2 A_\mu A_\mu \phi^+ \phi^- + \tfrac{1}{2} ig_s \lambda^a_{ij} (\bar{q}^\sigma_i \gamma^\mu q^\sigma_j) g^a_\mu - \bar{e}^\lambda (\gamma\partial + m^\lambda_e) e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda (\gamma\partial + m^\lambda_\nu) \nu^\lambda - \bar{u}^\lambda_j (\gamma\partial + \\
m^\lambda_u) u^\lambda_j - \bar{d}^\lambda_j (\gamma\partial + m^\lambda_d) d^\lambda_j + igs_w A_\mu \left(-(\bar{e}^\lambda \gamma^\mu e^\lambda) + \tfrac{2}{3} (\bar{u}^\lambda_j \gamma^\mu u^\lambda_j) - \tfrac{1}{3} (\bar{d}^\lambda_j \gamma^\mu d^\lambda_j) \right) + \\
\tfrac{ig}{4c_w} Z^0_\mu \{ (\bar{\nu}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda \gamma^\mu (4s_w^2 - 1 - \gamma^5) e^\lambda) + (\bar{d}^\lambda_j \gamma^\mu (\tfrac{4}{3} s_w^2 - 1 - \gamma^5) d^\lambda_j) + \\
(\bar{u}^\lambda_j \gamma^\mu (1 - \tfrac{8}{3} s_w^2 + \gamma^5) u^\lambda_j) \} + \tfrac{ig}{2\sqrt{2}} W^+_\mu \left((\bar{\nu}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) {U^{lep}}_{\lambda\kappa} e^\kappa) + (\bar{u}^\lambda_j \gamma^\mu (1 + \gamma^5) C_{\lambda\kappa} d^\kappa_j) \right) + \\
\tfrac{ig}{2\sqrt{2}} W^-_\mu \left((\bar{e}^\kappa {U^{lep}}^\dagger_{\kappa\lambda} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu^\lambda) + (\bar{d}^\kappa_j C^\dagger_{\kappa\lambda} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) u^\lambda_j) \right) + \\
\tfrac{ig}{2M\sqrt{2}} \phi^+ \left(-m^\kappa_e (\bar{\nu}^\lambda {U^{lep}}_{\lambda\kappa} (1 - \gamma^5) e^\kappa) + m^\lambda_\nu (\bar{\nu}^\lambda {U^{lep}}_{\lambda\kappa} (1 + \gamma^5) e^\kappa \right) + \\
\tfrac{ig}{2M\sqrt{2}} \phi^- \left(m^\lambda_e (\bar{e}^\lambda {U^{lep}}^\dagger_{\lambda\kappa} (1 + \gamma^5) \nu^\kappa) - m^\kappa_\nu (\bar{e}^\lambda {U^{lep}}^\dagger_{\lambda\kappa} (1 - \gamma^5) \nu^\kappa \right) - \tfrac{g}{2} \tfrac{m^\lambda_\nu}{M} H (\bar{\nu}^\lambda \nu^\lambda) - \\
\tfrac{g}{2} \tfrac{m^\lambda_e}{M} H (\bar{e}^\lambda e^\lambda) + \tfrac{ig}{2} \tfrac{m^\lambda_\nu}{M} \phi^0 (\bar{\nu}^\lambda \gamma^5 \nu^\lambda) - \tfrac{ig}{2} \tfrac{m^\lambda_e}{M} \phi^0 (\bar{e}^\lambda \gamma^5 e^\lambda) - \tfrac{1}{4} \bar{\nu}_\lambda \, M^R_{\lambda\kappa} \, (1 - \gamma_5) \hat{\nu}_\kappa - \\
\tfrac{1}{4} \overline{\bar{\nu}_\lambda \, M^R_{\lambda\kappa} \, (1 - \gamma_5) \hat{\nu}_\kappa} + \tfrac{ig}{2M\sqrt{2}} \phi^+ \left(-m^\kappa_d (\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa} (1 - \gamma^5) d^\kappa_j) + m^\lambda_u (\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa} (1 + \gamma^5) d^\kappa_j \right) + \\
\tfrac{ig}{2M\sqrt{2}} \phi^- \left(m^\lambda_d (\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa} (1 + \gamma^5) u^\kappa_j) - m^\kappa_u (\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa} (1 - \gamma^5) u^\kappa_j \right) - \tfrac{g}{2} \tfrac{m^\lambda_u}{M} H (\bar{u}^\lambda_j u^\lambda_j) - \\
\tfrac{g}{2} \tfrac{m^\lambda_d}{M} H (\bar{d}^\lambda_j d^\lambda_j) + \tfrac{ig}{2} \tfrac{m^\lambda_u}{M} \phi^0 (\bar{u}^\lambda_j \gamma^5 u^\lambda_j) - \tfrac{ig}{2} \tfrac{m^\lambda_d}{M} \phi^0 (\bar{d}^\lambda_j \gamma^5 d^\lambda_j) + \bar{G}^a \partial^2 G^a + g_s f^{abc} \partial_\mu \bar{G}^a G^b g^c_\mu + \\
\bar{X}^+ (\partial^2 - M^2) X^+ + \bar{X}^- (\partial^2 - M^2) X^- + \bar{X}^0 (\partial^2 - \tfrac{M^2}{c_w^2}) X^0 + \bar{Y} \partial^2 Y + igc_w W^+_\mu (\partial_\mu \bar{X}^0 X^- - \\
\partial_\mu \bar{X}^+ X^0) + igs_w W^+_\mu (\partial_\mu \bar{Y} X^- - \partial_\mu \bar{X}^+ Y) + igc_w W^-_\mu (\partial_\mu \bar{X}^- X^0 - \\
\partial_\mu \bar{X}^0 X^+) + igs_w W^-_\mu (\partial_\mu \bar{X}^- Y - \partial_\mu \bar{Y} X^+) + igc_w Z^0_\mu (\partial_\mu \bar{X}^+ X^+ - \\
\partial_\mu \bar{X}^- X^-) + igs_w A_\mu (\partial_\mu \bar{X}^+ X^+ - \\
\partial_\mu \bar{X}^- X^-) - \tfrac{1}{2} gM \left(\bar{X}^+ X^+ H + \bar{X}^- X^- H + \tfrac{1}{c_w^2} \bar{X}^0 X^0 H \right) + \tfrac{1-2c_w^2}{2c_w} igM \left(\bar{X}^+ X^0 \phi^+ - \bar{X}^- X^0 \phi^- \right) + \\
\tfrac{1}{2c_w} igM \left(\bar{X}^0 X^- \phi^+ - \bar{X}^0 X^+ \phi^- \right) + igMs_w \left(\bar{X}^0 X^- \phi^+ - \bar{X}^0 X^+ \phi^- \right) + \\
\tfrac{1}{2} igM \left(\bar{X}^+ X^+ \phi^0 - \bar{X}^- X^- \phi^0 \right) .
\end{gathered}$$

http://isomorphismes.tumblr.com/image/59988050012

Physikalische Theorien

In der Praxis funktioniert das nicht immer! Beispiel:

Quarkmodell

Protonen und Neutronen

Beobachtungsdaten
der Kernphysik

Atomkerne

Quantenelektrodynamik

einfachste Atome

nichtrelativistische
Quantenmechanik,
Beobachtungsdaten

Atome, chemische Elemente

Moleküle, chemische Verbindungen

klassische Näherung,
Beobachtungsdaten

makroskopische Eigenschaften
der Materie

Physikalische Theorien

- Fortschritt in der Erkenntnisgewinnung, Theoriebildung und Vereinheitlichung führt nicht zu weniger, sondern zu mehr physikalischen Teildisziplinen!
- Sie alle besitzen
  - ihre speziellen Grundannahmen (Idealisierungen und zentrale Konzepte, „Grundgleichungen“)
  - ihre speziellen theoretischen Methoden und Fragestellungen,
  - ihre speziellen experimentellen Methoden
  - und bestimmte Beziehungen zu anderen Teilgebieten.

→ breite Vernetzung

Rolle der Mathematik
in der modernen Physik!

Beispiel für eine physikalische Theorie

Die Maxwellsche Theorie des Elektromagnetismus
(James Clerk Maxwell, 1865)

- zentrale Konzepte: elektromagnetisches Feld und elektrisch geladene Teilchen bzw. kontinuierliche Ladungsverteilungen
- ignoriert die Quantentheorie
- macht keine Annahmen über das heute bekannte Teilchenspektrum
- ignoriert andere Wechselwirkungen
- besitzt (gemeinsam mit einigen Tatsachen, die sie nicht „aus sich heraus" kennt) ein extrem breites Erklärungspotential:

→ Gewitter, Elektrotechnik und Elektronik, elektromagnetische Wellen (Licht!), Atome, Moleküle und die Vielfalt der chemischen Elemente, Flüssigkeiten, Festkörper,…

Beispiel für eine physikalische Theorie

Die Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \, \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

sind die (vielleicht) folgenreichste wissenschaftliche Errungenschaft überhaupt!

Was sagt eine Theorie voraus?

Es ist oft schwierig, das herauszufinden! Beispiele:

- Allgemeine Relativitätstheorie („Materie krümmt die Raumzeit“):
  - Lichtablenkung (1915)
  - Dynamik kollabierender Sterne (1960er-Jahre!) Einzelheiten bis heute unklar!
- Quarkmodell („Quantenchromodynamik“)
  - bisher erst die Grundprinzipien dargelegt!

Blick hinter die Phänomene

Moderne physikalische Theorien sind „unanschaulich“ und laufen oft unseren Alltagsanschauungen zuwider!

- Spezielle Relativitätstheorie (c = const)
- Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie: Expansion des Universums
- Quantentheorie: Messgrößen können unbestimmt sein!

Die mathematische Formulierung hilft, unanschauliche physikalische Gesetze in den Griff zu bekommen und korrekt mit ihnen umzugehen! Die Betrachtung vereinfachter Modelle kann das Wesentliche einer Abstraktion zutage fördern.

Blick hinter die Phänomene

Beispiel:

- Spezielle Relativitätstheorie: Postulate und die „Relativität der Zeit“ … auch mit einfacher Mathematik zu verstehen!

→ Spezielle Relativitätstheorie (Online-Skriptum)

http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/SRT/

→ Beispiel: Zeitdilatation

http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/Einstein/Zeitdilatation/

Blick hinter die Phänomene

Beispiele:

- Allgemeine Relativitätstheorie: das Konzept der Krümmung
  → Die Wanze auf der heißen Ofenplatte

  http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/EinsteinRechnet/Kruemmung.html
- Quantentheorie: Unbestimmtheit physikalischer Messgrößen
  → Quanten-Gickse

  http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Quantentheorie/gicks/

Vereinfachte Modelle und Visualisierungen helfen uns, uns ein intuitives Bild von dem zu machen, was wir *berechnen*.

→ „Ersatzvorstellungen"

Der Blick von einer „höheren“ Perspektive

Beispiel:

- 1905: Albert Einstein veröffentlicht die Spezielle Relativitätstheorie.
- 1908: Hermann Minkoswki plädiert für das Konzept der vierdimensionalen Raumzeit. Von einem vierdimensionalen Standpunkt aus betrachtet (wenn man ihn erst einmal erreicht hat), erscheint die neue Theorie viel einfacher und natürlicher!
  Einstein bemerkt (nicht ganz im Ernst), jetzt verstehe er seine eigene Theorie nicht mehr.
- 1915: Einstein veröffentlicht die auf der Basis des vierdimensionalen Raumzeit-Konzepts entwickelte Allgemeine Relativitätstheorie.

Mathematik in der Physik: Zusammenfassung

Mathematik in der Physik erlaubt uns,

- Zusammenhänge klar zu formulieren,
- quantitative Vorhersagen zu machen und zu überprüfen,
- die innere Logik von Modellen zu erforschen,
- physikalische Gesetze zu „vereinheitlichen“, d.h. mehr Phänomene aus weniger Grundannahmen heraus zu verstehen und zu erklären,
- die Konsequenzen unserer eigenen Theorien herauszuarbeiten,
- unanschauliche physikalische Gesetze in den Griff zu bekommen und
- einen „höheren“ Standpunkt einzunehmen, von dem aus betrachtet die Dinge wieder einfacher erscheinen.

Vereinfachungen mathematischer Modelle

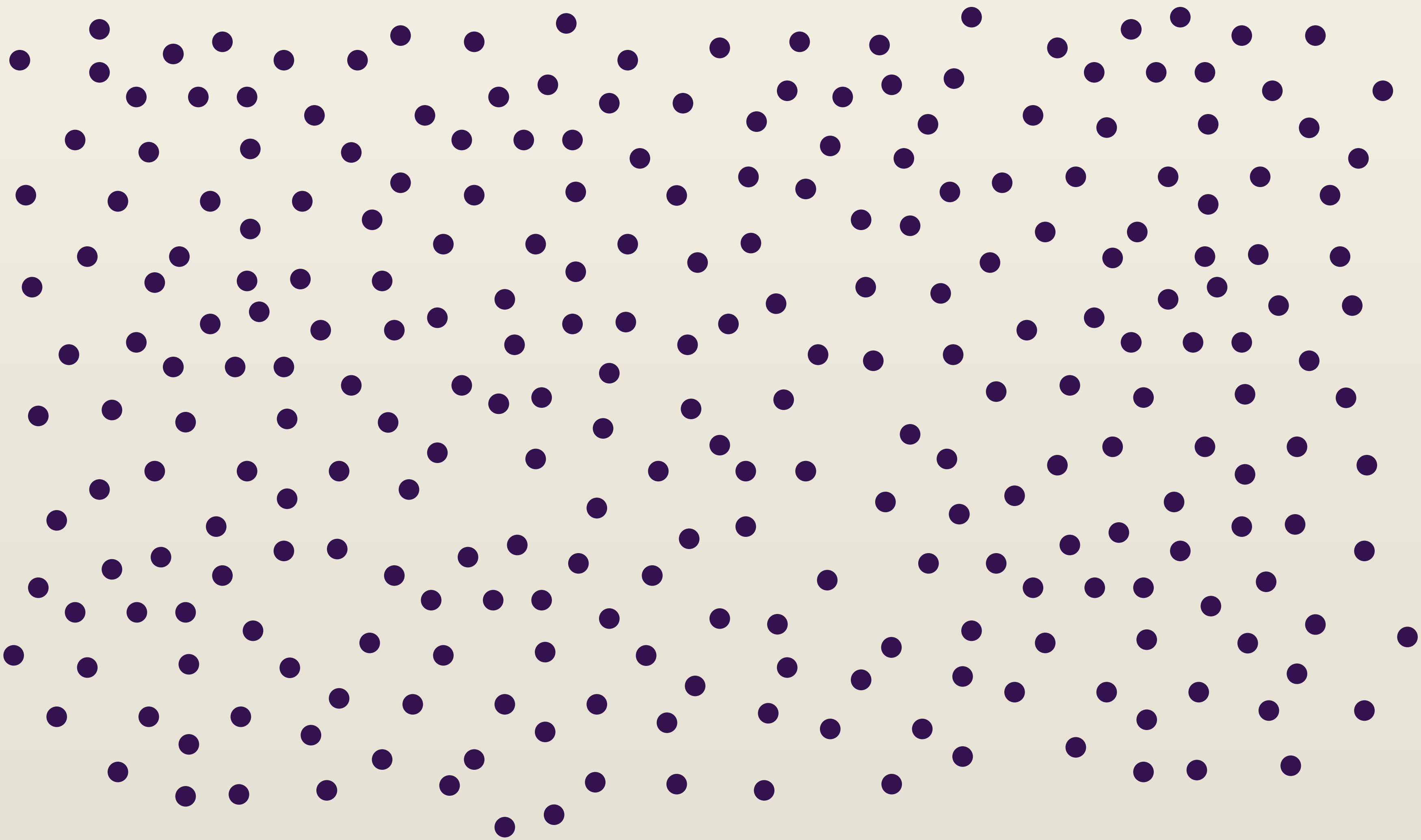
Mathematische Modelle können oft

- vereinfacht dargestellt
- oder vereinfacht hergeleitet

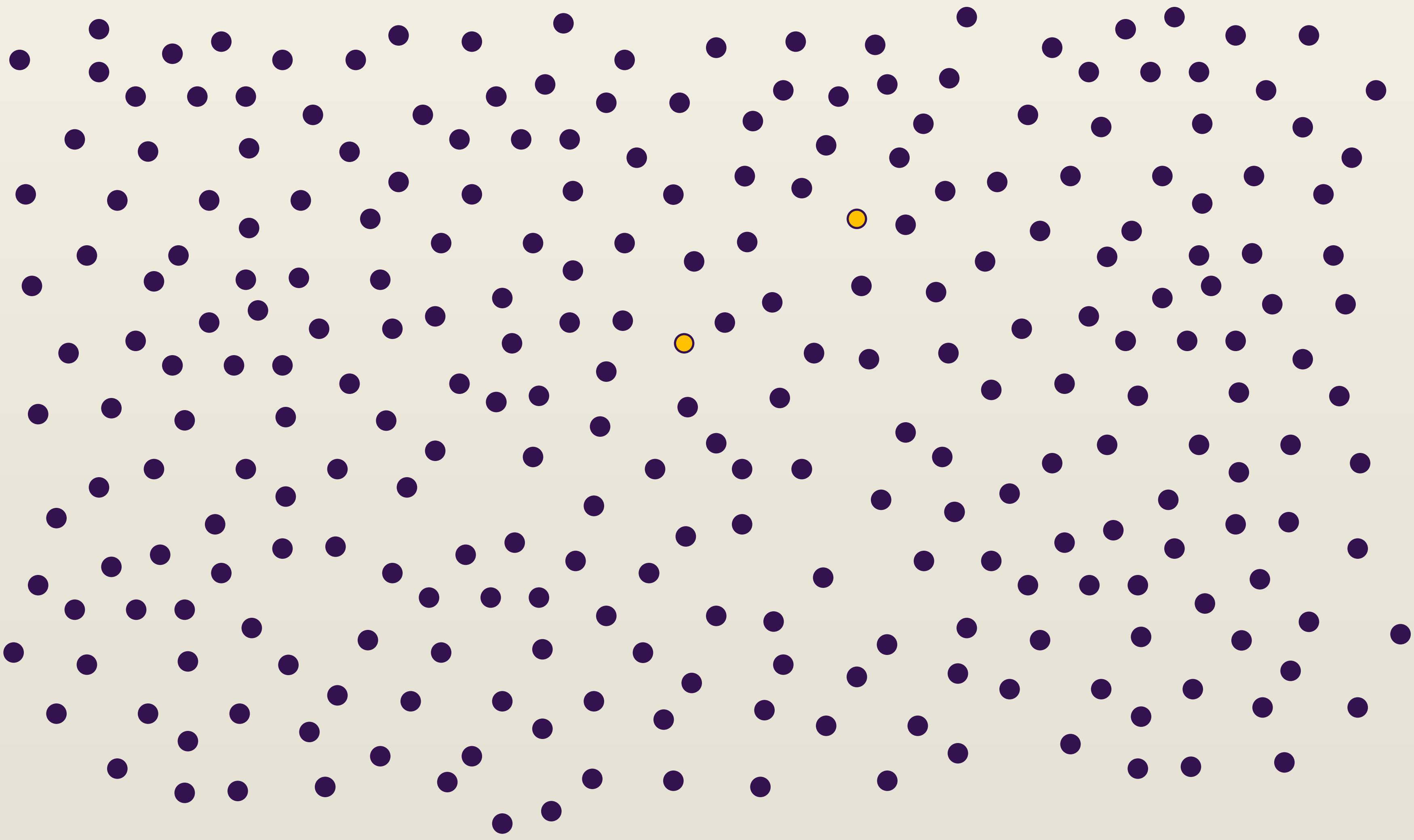
werden.

Beispiel für eine vereinfachte Herleitung

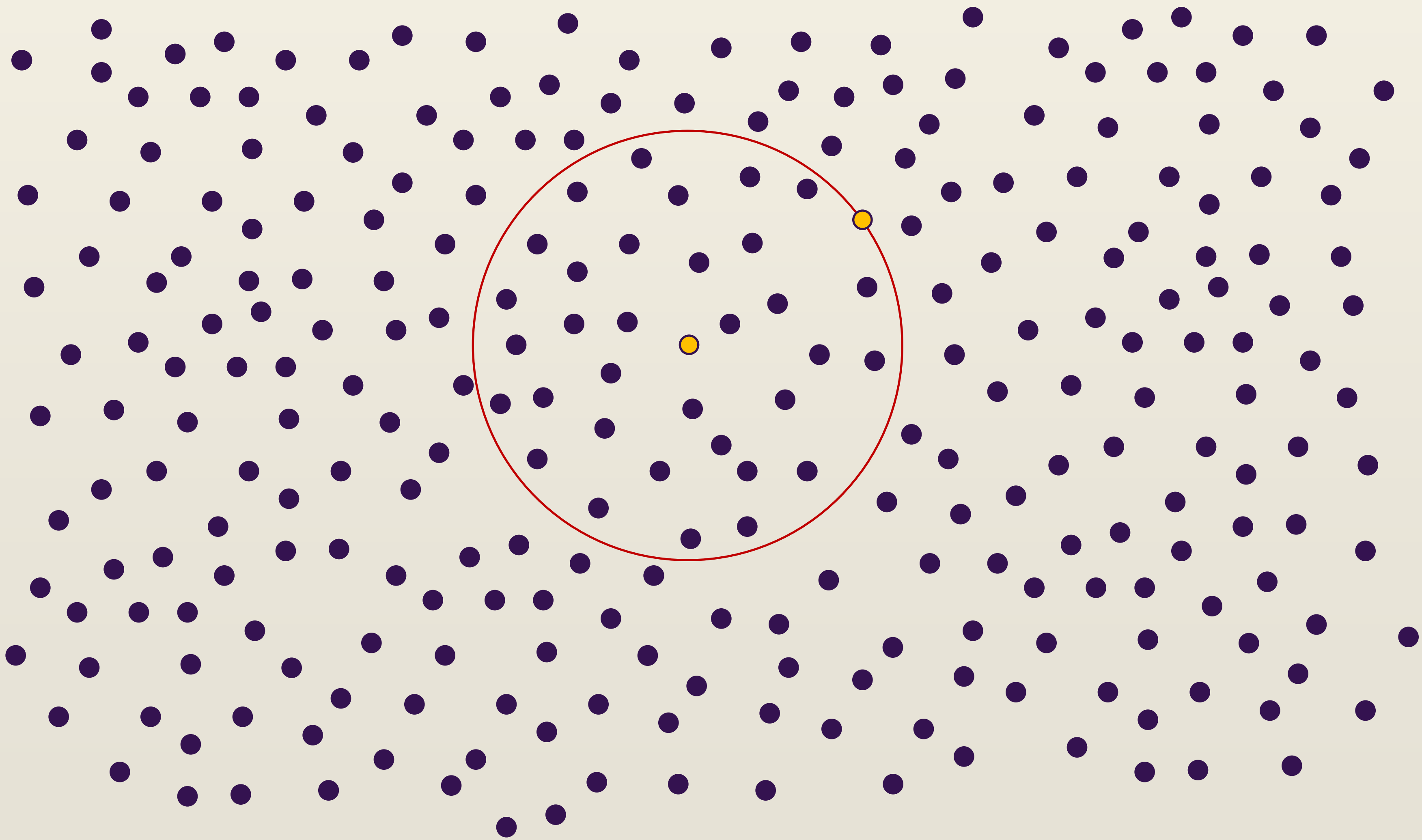
Die Expansion des Universums – eine „Newtonsche“ Argumentation!



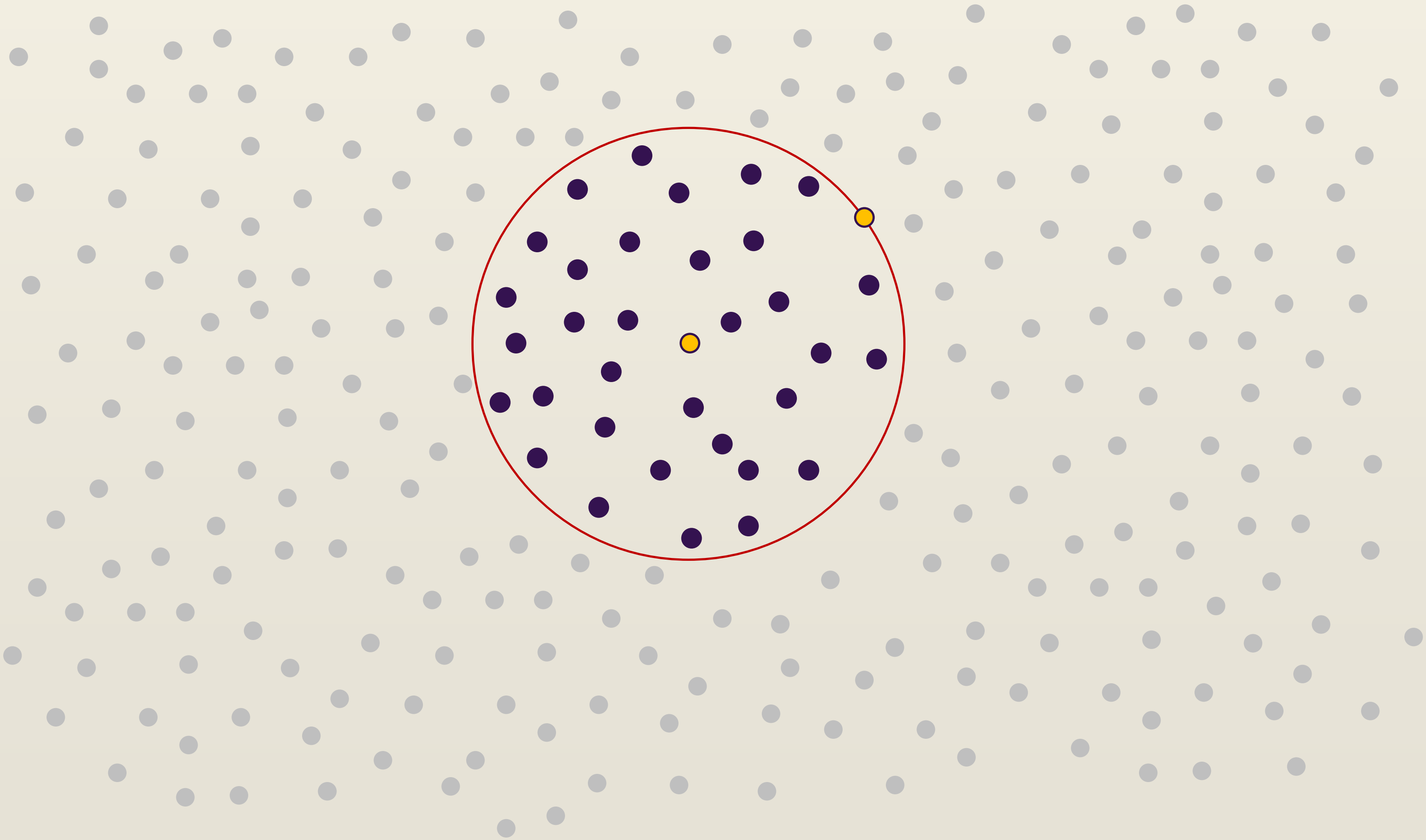
Die Expansion des Universums in der Theorie



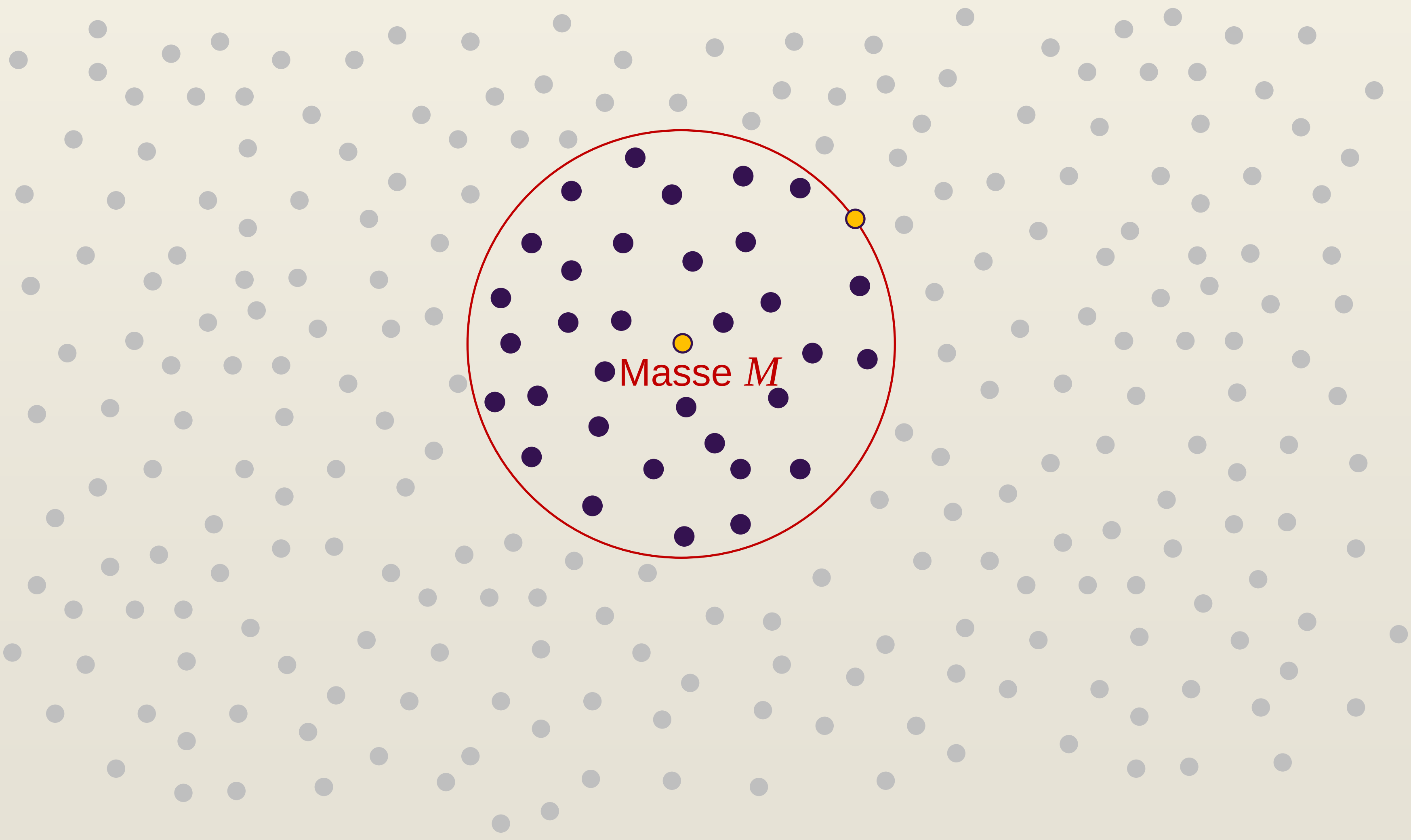
Die Expansion des Universums in der Theorie



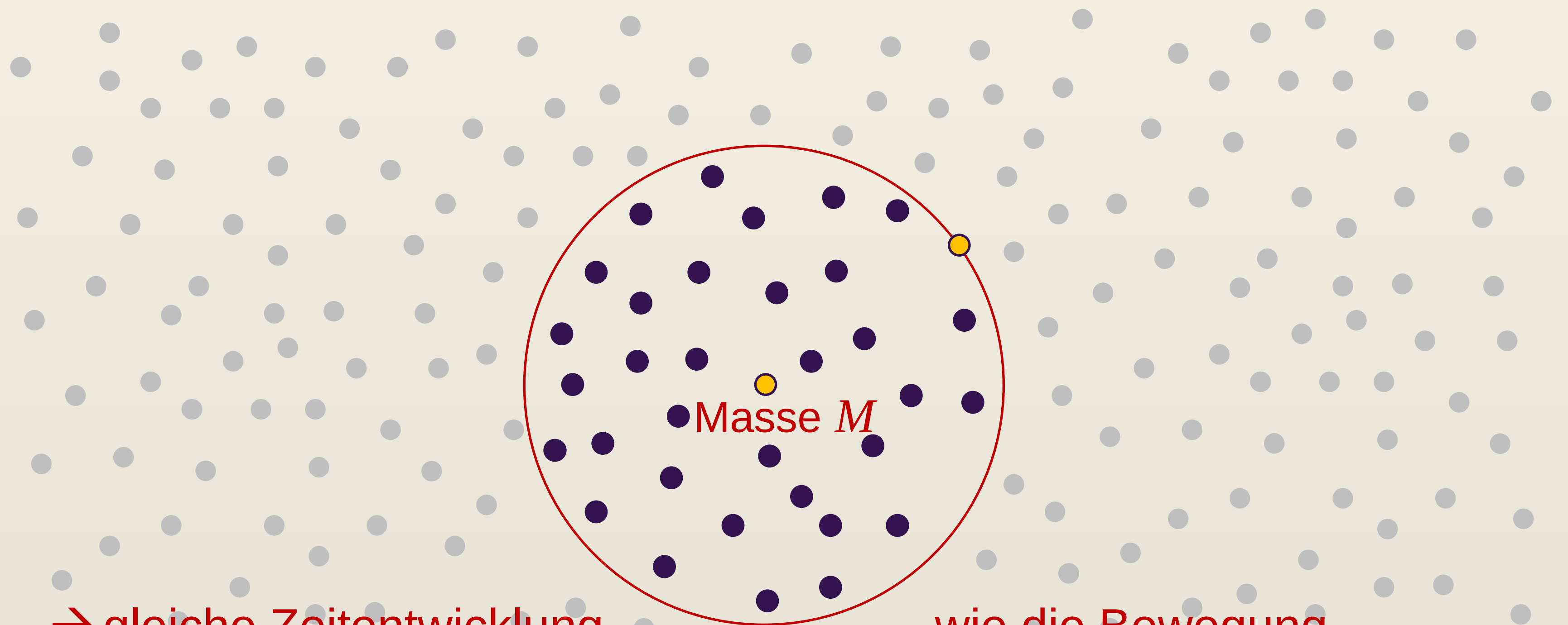
Die Expansion des Universums in der Theorie



Die Expansion des Universums in der Theorie



Die Expansion des Universums in der Theorie

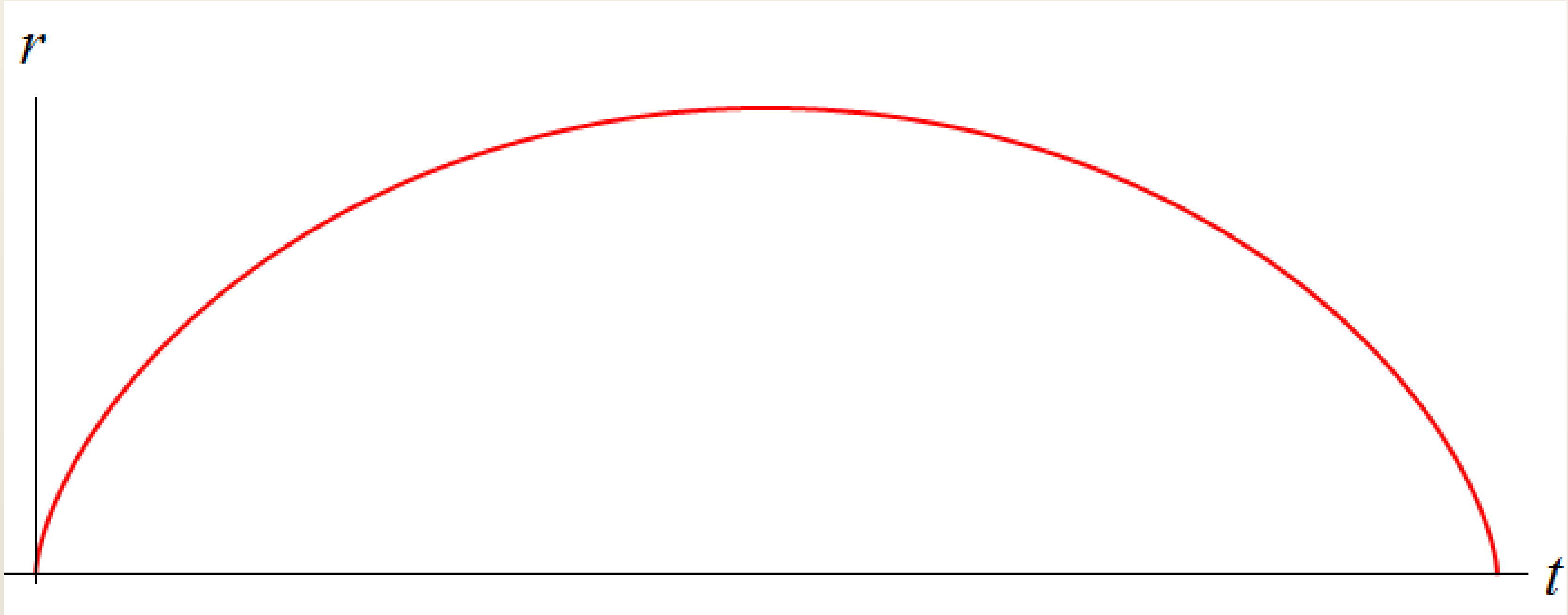


→ gleiche Zeitentwicklung wie die Bewegung einer Probemasse im Gravitationsfeld einer Punktmasse M !
Die Allgemeine Relativitätstheorie liefert das gleiche Resultat!

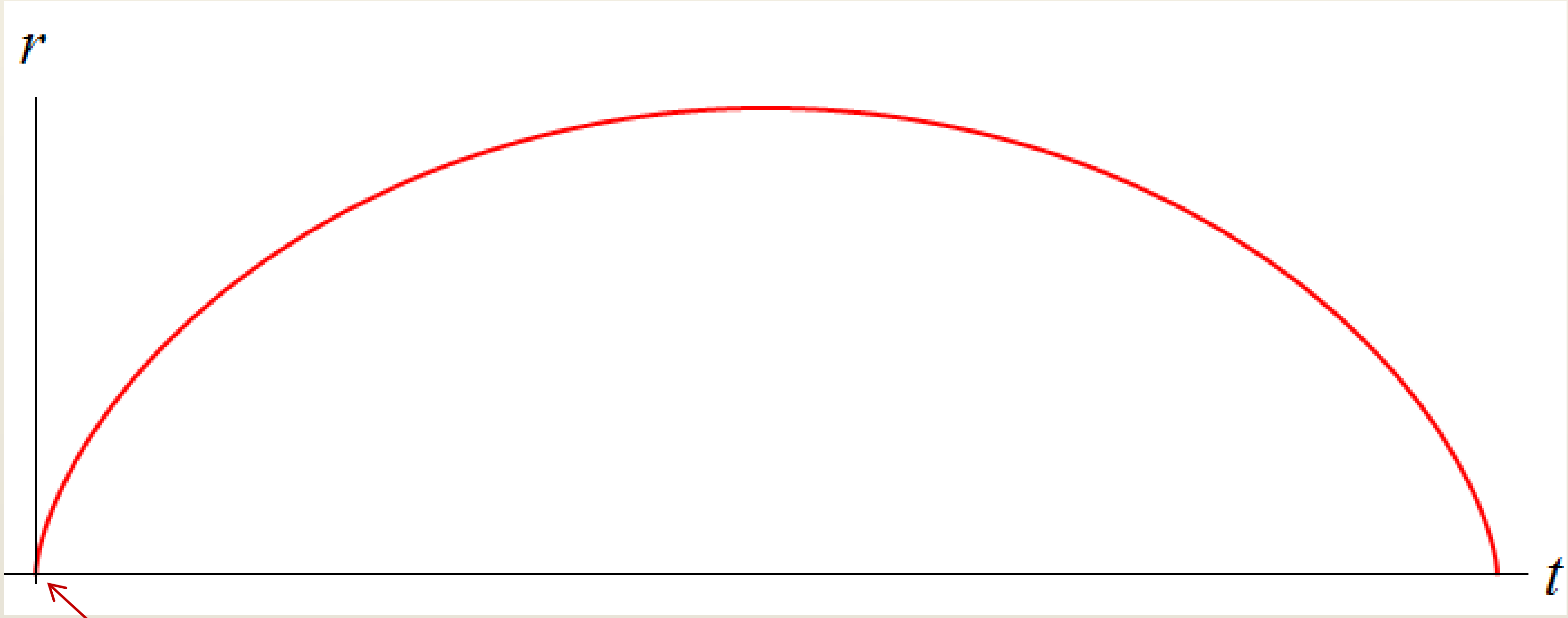
→ Mathematische Erkenntnis „ohne Formeln“!

Die Expansion des Universums in der Theorie

Die Expansion des Universums in der Theorie

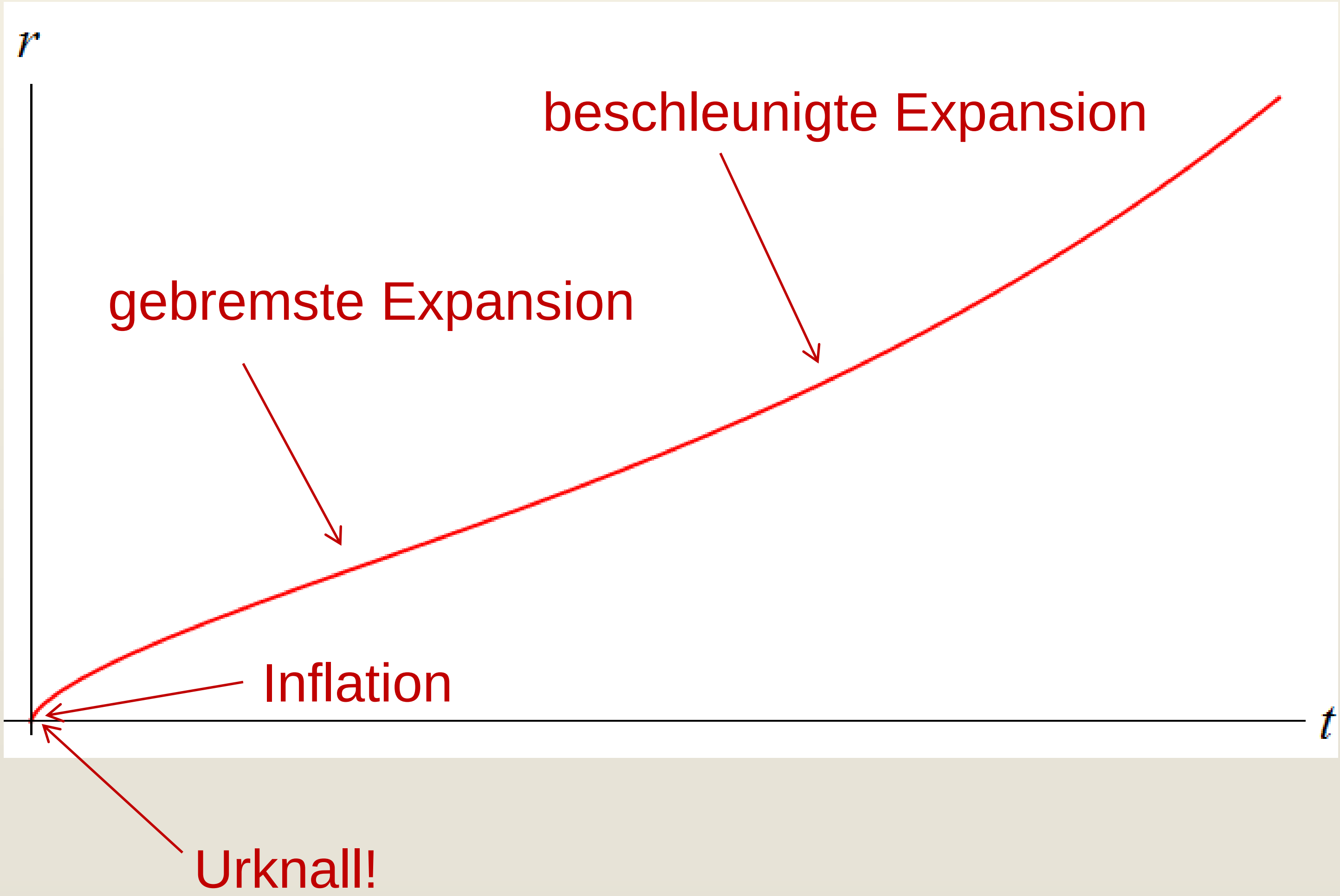


Die Expansion des Universums in der Theorie



Urknall!

Das heutige Bild der Expansion des Universums



Ein mathematisches Modell aus der Biologie

Mathematische Modellbildung spielt auch in – vermeintlich „weicheren“ – Naturwissenschaften eine wichtige Rolle! Dies sei anhand eines Beispiels aus der Evolutionsbiologie verdeutlicht:

> In der Natur gibt es „altruistisches“ (aufopferndes) Verhalten. Wie können sich Gene, die ihre Träger zu einem solchen Verhalten veranlassen, in einer Population ausbreiten?

Wieso begünstigt die Evolution nicht (immer) die Egoisten?

Die Mendelschen Vererbungsregeln

Siehe

→ Mendel und die Mathematik der Vererbung

http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/aussermathAnw/Vererbung.html

Das Selbstmörder-Gen

Mathematisches Modell:

- Betrachten Gruppen von Geschwistern, die manchmal in große Gefahr kommen.
- Ein Individuum (X) hat ein Allel, das es zur Rettung seiner Geschwister veranlasst, wobei es (statt seiner Geschwister) stirbt!
- Kann sich dieses Allel („Selbstmörder-Gen“) in der Population ausbreiten?

Beachte:

- Jedes Geschwister trägt mit Wahrscheinlichkeit ½ das „Selbstmörder-Gen“ ebenfalls!

Das Selbstmörder-Gen

Allel zur „Rettung von n Geschwistern“

- $n = 1$
- $n = 2$
- $n = 3$

Das Selbstmörder-Gen

Ergebnis:

Allel zur Rettung von	durchschnittliche Anzahl der pro Aufopferung geretteten Kopien des Allels	Erfolg in der Population
1 Geschwister	1/2	schlecht
2 Geschwister	1	neutral
3 Geschwister	3/2	gut

→ Ein „Allel zur Rettung von 3 Geschwistern“ wird sich in der Population ausbreiten!

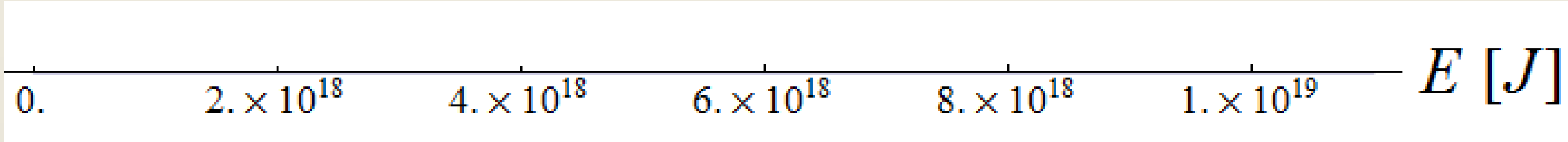
Der Logarithmus in der Geologie

Einige ausgewählte Erdbeben:

Ort	Datum	Magnitude
Valdivia (Chile)	22.5.1960	9.5
Prinz-William-Sund (Alaska)	27.3.1964	9.2
Sumatra (Indonesien)	26.12.2004	9.1
Honshūk (Japan)	11.3.2011	9.0
Koktokay (China)	10.8.1931	8.0
Großer Kaukasus (Georgien)	29.4.1991	7.0
Skopje (Mazedonien)	26.7.1963	6.0
Seebenstein (Österreich)	16.4.1972	5.3
Ebreichsdorf (Österreich)	2.9.2013	4.3
Ebreichsdorf (Österreich)	2.10.2013	4.2
Ebreichsdorf (Österreich) NB	2.10.2013	2.9

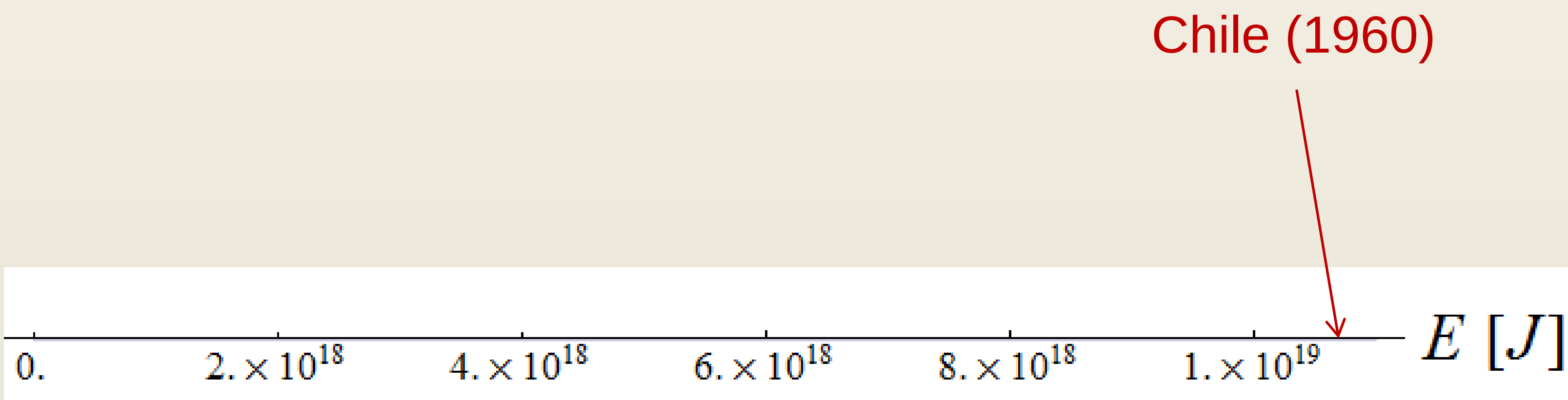
Der Logarithmus in der Geologie

Freigesetzte seismische Energie:



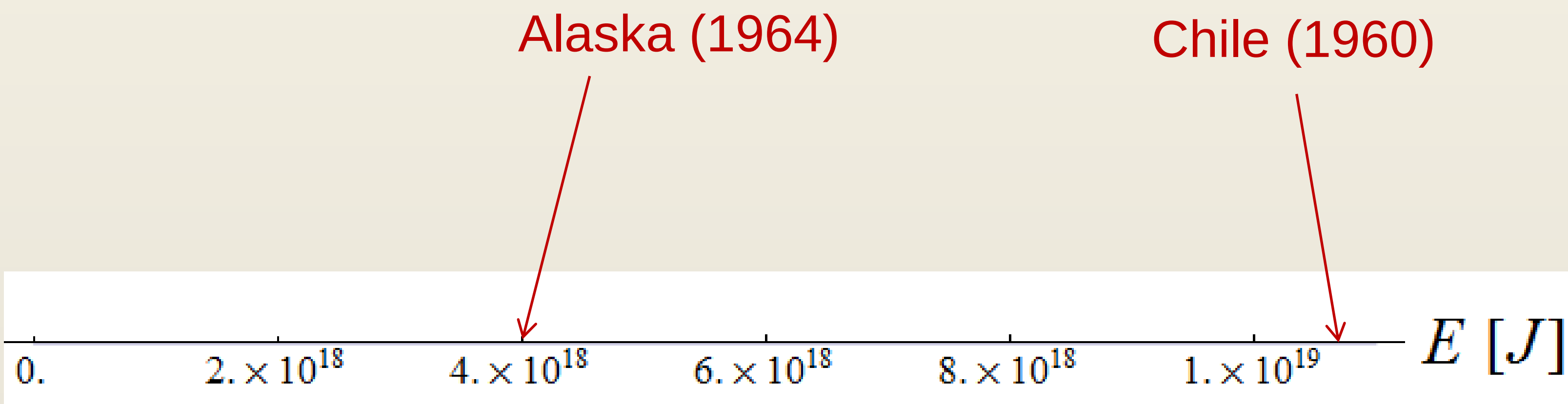
Der Logarithmus in der Geologie

Freigesetzte seismische Energie:



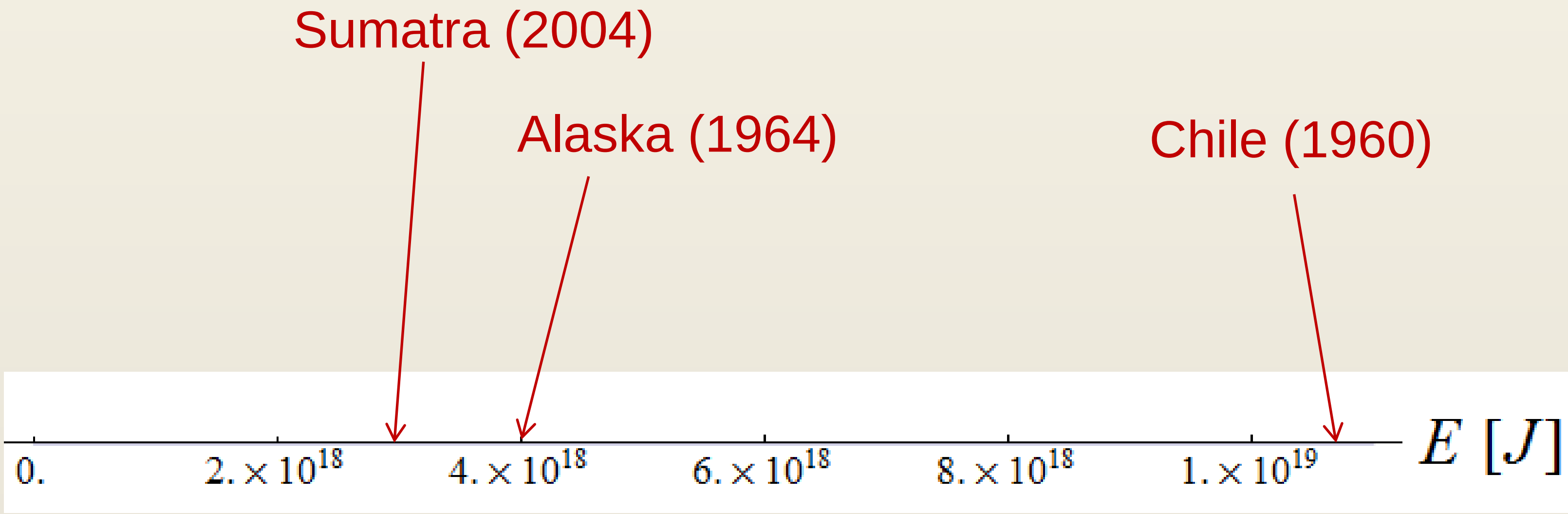
Der Logarithmus in der Geologie

Freigesetzte seismische Energie:



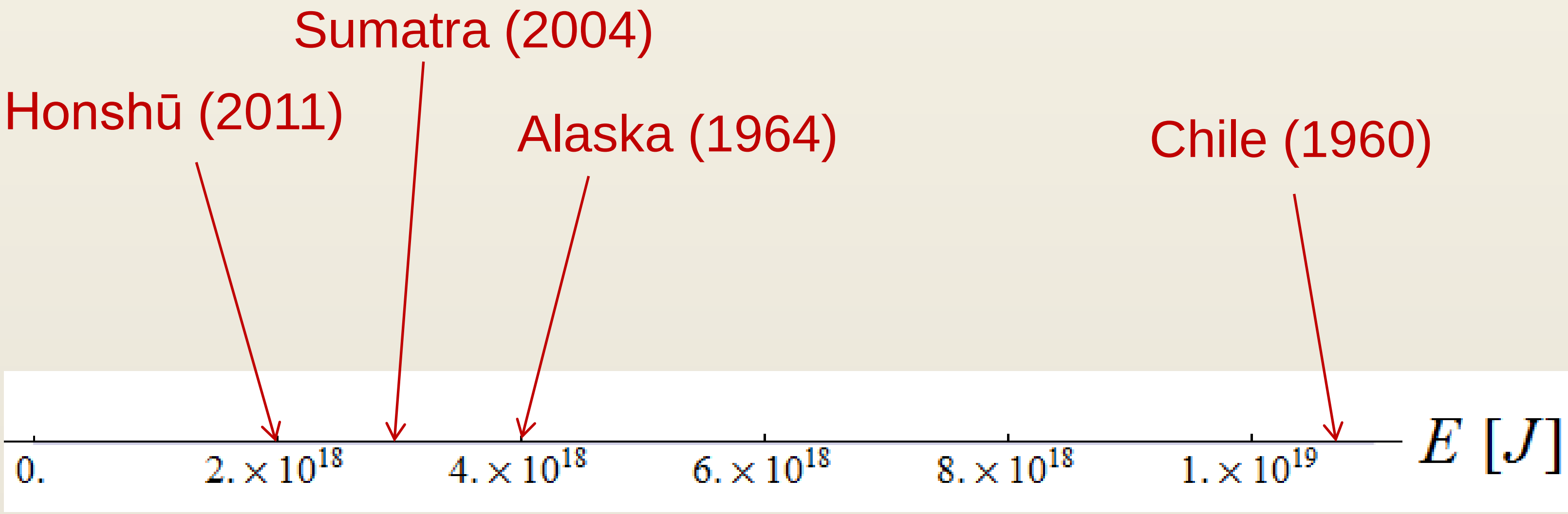
Der Logarithmus in der Geologie

Freigesetzte seismische Energie:



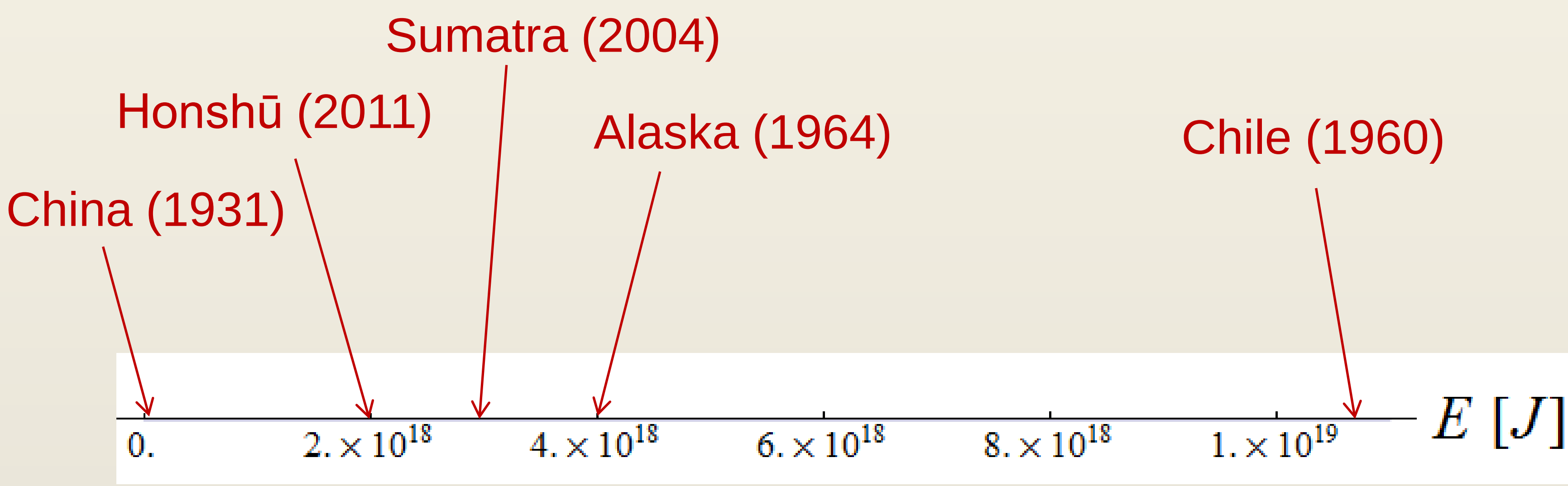
Der Logarithmus in der Geologie

Freigesetzte seismische Energie:



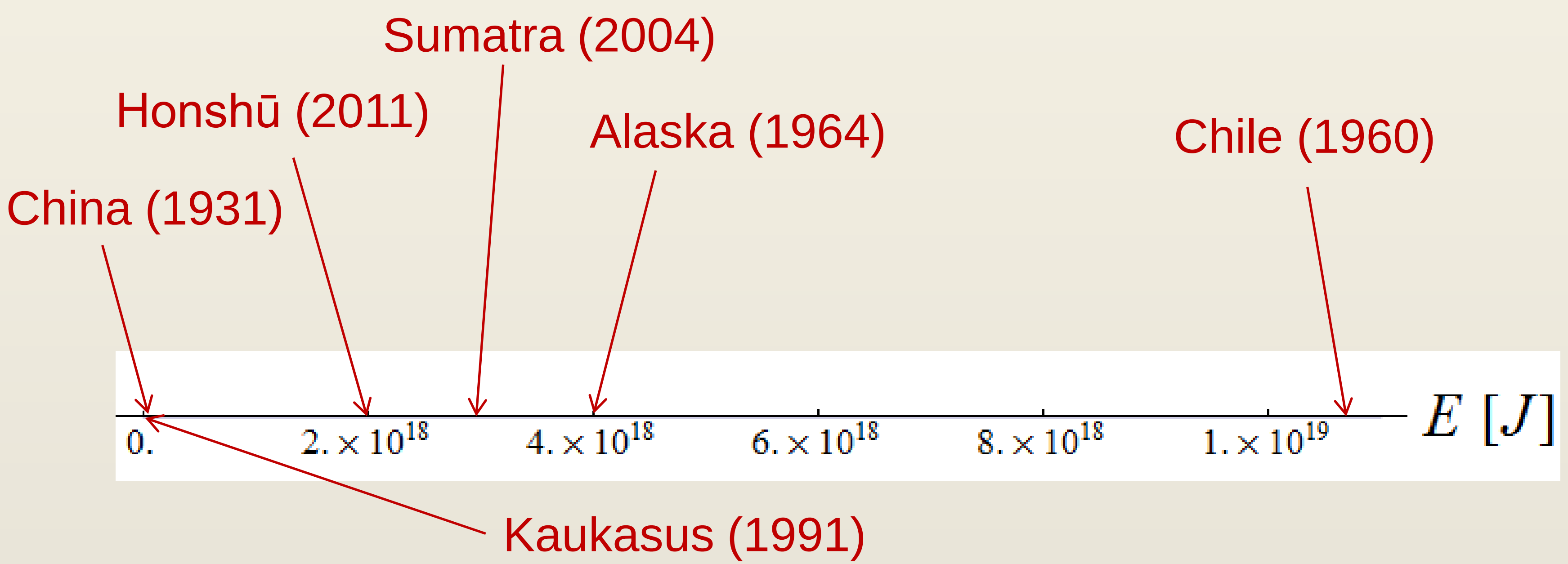
Der Logarithmus in der Geologie

Freigesetzte seismische Energie:



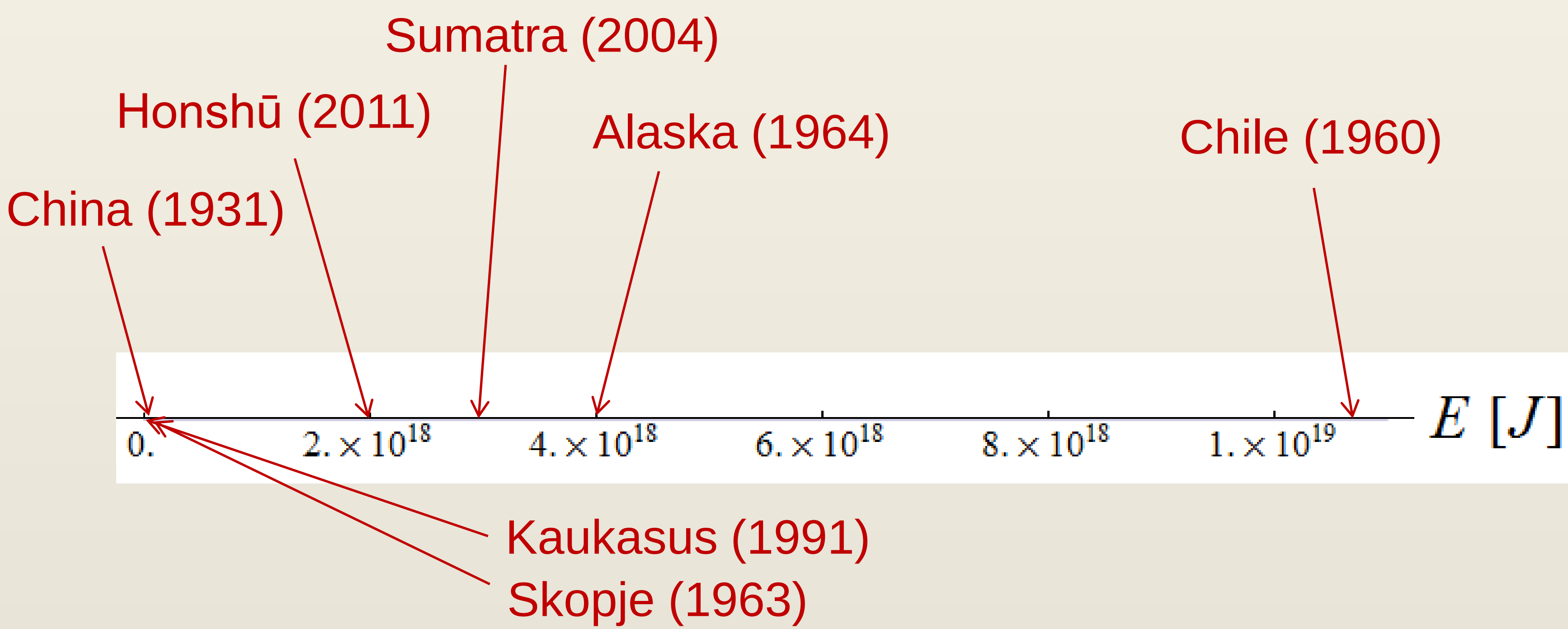
Der Logarithmus in der Geologie

Freigesetzte seismische Energie:



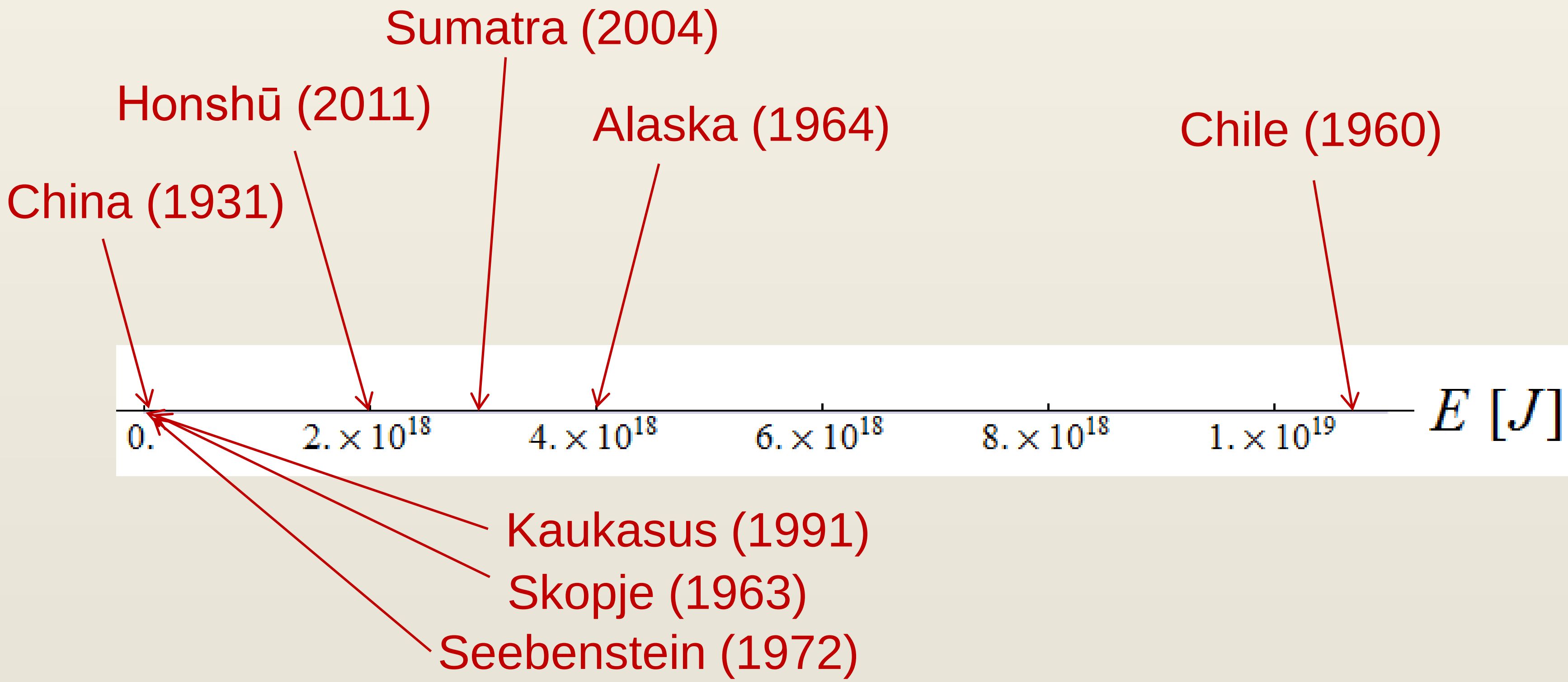
Der Logarithmus in der Geologie

Freigesetzte seismische Energie:



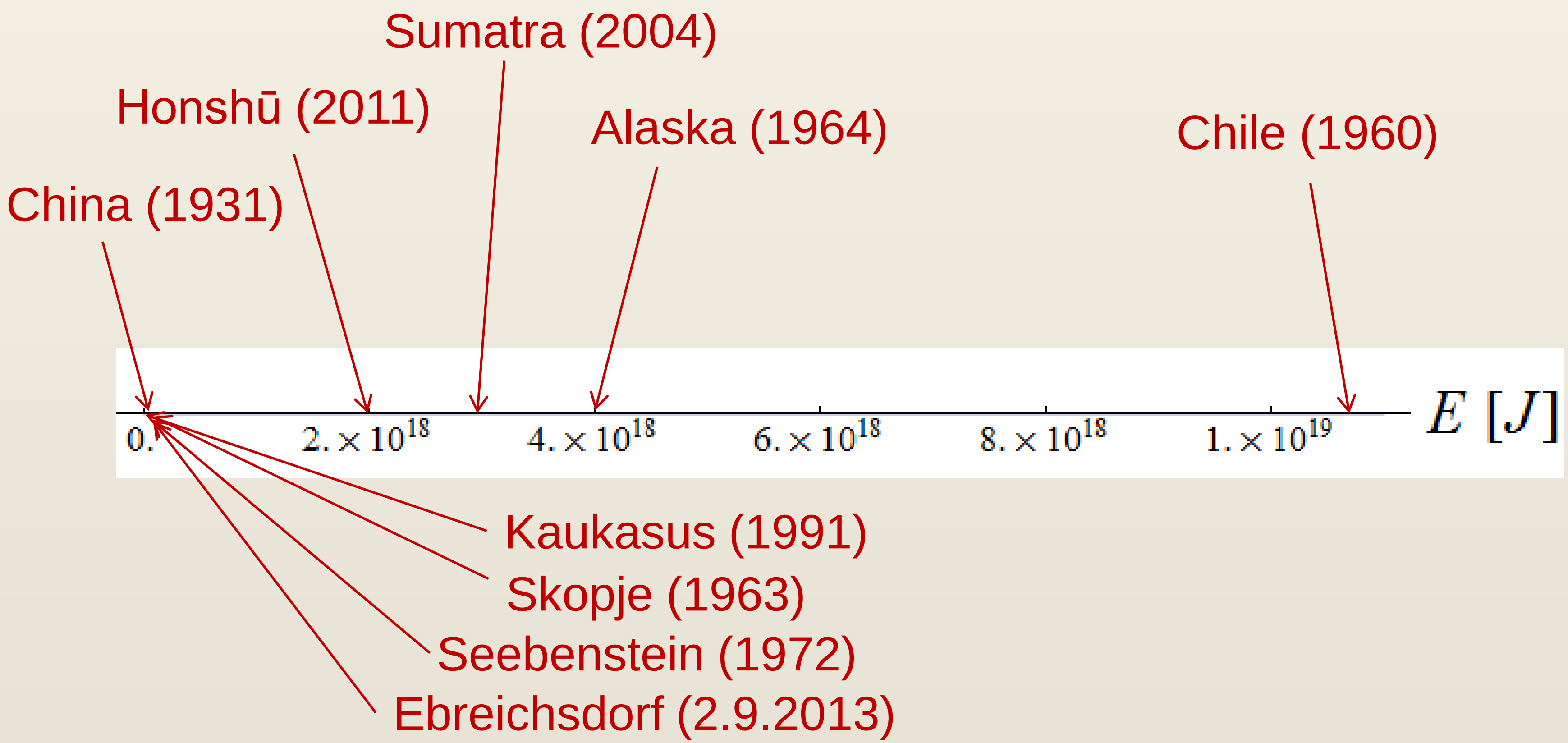
Der Logarithmus in der Geologie

Freigesetzte seismische Energie:



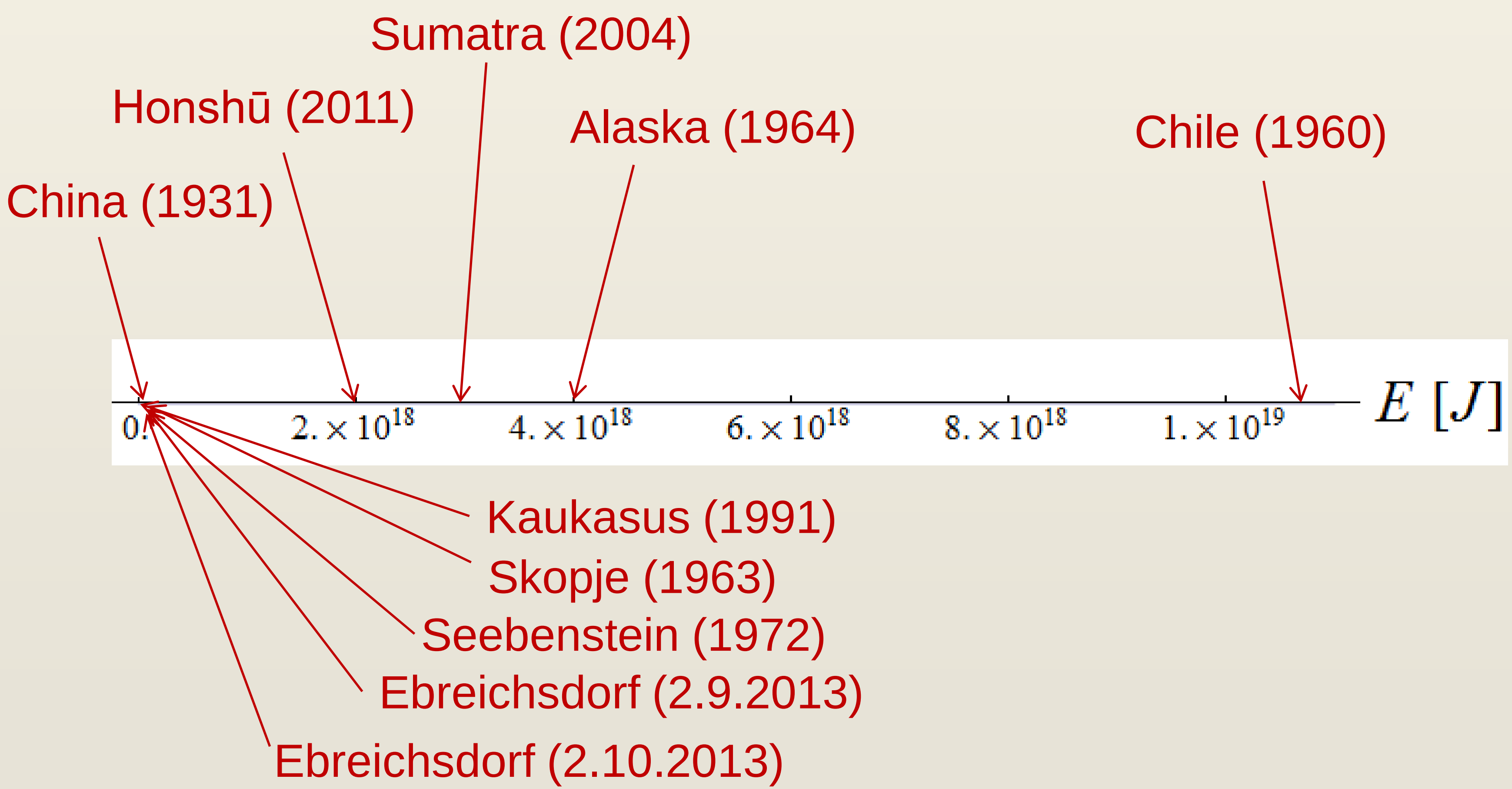
Der Logarithmus in der Geologie

Freigesetzte seismische Energie:



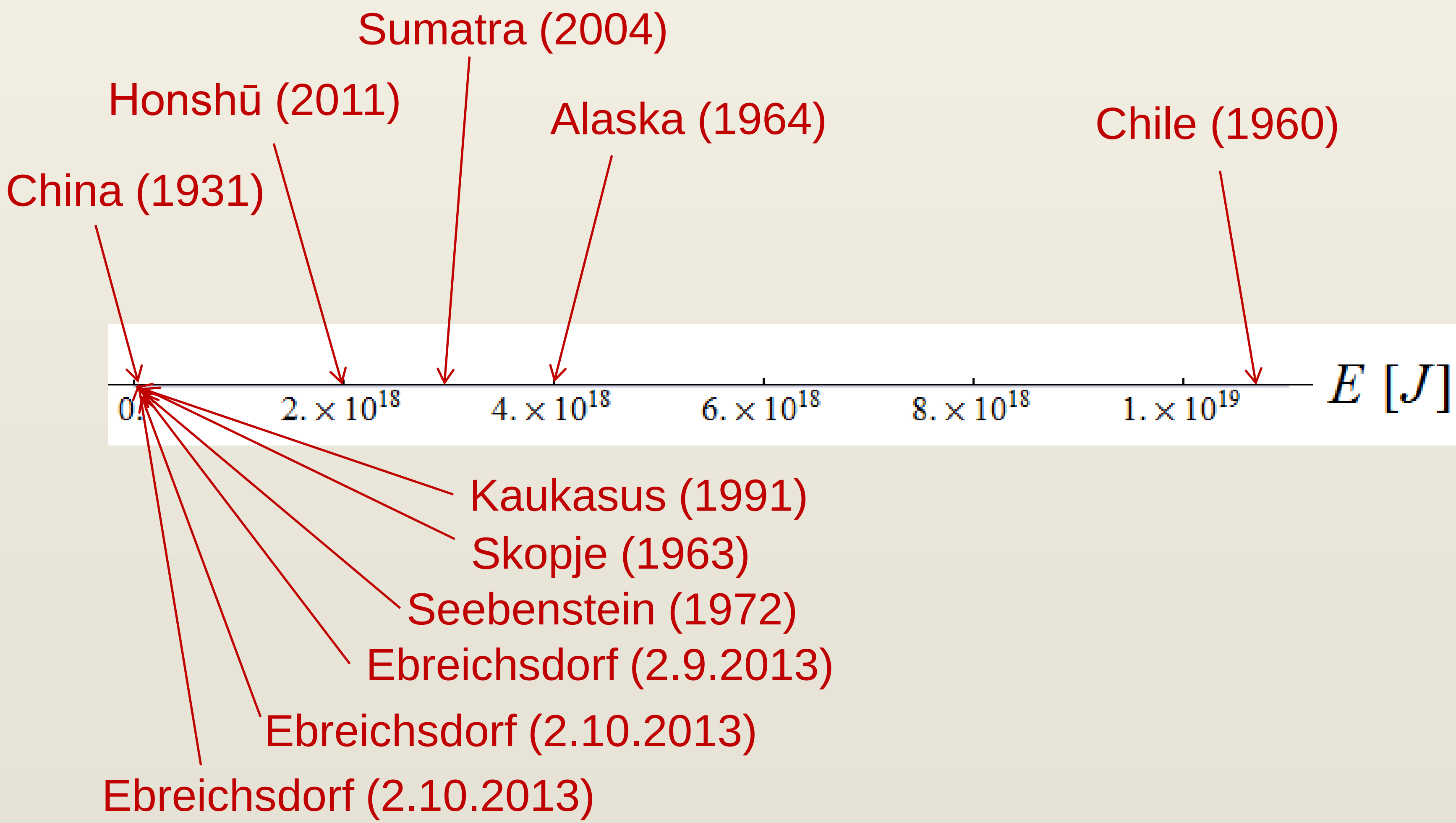
Der Logarithmus in der Geologie

Freigesetzte seismische Energie:



Der Logarithmus in der Geologie

Freigesetzte seismische Energie:



Der Logarithmus in der Geologie

Einige ausgewählte Erdbeben:

Ort	Datum	Magnitude	Energie [J]
Valdivia (Chile)	22.5.1960	9.5	1.1×10^{19}
Prinz-William-Sund (Alaska)	27.3.1964	9.2	4.0×10^{18}
Sumatra (Indonesien)	26.12.2004	9.1	2.8×10^{18}
Honshūk (Japan)	11.3.2011	9.0	2.0×10^{18}
Koktokay (China)	10.8.1931	8.0	6.3×10^{16}
Großer Kaukasus (Georgien)	29.4.1991	7.0	2.0×10^{15}
Skopje (Mazedonien)	26.7.1963	6.0	6.3×10^{13}
Seebenstein (Österreich)	16.4.1972	5.3	5.6×10^{12}
Ebreichsdorf (Österreich)	2.9.2013	4.3	1.8×10^{11}
Ebreichsdorf (Österreich)	2.10.2013	4.2	1.3×10^{11}
Ebreichsdorf (Österreich) NB	2.10.2013	2.9	1.4×10^{9}

Logarithmus – Exkurs

Größe von Lebewesen:

Lebewesen	Größenordnung [m]
Hallimasch	1000
Wal	10
Hund	1
Maus	0.1
Käfer	0.01
Floh	0.001
Amöbe	0.0001
Bakterie	0.00001
Virus	0.000001

Logarithmus – Exkurs

Größe von Lebewesen:

Lebewesen	Größenordnung [m]	10^x
Hallimasch	1000	10^3
Wal	10	10^1
Hund	1	10^0
Maus	0.1	10^{-1}
Käfer	0.01	10^{-2}
Floh	0.001	10^{-3}
Amöbe	0.0001	10^{-4}
Bakterie	0.00001	10^{-5}
Virus	0.000001	10^{-6}

Logarithmus – Exkurs

Größe von Lebewesen:

Lebewesen	Größenordnung [m]	10^x	Logarithmus
Hallimasch	1000	10^3	3
Wal	10	10^1	1
Hund	1	10^0	0
Maus	0.1	10^{-1}	–1
Käfer	0.01	10^{-2}	–2
Floh	0.001	10^{-3}	–3
Amöbe	0.0001	10^{-4}	–4
Bakterie	0.00001	10^{-5}	–5
Virus	0.000001	10^{-6}	–6

Logarithmus – Exkurs

Größe von Lebewesen:

Lebewesen	Größenordnung [m]	10^x	Logarithmus
Hallimasch	1000	10^3	3
Wal	10	10^1	1
Mensch	1.7	$10^{0.23}$	0.23
Hund	1	10^0	0
Maus	0.1	10^{-1}	–1
Käfer	0.01	10^{-2}	–2
Floh	0.001	10^{-3}	–3
Amöbe	0.0001	10^{-4}	–4
Bakterie	0.00001	10^{-5}	–5
Virus	0.000001	10^{-6}	–6

Der Logarithmus in der Geologie

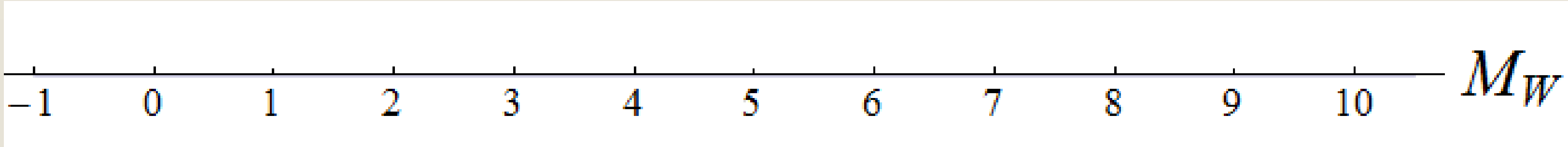
Momenten-Magnituden-Skala:

$$M_W = \frac{\lg(E\ [\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$

Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

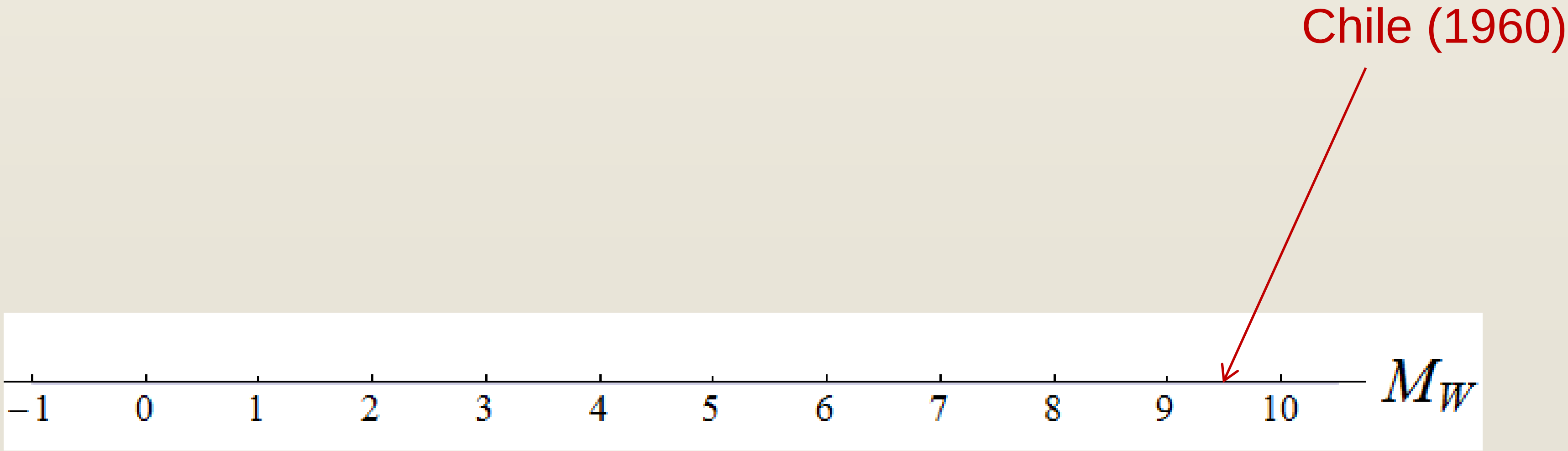
$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$



Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

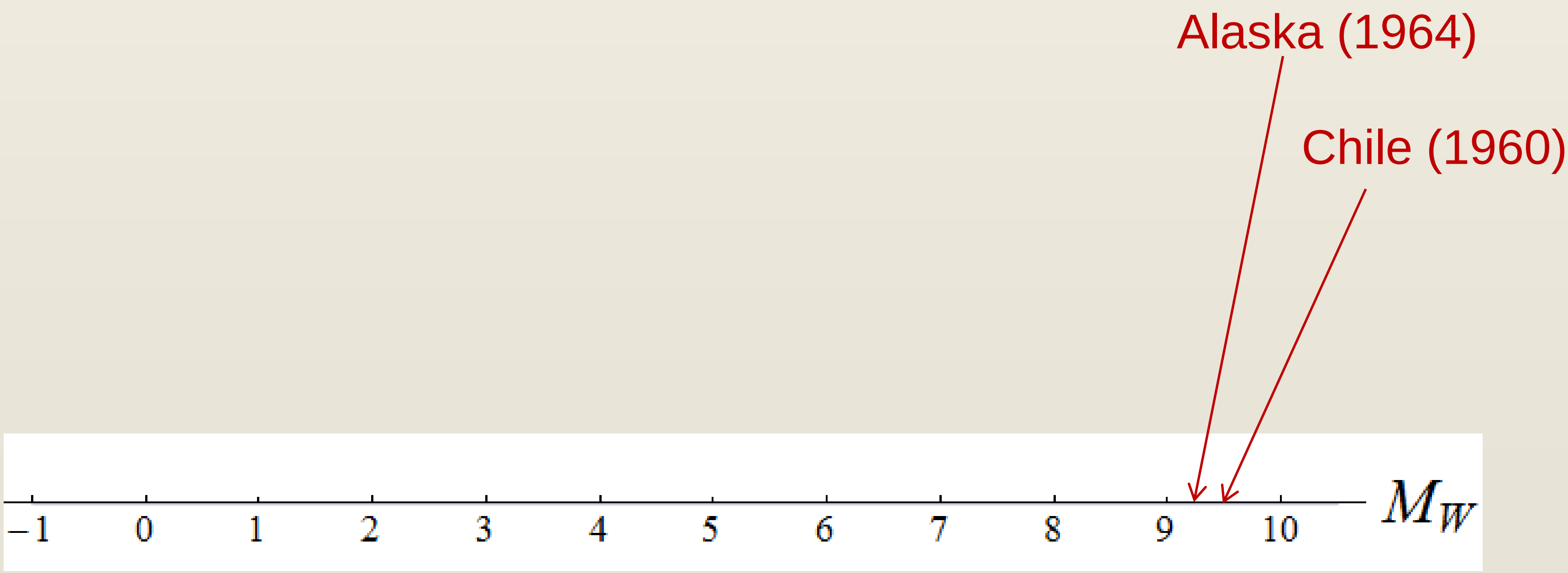
$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$



Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

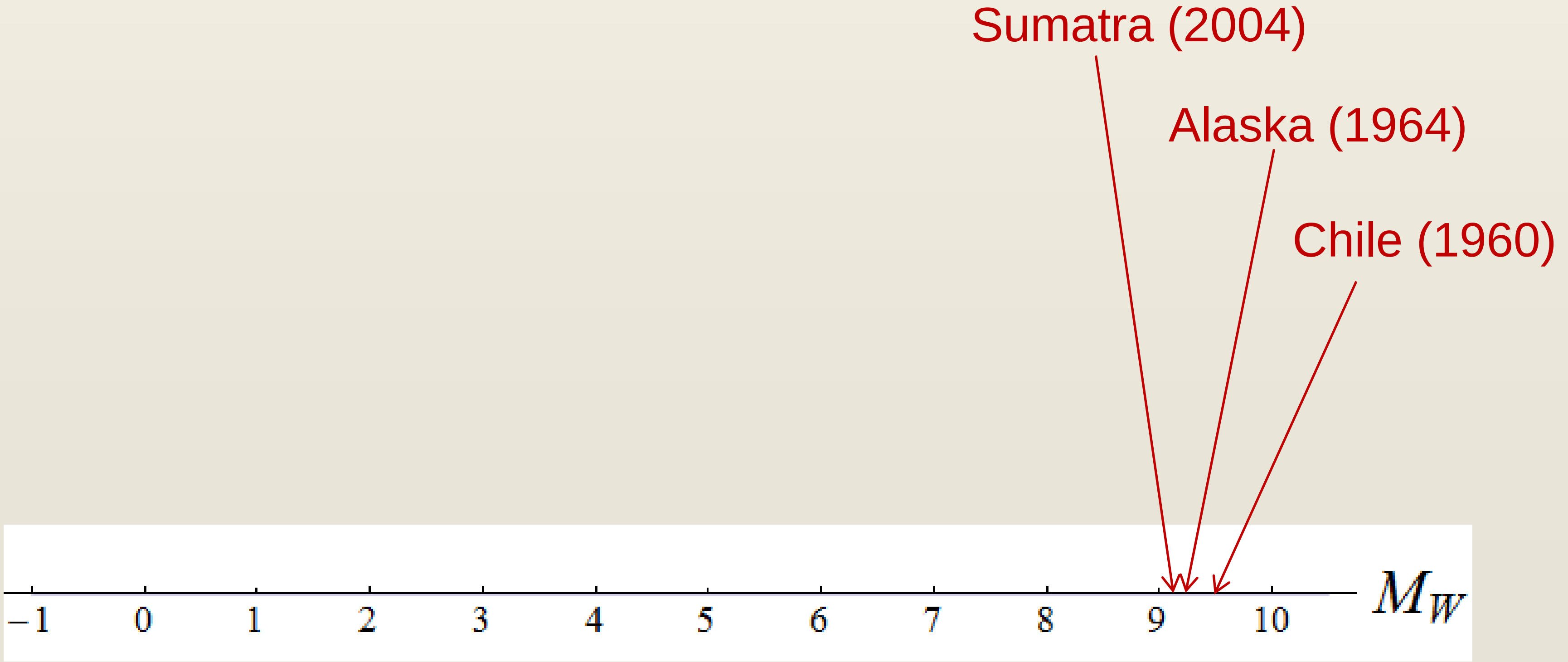
$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$



Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

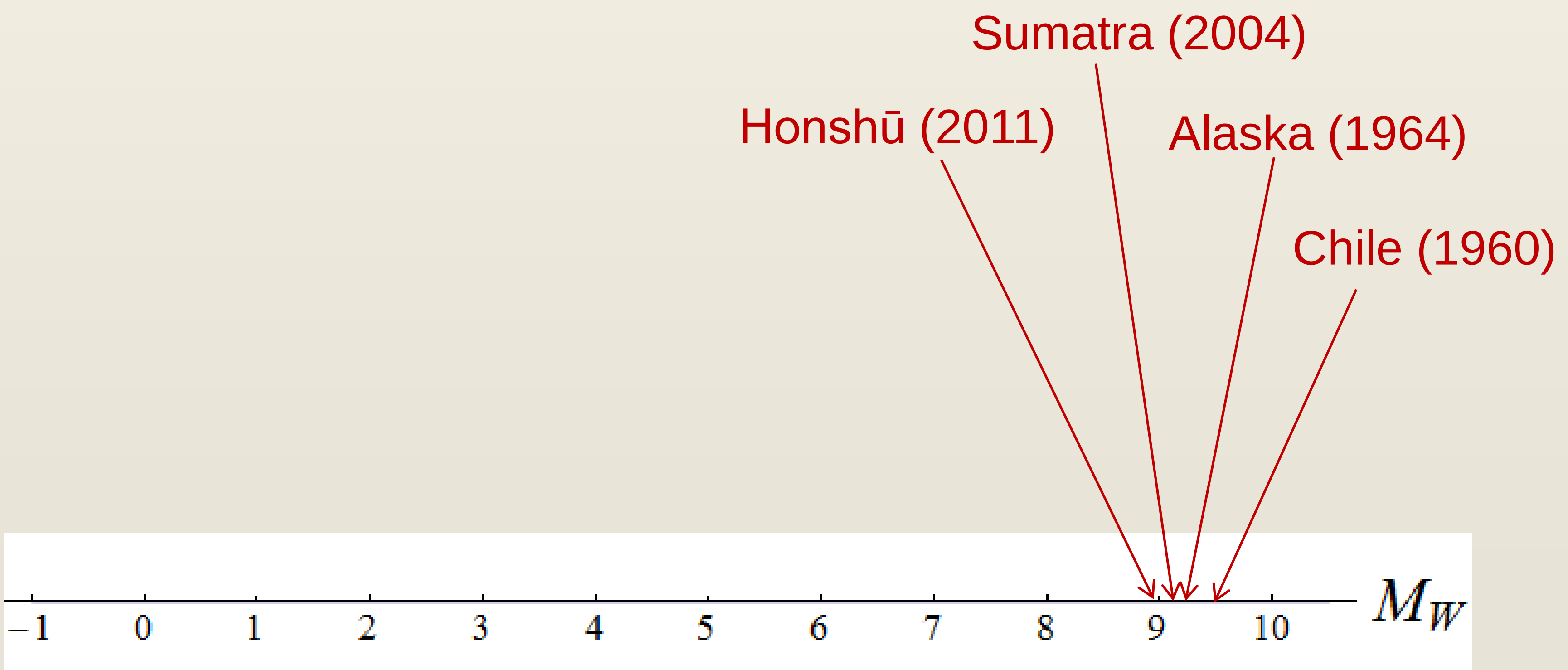
$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$



Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

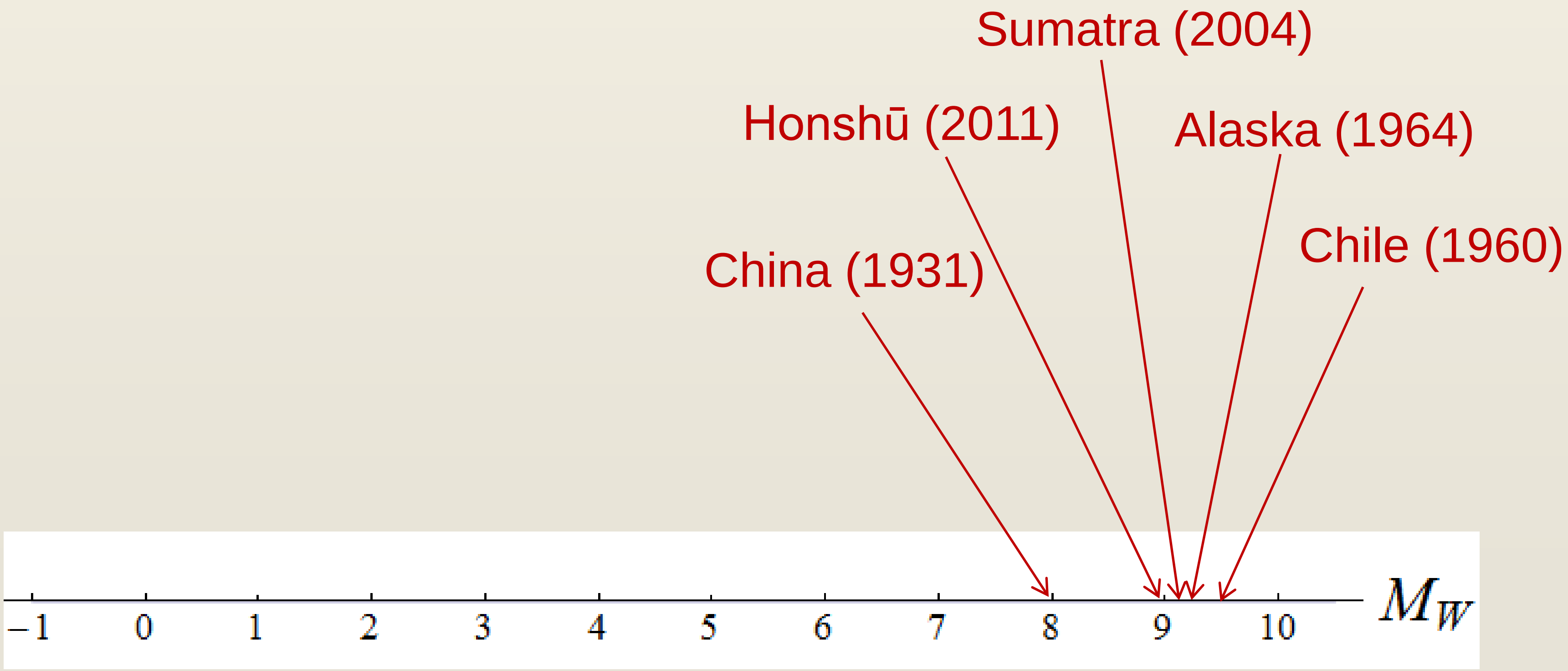
$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$



Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

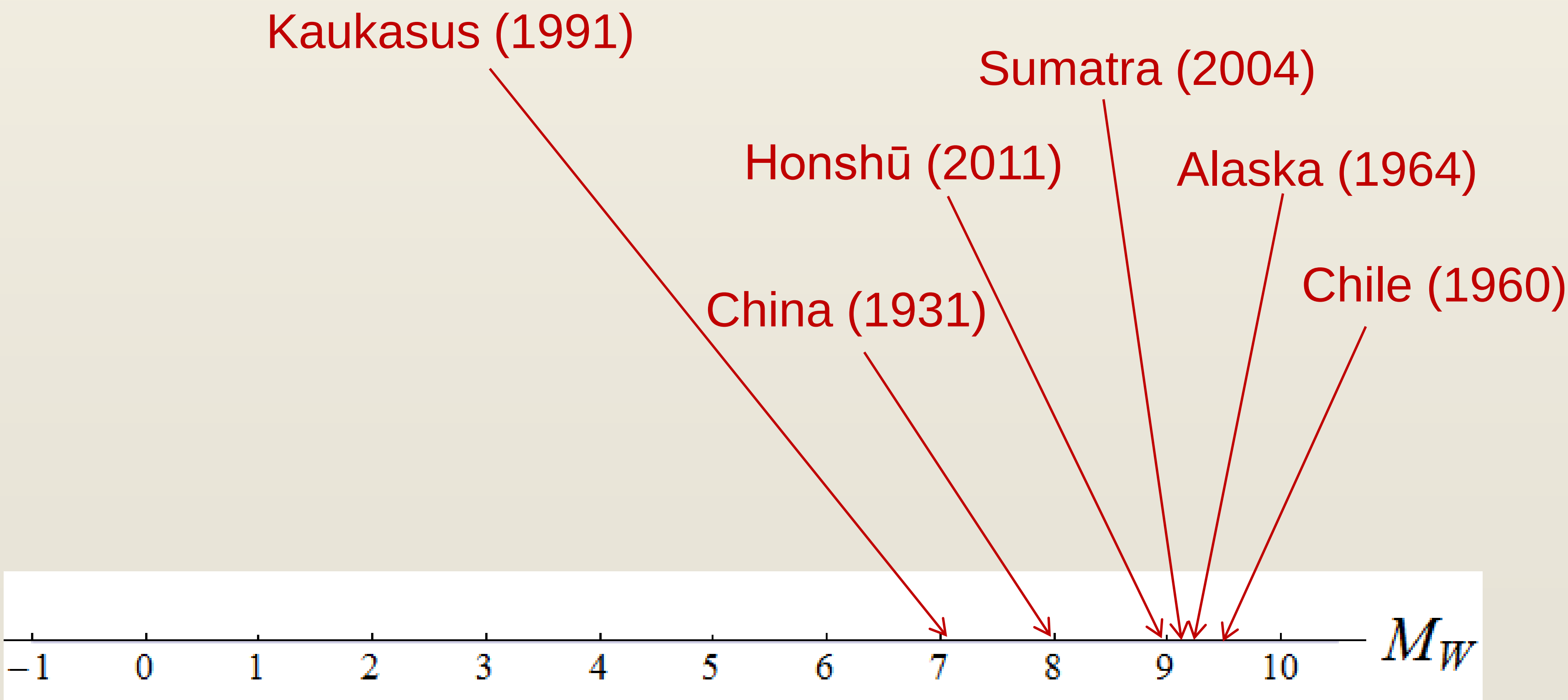
$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$



Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

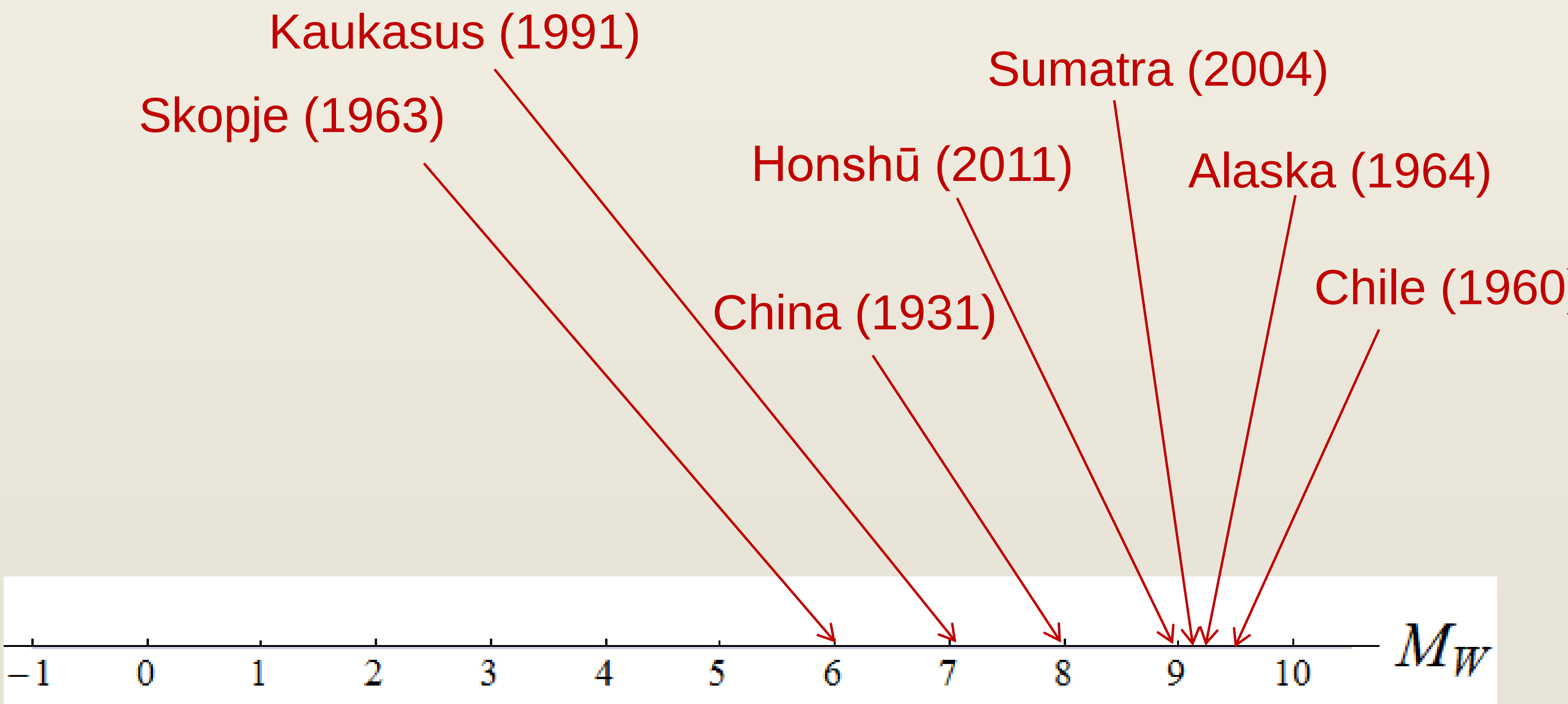
$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$



Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

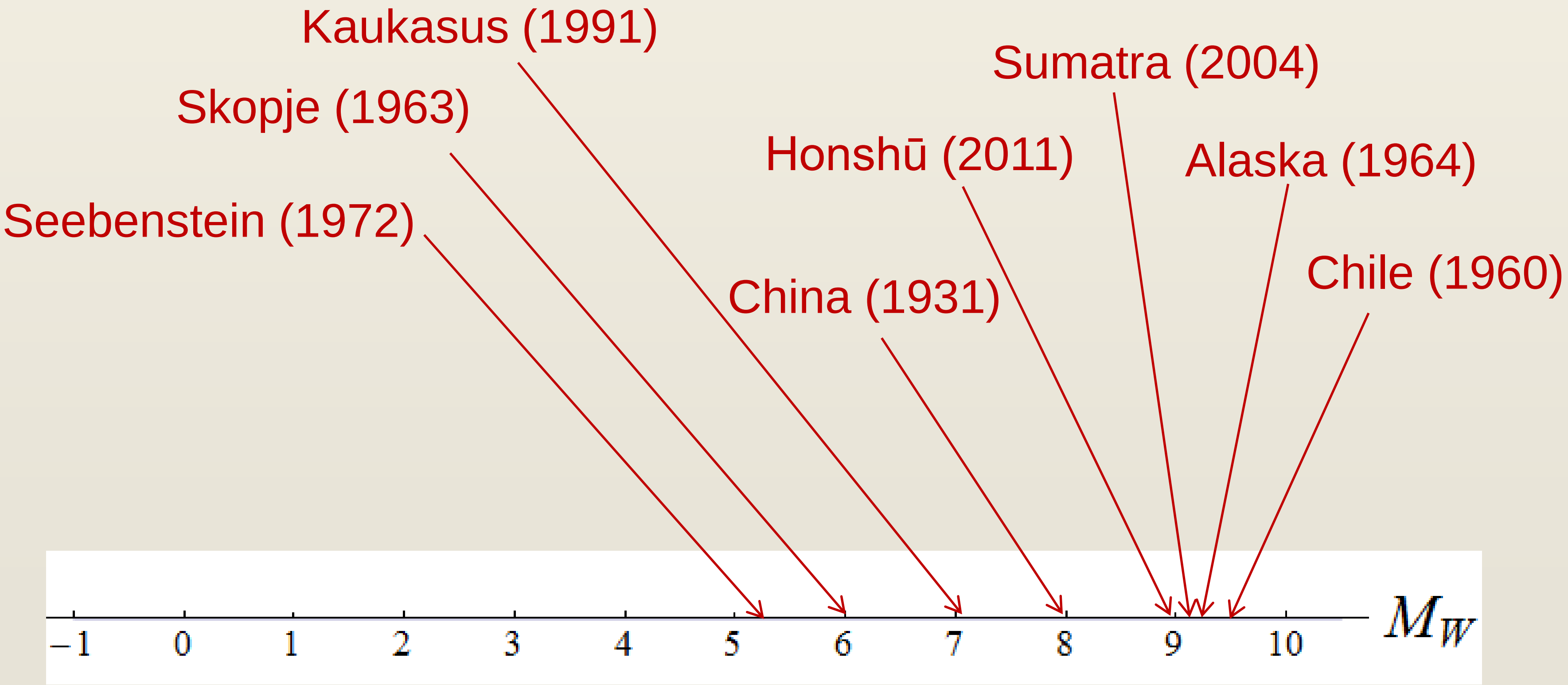
$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$



Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

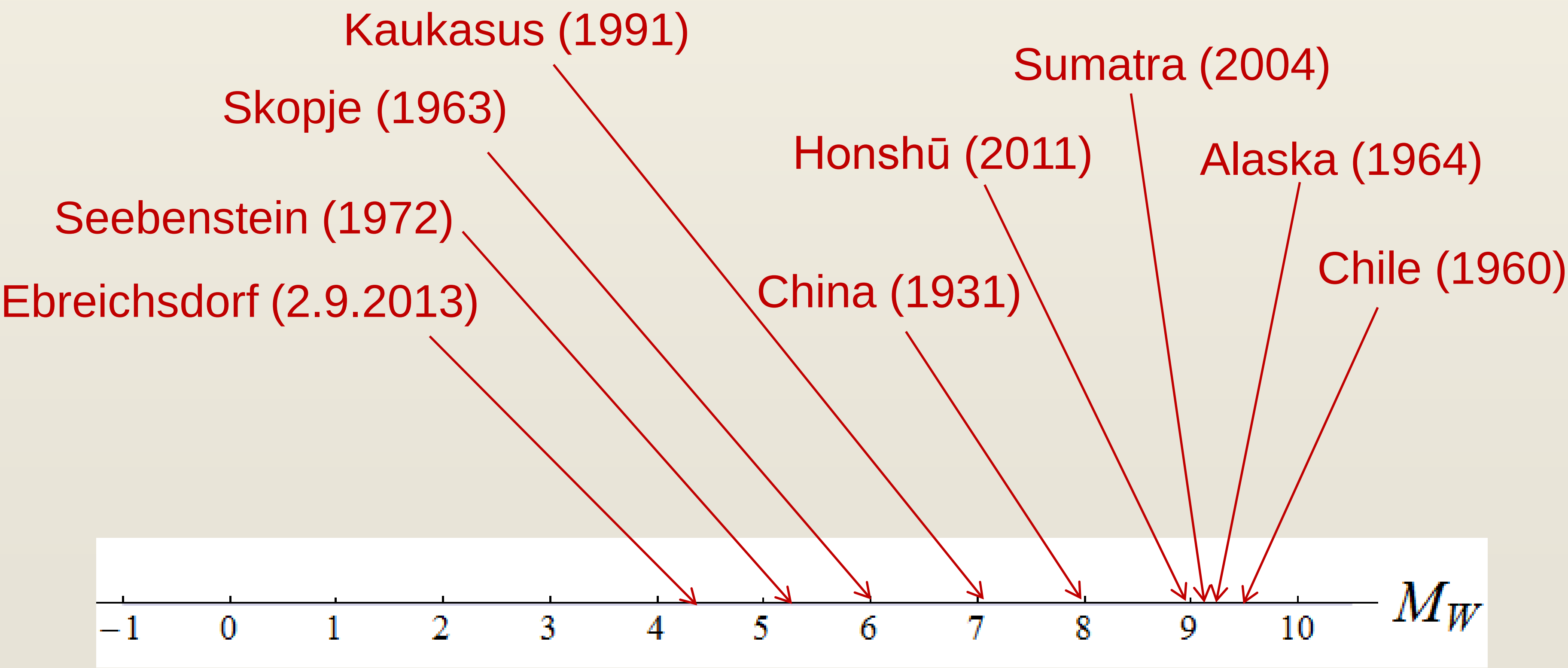
$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$



Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

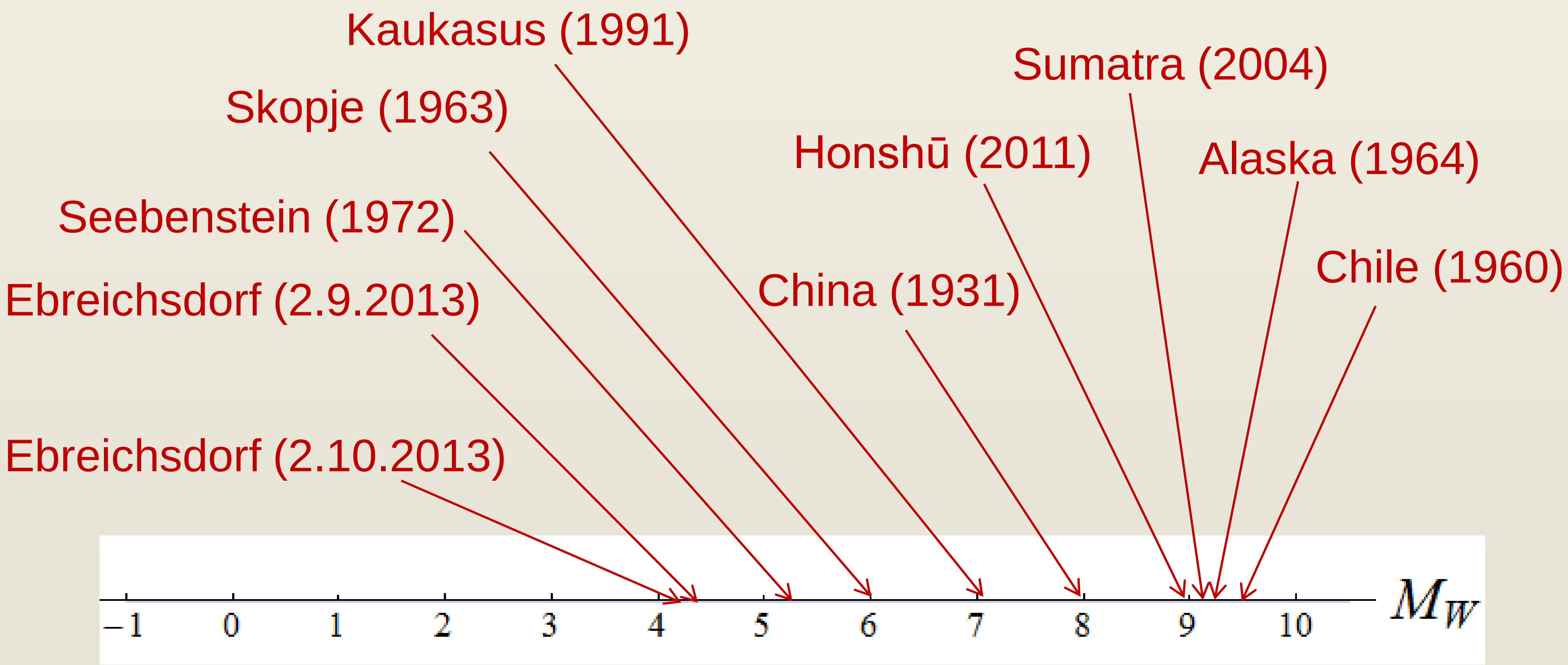
$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$



Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

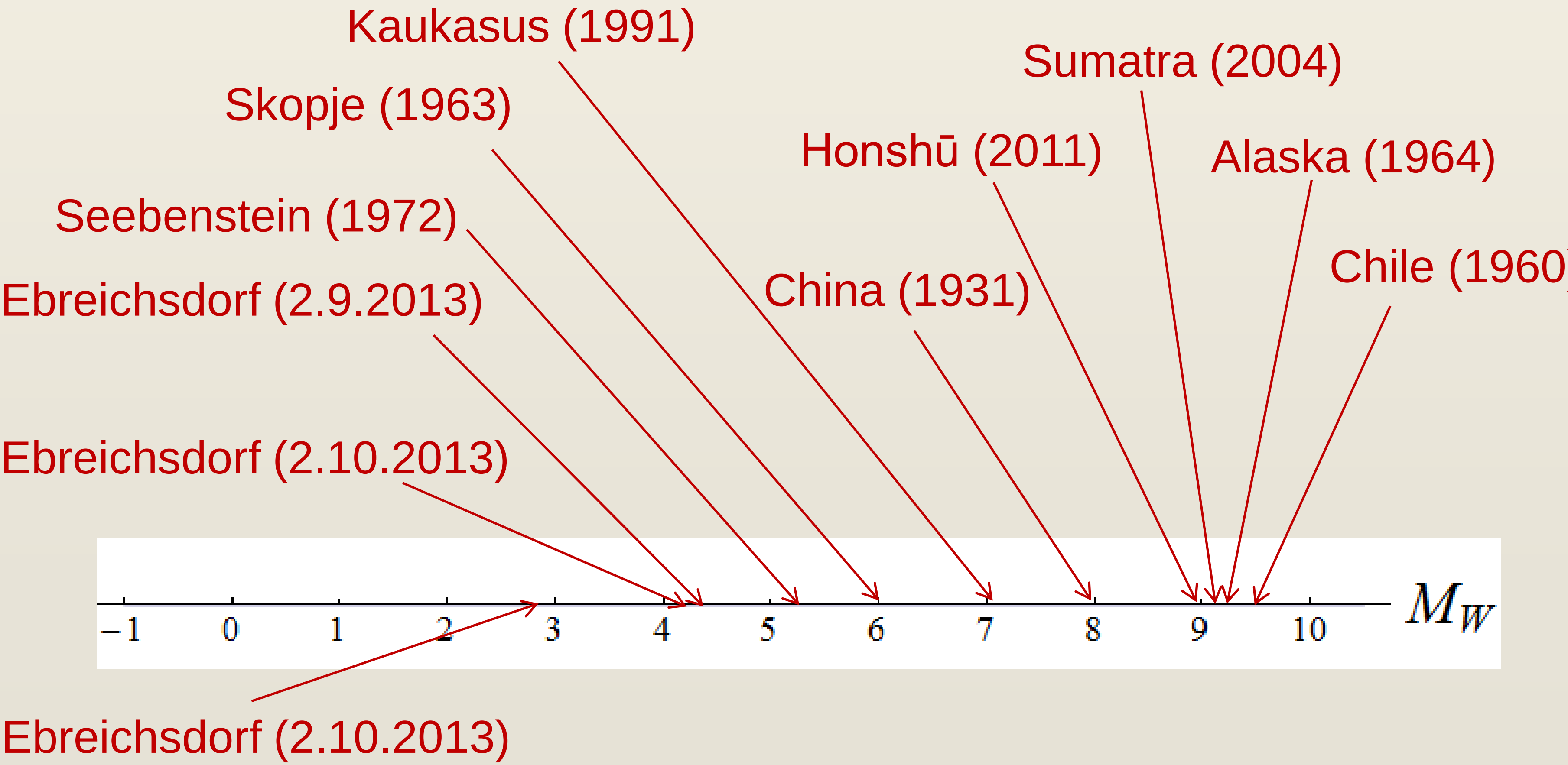
$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$



Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$



Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$

- Eine Magnituden-Differenz von 0.2 entspricht einer Verdopplung der Energie!
- Eine Magnituden-Differenz von 1 entspricht einer Ver-31.6-fachung der Energie!

Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

$$M_W = \frac{\lg(E\,[\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$

- Eine Magnituden-Differenz von 0.2 entspricht einer Verdopplung der Energie!
- Eine Magnituden-Differenz von 1 entspricht einer Ver-31.6-fachung der Energie!
- $\left.\begin{array}{l} M_W\text{(Chile, 1960)} = 9.5 \\ M_W\text{(Ebreichsdorf, 2.9.2013)} = 4.3 \end{array}\right\}$ Faktor: 60 Millionen !!!

Der Logarithmus in der Geologie

Momenten-Magnituden-Skala:

$$M_W = \frac{\lg(E\ [\mathrm{J}]) - 4.8}{1.5}$$

- Eine Magnituden-Differenz von 0.2 entspricht einer Verdopplung der Energie!
- Eine Magnituden-Differenz von 1 entspricht einer Ver-31.6-fachung der Energie!
- M_W(Chile, 1960) = 9.5
  M_W(Ebreichsdorf, 2.9.2013) = 4.3
  Faktor: 60 Millionen !!!
- M_W(Ebreichsdorf, 2.10.2013) = 4.2
  M_W(Ebreichsdorf, 2.10.2013) = 2.9
  Faktor: 90 !!!

Danke...

... für Ihre Aufmerksamkeit!

Diese Präsentation finden Sie im Web unter

http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/MathematikNawi/