Die Maxwell-Gleichungen

L1, SS 2012
(Buchfragment)

Franz Embacher

Inhaltsverzeichnis

1 Elektrodynamik

Die Physik kennt vier fundamentale Wechselwirkungen, von denen eine die *elektromagnetische* ist. Genau genommen ist sie – von einem modernen theoretischen Standpunkt aus betrachtet – bereits mit einer anderen, der *schwachen*, zur „elektroschwachen" Wechselwirkung vereinheitlicht. Daneben gibt es noch die *starke* Wechselwirkung (die Kernkräfte) und die *Gravitation* (die Schwerkraft). Nur zwei dieser vier Wechselwirkungen lassen sich auf der Basis der klassischen Physik verstehen: die elektromagnetische und die Gravitation. Für letztere ist die Allgemeine Relativitätstheorie zuständig, und für die Formulierung einer Theorie der schwachen und der starken Wechselwirkung ist es nötig, Quantenfeldtheorie zu betreiben – beides geht über den Rahmen dieser Lehrbuchreihe hinaus. Das mag als praktischer Grund dafür erscheinen, der Elektrodynamik eine prominenten Platz einzuräumen und ihr einen halben Band zu widmen. Doch es gibt auch zwei andere Gründe dafür.

Der eine besteht in der logischen Struktur der Elektrodynamik, die ein ideales Beispiel für die Art von Theorie darstellt, wie sie die moderne Physik anstrebt: Aus *wenigen* Grundgleichungen (die im ersten Abschnitt vorgestellt werden) kann eine große Fülle von Erscheinungen abgeleitet werden. Der andere Grund liegt genau in dieser Fülle. Die vier Wechselwirkungen spielen einander zwar in vielen Prozessen in die Hände, aber versuchen wir einmal in Gedanken, grob zu trennen, was wir ihnen verdanken (oder, genauer, was durch die jeweiligen Theorien beschrieben wird):

- Der Gravitation verdanken wir, dass sich die Materie zu Sternen und Planeten zusammenklumpen kann. Ohne sie gäbe es die Erde nicht. Wir verdanken ihr auch, dass sich die Erde in einer „habitablen Zone" um die Sonne bewegt. In massereichen Sternen sorgt sie – in deren letzten Lebenszyklen – für Drücke, die die Fusion schwerer Atomkerne bis zum Eisen und Nickel ermöglichen, und den durch sie ausgelösten Supernova-Explosionen verdanken wir die noch schwereren Atomkerne. Ohne sie gäbe es Elemente jenseits von Wasserstoff und Helium lediglich in homöopathischen Dosen.

- Der starken Wechselwirkung verdanken wir die Existenz von Atomkernen. Ohne sie gäbe es nicht einmal Protonen und Neutronen (die wir heute als Bindungszustände von Quarks verstehen), und da es keine Kernfusion gäbe, wären die Sterne ihrer wichtigsten Energiequelle beraubt.

- Die schwache Wechselwirkung unterstützt die starke Wechselwirkung in mancher Hinsicht, indem sie da und dort ein Neutrino entschlüpfen lässt und dadurch Prozesse ermöglicht, die ansonsten (aus Gründen der Energie- und Impulsbilanz) nicht stattfinden könnten. Ohne diese Assistenz käme die Hauptttätigkeit der Sonne – die Fusion von Heliumkernen – gleich zu Beginn zum Stillstand.

- Der elektromagnetischen Wechselwirkung verdanken wir die Existenz von Atomen und Molekülen und damit die Vielfalt der chemischen Elemente und Verbindungen, den flüssigen und festen Aggregatzustand und zahllose Materialeigenschaften der uns umgebenden Materie. Ohne sie gäbe es nicht einmal Dinge, die man als „Gegenstände“ bezeichnen könnte, ganz zu schweigen von technischen Anwendungen, die sich elektromagnetische Phänomene gezielt zunutze machen. Ihr verdanken wir auch das Licht, das als ein von der Materie abgeschütteltes elektromagnetisches Feld (oder, quantentheoretisch, als von der Materie emittierte Photonen) verstanden werden kann. Ohne sie würde uns die Sonne nicht wärmen, denn sie könnte kein Licht aussenden, und selbst wenn es Photonen gäbe, könnte keine Materie sie einfangen.

Diese (unvollständige) Aufzählung zeigt eindrucksvoll, dass die elektromagnetische Wechselwirkung uns und unserem Alltag in gewisser Weise am nächsten steht. Auch im Hinblick auf die Fülle an technologischen Anwendungen stellt sie die drei anderen Wechselwirkungen in den Schatten. Die von James Clerk Maxwell auf der Basis der Vorarbeiten zahlreicher anderer Forscher im Jahr 1865 veröffentlichten Gleichungen gehören zu den folgenreichsten wissenschaftlichen Errungenschaften überhaupt.

Bestimmte Aspekte der elektromagnetischen Wechselwirkung wurden bereits in den ersten zwei Bänden behandelt: Im ersten wurde die Bewegung geladener Teilchen in äußeren elektromagnetischen Feldern thematisiert, und im zweiten wurde anhand des Wasserstoffatoms illustriert, wie die Stabilität von Atomen zustande kommt und wie ihre Emissions- und Absorptionseigenschaften erschlossen werden können. Wie elektromagnetische Phänomene von der Materie hervorgebracht werden, wurde allerdings nicht untersucht. Dieser Frage wollen wir uns nun zuwenden.

Dabei werden wir uns fast ausschließlich auf Aspekte beschränken, die sich im Rahmen eines klassischen (nicht-quantentheoretischen) Weltbildes fassen lassen. Wir werden nicht bis zu den atomaren Prozessen hinabsteigen, sondern die Materie als Kontinuum betrachten, zur dessen Beschreibung keine Quantentheorie benötigt wird. Auch das elektromagnetische Feld selbst werden wir als klassisches Phänomen behandeln. Diese Einschränkung vedankt sich der Tatsache, dass eine Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes (die *Quantenelektrodynamik*, in der also *das Feld selbst* Quanteneigenschaften besitzt) einerseits formal recht aufwändig ist und andererseits für eine hinreichend genaue Beschreibung der meisten elektromagnetischen Erscheinungen gar nicht benötigt wird. Kleine (als punktförmig angesehene) Objekte werden fast ausschließlich die Rolle von Teilchen spielen, deren (klassisch beschriebene) Bewegung durch das elektromagnetische Feld beeinflusst wird. Quantentheoretische Konzepte (wie etwa das Photon) werden lediglich an wenigen Stellen auftauchen. Sollten Sie sich in Ihrer späteren Ausbildung mit der Quantenelektrodynamik beschäftigen, so kann Ihnen die Kenntnis der *klassischen Elektrodynamik*, wie sie hier behandelt wird, als Grundlage dienen.

1.1 Die Grundgleichungen

In diesem Abschnitt werden wir – nach einer kurzen Übersicht über die der Elektrodynamik zugrunde liegende Mathematik – die fünf Grundgleichungen (von denen Sie zumindest eine wahrscheinlich bereits kennen) anschreiben und besprechen. Alles Folgende wird auf ihnen beruhen.

1.1.1 Was Sie aus der Vektoranalysis wissen sollten

Wahrscheinlich haben Sie im Vorfeld Ihrer Ausbildung in theoretischer Physik einige mathematische Sachverhalte kennen gelernt, die Sie nun benötigen. Wir wollen der Übersicht halber gleich zu Beginn zusammenfassen, welche mathematischen Konzepte in der Elektrodynamik zur Anwendung kommen. Dabei wollen wir es hinsichtlich der mathematischen Strenge nicht übertreiben. Insbesondere werden wir die ausreichende Differenzierbarkeit von Funktionen, die wir differenzieren, und die Glattheit von Flächen und Kurven, über deren Normalvektoren und Richtungen wir sprechen, voraussetzen, ohne das jedes Mal dazuzusagen. Gleichzeitig legen wir damit die in diesem Kapitel verwendeten Bezeichnungs- und Schreibweisen fest.

Falls Sie mit den nun folgenden Dingen weniger vertraut sind, lassen Sie sich beruhigen: Die benötigten *Konzepte* und *Begriffe* werden im Folgenden in knappen Worten *definiert*. Schrecken Sie sich nicht davor – Definitionen sind einfach Namensgebungen! Lediglich die Kenntnis einiger elementarer Themen (Funktion, Vektor, Koordinaten und Ortsvektor, Skalarprodukt, Betrag eines Vektors, Vektorprodukt, gewöhnliche und partielle Ableitung) wird dabei als selbstverständlich vorausgesetzt. Nützlich ist es, wenn Sie ein bisschen über den Begriff des bestimmten Integrals wissen und den Hauptsatz der Differentialrechnung[1] kennen. Die Auflistung enthält auch einige mathematische *Aussagen*, von deren Gültigkeit man sich nur überzeugen kann, indem man sie *beweist*. Das betrifft vor allem die beiden Aussagen in (1.7) und den darauffolgenden Punkt sowie die beiden Integralsätze (1.13) und (1.14). Da wir aber deren Beweise nicht benötigen, ist es okay, wenn Sie sie einfach zur Kenntnis nehmen und akzeptieren, dass mit ihnen operiert wird. Indem wir diese spezielle Form der Mathematik – die *Vektoranalysis* – bei der Beschreibung elektromagnetischer Phänomene anwenden, werden Sie im Laufe der Zeit auch in der Lage sein, sie für sich zu einem logischen Ganzen zu ordnen.

- Ein **Vektorfeld** $\vec{u}$ liegt vor, wenn zu jedem Zeitpunkt t an jedem Raumpunkt $\vec{x}$ ein Vektor

[1] Es ist dies jene Regel, die es Ihnen erlaubt, Integrale überhaupt auszurechnen: Ist F eine Stammfunktion von f (d. h. $F'(x) = f(x)$), so gilt

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)\,, \tag{1.1}$$

was auch in der Form

$$\int_a^b dx\, F'(x) = F(b) - F(a) \qquad \text{für alle (differenzierbaren) Funktionen } F \tag{1.2}$$

ausgedrückt werden kann.

$\vec{u}(\vec{x},t)$ definiert ist[2]. Wir können das durch die Schreibweise $\vec{u} \equiv \vec{u}(\vec{x},t)$ ausdrücken. Ein Vektorfeld besteht aus 3 Funktionen, den Komponenten

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} u_x(\vec{x},t) \\ u_y(\vec{x},t) \\ u_z(\vec{x},t) \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

- Ein **skalares Feld** (kurz: **Skalarfeld**) ist[3] eine Funktion $f \equiv f(\vec{x},t)$.
- Zwei des Öfteren benötigte Operationen, die in Form von Kombinationen partieller Ableitungen auf Vektorfelder wirken, sind die **Divergenz** und die **Rotation**. Sie sind durch

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot}\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

  definiert. Beachten Sie, dass $\operatorname{div}\vec{u}$ ein Skalarfeld und $\operatorname{rot}\vec{u}$ ein Vektorfeld ist. Außerdem kann (komponentenweise) die partielle Zeitableitung

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial t} \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

  gebildet werden.
- Der **Gradient** eines Skalarfeldes f

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

  ist ein Vektorfeld und zeigt an jedem Raumpunkt in die Richtung, in die f am schnellsten zunimmt. Sein Betrag ist die räumliche Änderungsrate von f in diese Richtung.
- Für beliebige Vektorfelder $\vec{u}$ und Skalarfelder f gilt

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot}\vec{\nabla} f = 0. \tag{1.7}$$

- Die letzten beiden Aussagen besitzen Umkehrungen:

[2] Die Begriffe des Vektors und des Vektorfeldes werden im Abschnitt über das Transformationsverhalten von Feldern eine etwas andere Bedeutung erhalten. Für den größten Teil dieses Kapitels reicht es jedoch aus, sich einen Vektor als Liste von 3 Zahlen oder als Pfeil im Raum vorzustellen.

[3] Die Begriffe des Skalars und des Skalarfeldes werden im Abschnitt über das Transformationsverhalten von Feldern eine etwas andere Bedeutung erhalten. Für den größten Teil dieses Kapitels reicht es jedoch aus, unter einem Skalar eine Zahl und unter einem Skalarfeld eine Funktion zu verstehen.

– Gilt im gesamten Raum $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ für ein Vektorfeld $\vec{v}$, so gibt es ein Vektorfeld $\vec{u}$, so dass $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{u}$ ist. Kurzformel: Ein divergenzfreies Vektorfeld ist eine Rotation.
– Gilt im gesamten Raum $\operatorname{rot}\vec{w} = 0$ für ein Vektorfeld $\vec{w}$, so gibt es ein Skalarfeld f, so dass $\vec{w} = \vec{\nabla} f$ ist[4]. Kurzformel: Ein rotationsfreies Vektorfeld ist ein Gradient.

- Der **Laplace-Operator** ist durch
$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.8}$$
definiert[5], der **d'Alembert-Operator** (oder **Wellenoperator**) durch
$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\,, \tag{1.9}$$
wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.
- In der Elektrodynamik treten oft Raumbereiche, Flächen und Kurven auf, wobei mit den letzten beiden Begriffen „Flächen im Raum" und „Kurven im Raum" gemeint sind. Wir können in allen Anwendungen annehmen, dass sich die gewählten Raumbereiche, Flächen und Kurven mit der Zeit nicht ändern, und dass sich die Flächen und Kurven nicht selbst überschneiden. Wichtig sind in diesem Zusammenhang die Begriffe des **Randes** und der **Orientierung**.
  – Der *Rand eines Raumbereichs* ist seine Oberfläche (und damit eine geschlossene Fläche, deren Rand leer ist). Er kann aus mehreren nicht miteinander verbundenen Teilen bestehen (beispielsweise, falls das Raumgebiet eine Kugel ist, aus derem Inneren eine kleinere Kugel herausgenommen wurde). Der *Rand einer Fläche* ist seine Randkurve (und damit eine geschlossene Kurve, deren Rand leer ist). In allen Anwendungen können wir uns auf Flächen beschränken, die nur eine einzige Randkurve besitzen. Der Rand wird mit dem Symbol ∂ bezeichnet (was nicht mit dem identischen Symbol für die partielle Ableitung verwechselt werden sollte).
  – Die *Orientierung einer Fläche* legt – bildlich gesprochen – eine „Unterseite" und eine „Oberseite" fest. Sie wird durch die Wahl eines Einheits-Normalvektors $\vec{n}$ angegeben, wobei $\vec{n}$ von der „Unterseite" zur „Oberseite" weist. Handelt es sich um die Oberfläche eines Raumgebiets, so besteht die Konvention, $\vec{n}$ aus diesem heraus weisen zu lassen. Die *Orientierung einer Kurve* ist durch eine Richtung, in die sie durchlaufen wird, festgelegt. Das Symbol $d\vec{x}$ kann als Verbindungsvektor zweier infinitesimal benachbarter Kurvenpunkte verstanden werden, der in die Durchlaufrichtung weist. Die Orientierung der Randkurve einer Fläche wird mittels der Rechtsschraubenregel aus jener der Fläche ermittelt. (Denken Sie an eine Kreisscheibe: Wird eine Schraube im Umlaufssinn der Randkurve gedreht, so bewegt sie sich in die Richtung des Normalvektors).

[4] Diese Aussage ist Ihnen vielleicht aus der Mechanik in Erinnerung. Dort stellen zeitunabhängige Vektorfelder dieses Typs konservative Kräfte dar.

[5] Daher gilt $\triangle f = \operatorname{div}\vec{\nabla} f$.

- Ist f ein Skalarfeld und V ein Raumbereich, so können wir das **Volumsintegral** der Funktion f über den Bereich V

$$\int_V d^3x\, f(\vec{x},t)\,, \qquad \text{Kurzschreibweise:} \quad \int_V d^3x\, f \tag{1.10}$$

bilden. Bei einer feinen Aufteilung von V in kleine Stücke mit Volumsinhalt d^3x ist das Volumsintegral näherungsweise gleich der Summe aller $d^3x\,f$, wobei f an einem (beliebigen) Punkt des betreffenden Stücks zu nehmen ist. Wird die Aufteilung immer feiner gemacht, so konvertiert diese Summe gegen das Volumsintegral. Einige Methoden, Volumsintegrale zu berechnen, sind im Anhang beschrieben.

- Ist $\vec{u}$ ein Vektorfeld und S eine Fläche im Raum, so können wir das **Flächenintegral**

$$\int_S d\vec{A}\cdot\vec{u}(\vec{x},t)\,, \qquad \text{Kurzschreibweise:} \quad \int_S d\vec{A}\cdot\vec{u} \tag{1.11}$$

bilden. Für die Fläche muss durch die Wahl eines Einheits-Normalvektors $\vec{n}$ eine Orientierung festgelegt sein. Das vektorielle Flächenelement $d\vec{A}$ ist dann als $\vec{n}\,dA$ definiert, wobei dA (das skalare Flächenelement) als Flächeninhalt eines infinitesimal kleinen Stücks der Fläche angesehen werden kann. Bei einer feinen Aufteilung von A in derartige Stücke ist das Flächenintegral näherungsweise gleich der Summe aller $d\vec{A}\cdot\vec{u}$, wobei $\vec{u}$ an einem (beliebigen) Punkt des betreffenden Stücks zu nehmen ist. Wird die Aufteilung immer feiner gemacht, so konvertiert diese Summe gegen das Flächenintegral. Eine Umkehrung der Orientation der Fläche ändert das Vorzeichen des Integrals. Wir nennen (1.11) den **Fluss** des Vektorfeldes $\vec{u}$ durch die Fläche S. Ist S die Oberfläche ∂V eines Raumbereichs V (und damit eine *geschlossene* Fläche), so können wir das Integral auch den „Fluss des Vektorfeldes aus V" nennen. Flächenintegrale über geschlossene Flächen können auch mit dem Symbol $\oint$ angeschrieben werden. Wie Flächenintegrale in den einfachsten Situationen berechnet werden, ist im Anhang beschrieben.

- Ist $\vec{u}$ ein Vektorfeld und γ eine Kurve im Raum, so können wir das **Linienintegral**

$$\int_\gamma d\vec{x}\cdot\vec{u}(\vec{x},t)\,, \qquad \text{Kurzschreibweise:} \quad \int_\gamma d\vec{x}\cdot\vec{u} \tag{1.12}$$

bilden. Für die Kurve muss eine Orientierung (also eine Durchlaufrichtung) festgelegt sein. Bei einer feinen Aufteilung der Kurve in kurze Stücke kann sie als Abfolge von hintereinander in Durchlaufrichtung angeordneter Verbindungsvektoren $d\vec{x}$ approximiert werden. Das Linienintegral ist dann näherungsweise gleich der Summe aller $d\vec{x}\cdot\vec{u}$, wobei $\vec{u}$ an einem (beliebigen) Punkt des betreffenden Stücks zu nehmen ist. Wird die Aufteilung immer feiner gemacht, so konvertiert diese Summe gegen das Linienintegral. Eine Umkehrung der Orientation der Kurve ändert das Vorzeichen des Integrals. Ist γ eine *geschlossene Kurve*, so nennen wir (1.12) die **Zirkulation** des Vektorfeldes $\vec{u}$ entlang γ. Linienintegrale über geschlossene Kurven (*Ringintegrale*) können auch mit dem Symbol $\oint$ angeschrieben werden. Wie Linienintegrale berechnet werden, ist im Anhang beschrieben.

- Der **Gaußsche Integralsatz**: Für jedes Vektorfeld $\vec{u}$ und jedes Raumgebiet V gilt

$$\int_V d^3x \,\mathrm{div}\,\vec{u} = \oint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{u}\,. \tag{1.13}$$

  In Worten besagt der Gaußsche Integralsatz: Das Volumsintegral der Divergenz eines Vektorfeldes über den Raumbereich V ist gleich dem Fluss des Vektorfeldes durch die Randfläche (Oberfläche) ∂V. Die Orientierung der Randfläche ∂V ist durch einen aus V herausweisenden Einheits-Normalvektor $\vec{n}$ festgelegt.

- Der **Stokessche Integralsatz**: Für jedes Vektorfeld $\vec{u}$ und jede Fläche S gilt

$$\int_S d\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{u} = \oint_{\partial S} d\vec{x}\cdot\vec{u}\,. \tag{1.14}$$

  In Worten besagt der Stokessche Integralsatz: Das Flächenintegral der Rotation eines Vektorfeldes über die Fläche S ist gleich der Zirkulation des Vektorfeldes entlang der Randkurve ∂S. Die Orientierungen der Fläche S und ihrer Randkurve ∂S sind – wie oben beschrieben – entsprechend der Rechtsschraubenregel aufeinander abgestimmt.

- Noch ein letzter Punkt zum Umgang mit **Zeitableitungen** von Feldern: Da die partiellen Ableitungen $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ und $\partial/\partial t$ miteinander vertauscht werden können, kann eine Zeitableitung aus einer Divergenz, einer Rotation oder einem Gradienten herausgezogen werden. Hier ein Beispiel

$$\mathrm{div}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{u}\,. \tag{1.15}$$

  Ist der Integrand eines der obigen Integrale die partielle Zeitableitung einer Funktion oder eines Vektorfeldes, so kann die Operation „differenziere nach t" vor das Integral gezogen werden, da die Integrationsbereiche (Raumbereiche, Flächen und Kurven) wie bereits erwähnt in allen von uns betrachteten Situationen als zeitlich unveränderlich angenommen werden. Dadurch wird die partielle zu einer totalen Ableitung, da das Integral, auf das sie wirkt, nur von t abhängt (nicht aber von $\vec{x}$). Hier ein Beispiel:

$$\int_S d\vec{A}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \frac{d}{dt}\int_S d\vec{A}\cdot\vec{u}\,. \tag{1.16}$$

Die gute Nachricht ist: Damit kommen Sie durch! Falls Sie mehr über diese Konzepte und Sachverhalte lesen wollen als hier (und im Anhang) wiedergegeben ist, nehmen Sie einfach ein einschlägiges Lehrbuch über mathematische Methoden der Physik zur Hand[6]!

Vor allem: Haben Sie keine Angst vor Integralen! Wir werden sie in zweierlei Hinsicht nutzen: Bei der *allgemeinen* Darlegung der Theorie werden wir Volums-, Flächen- und Linienintegrale, die uns die physikalische Interpretation erleichtern, anschreiben und umformen (z. B.

[6] Eine Einführung in die Vektoranalysis finden Sie beispielsweise im Lehrbuch Franz Embacher: *Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik*, Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2011.

indem wir die Integralsätze anwenden), aber wir werden *keine komplizierten Berechnungen* durchführen! Wenn Sie ein Gefühl dafür haben, was die drei oben angegebenen Integraltypen bedeuten, wenn Sie die Integralsätze ganz allgemein („formal"), so wie sie oben angegeben sind, anwenden und elementare Umformungen ausführen können (etwa, dass das Integral einer Summe die Summe der Integrale ist), so reicht das aus, um die Theorie zu verstehen. Bei der Diskussion *konkreter* physikalische Situationen (z. B. wenn wir das von einer Punktladung erzeugte elektrische Feld berechnen) ist es hingegen nötig, derartige Integrale zu *berechnen*. Aber auch hier werden wir uns in der Hauptsache auf relativ einfache Situationen beschränken, die keine ausgeklügelten Integrationsmethoden benötigen. Einzelne Passagen und Aufgaben, die rechentechnisch ein bisschen schwieriger und für Lehramts-Studierende weniger relevant sind, sind mit einem oder zwei Sternchen (* oder **) gekennzeichnet.

1.1.2 Das elektromagnetische Feld

Im Zentrum der Elektrodynamik stehen zwei physikalische Felder: das **elektrische Feld**, das mit dem Symbol $\vec{E}$ bezeichnet wird, und das **Magnetfeld**, dem das Symbol $\vec{B}$ zugewiesen wird. Sie werden auch *elektrische Feldstärke* und *magnetische Flussdichte* (oder *magnetische Induktion*) genannt – Namen, die auf Eigenschaften zurückgehen, denen wir in diesem Kapitel begegnen werden. Wie die Vektorpfeilchen ausdrücken, handelt es sich dabei um Vektorfelder:

- Zu jedem Zeitpunkt t ist an jedem Raumpunkt $\vec{x}$ ein Vektor $\vec{E}(\vec{x},t)$ definiert.
- Zu jedem Zeitpunkt t ist an jedem Raumpunkt $\vec{x}$ ein Vektor $\vec{B}(\vec{x},t)$ definiert.

Die beiden Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bilden eine Einheit, die – wie sich zeigen wird – nicht auseinandergerissen werden kann. Sie werden daher gemeinsam als **das elektromagnetische Feld** bezeichnet. Die Elektrodynamik behandelt seine physikalischen Eigenschaften (wie sein Zustandekommen, seine Dynamik und seine Wirkung auf die Materie).

Ein wichtiger Kontrast zur Mechanik wird klar, wenn wir uns vor Augen halten, dass mechanische Systeme in der Regel durch eine endliche Anzahl reeller Freiheitsgrade charakterisiert sind, etwa bei der Beschreibung einer endlichen Anzahl von miteinander wechselwirkenden Teilchen. Dynamische Größen wie die Komponenten ihrer Ortsvektoren oder Geschwindigkeiten sind (klassisch betrachtet) Funktionen der Zeit t. Im Gegensatz dazu haben wir es in der Elektrodynamik mit *Feldern* (also Funktionen von $\vec{x}$ und t) zu tun, die gewissermaßen eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden repräsentieren. Wir nennen die Elektrodynamik daher eine **Feldtheorie**.

Wir werden uns im Folgenden fast ausschließlich auf die **klassische Elektrodynamik** beschränken[7], d. h. wir werden elektromagnetische Phänomene von einem Standpunkt betrachten, der die Quantentheorie nicht berücksichtigt: Das elektromagnetische Feld ist dann zu jedem Zeitpunkt t an jedem Raumpunkt $\vec{x}$ durch 6 reelle Zahlen $\vec{E}(\vec{x},t)$ und $\vec{B}(\vec{x},t)$ gegeben. Das ist in vielen Anwendungen eine zulässige Näherung. Soll der Quantencharakter des

[7] Ausnahmen sind die Abschnitte über Photonen und ihre Eigenschaften.

elektromagnetischen Feldes berücksichtigt werden, so muss, wie bereits erwähnt, die Quantenelektrodynamik herangezogen werden, in der an die Stelle der klassischen Felder Operatoren (so genannte Feldoperatoren) treten. Wir werden in diesem Buch lediglich einen der Grundgedanken dieser Theorie skizzieren, um das Konzept des Photons zu erläutern.

1.1.3 Ladungen und die Lorentzkraft

Das elektromagnetische Feld macht sich durch seine Wirkung auf elektrisch geladene Teilchen bemerkbar. Elektrische Ladungen kommen in der Natur nur als Vielfache der **Elementarladung**

$$e = 1.602176487 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{1.17}$$

vor. So besitzt jedes Elektron die elektrische Ladung $-e$, jedes Proton die elektrische Ladung e. Ein Neutron ist *elektrisch neutral* – seine elektrische Ladung ist gleich 0. Dabei sollte hinzugefügt werden, dass diejenigen Elementarteilchen, aus denen Protonen und Neutronen zusammengesetzt sind – die Quarks – Drittel-Ladungen besitzen, also $\pm e/3$ und $\pm 2e/3$. Da Quarks aber nicht als Einzelstücke vorkommen, ist die elektrische Ladung jedes Teilchens, dessen Bewegung wir verfolgen können, und jedes Stücks Materie, das für die klassische Elektrodynamik relevant ist, ein ganzzahliges Vielfaches von e.

Das erste, was man über Ladungen üblicherweise im Physikunterricht erfährt, ist, dass sich gleichnamige Ladungen (also Ladungen gleichen Vorzeichens) abstoßen und ungleichnamige Ladungen (also Ladungen ungleichen Vorzeichens) anziehen. In der Elektrodynamik werden diese Kräfte (wie auch andere Kräfte, die geladene Teilchen erfahren) auf die Vermittlung durch das elektromagnetische Feld zurückgeführt. Unsere erste Grundgleichung beschreibt, wie sich das elektromagnetische Feld auf geladene Teilchen auswirkt:

Besitzt ein Teilchen der Masse m die Ladung q, so erfährt es eine durch das elektromagnetische Feld verursachte Kraft, die so genannte **Lorentzkraft**[8]. Wirkt keine weitere Kraft auf das Teilchen, so wird seine Bewegung durch die Beziehung

$$\frac{d}{dt}\,\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} = q\left(\vec{E}(\vec{x},t) + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}(\vec{x},t)\right) \tag{1.18}$$

beschrieben. Diese Bewegungsgleichung gilt auch für schnelle Teilchen, da in ihr die Spezielle Relativitätstheorie automatisch berücksichtigt ist[9]. Für Teilchen, deren Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit

$$c = 2.99792458 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s} \tag{1.19}$$

sind, reduziert sich (1.18) auf die nichtrelativistische Näherung

$$m\ddot{\vec{x}} = q\left(\vec{E}(\vec{x},t) + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}(\vec{x},t)\right), \tag{1.20}$$

[8] Wir sind ihr bereits im ersten Band dieser Lehrbuchreihe des Öfteren begegnet.

[9] Siehe dazu das Kapitel über die Spezielle Relativitätstheorie im ersten Band. Wie die linke Seite von (1.18) unschwer erkennen lässt, bezeichnen wir mit m die *Ruhemasse* des Teilchens.

die das zweite Newtonsche Axiom („Masse mal Beschleunigung ist gleich Lorentzkraft“) ausdrückt. Sind die Felder $\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{x},t)$ und $\vec{B} \equiv \vec{B}(\vec{x},t)$ bekannt, so handelt es sich bei (1.18) und (1.20) jeweils um ein System von Differentialgleichungen für die drei Funktionen $\vec{x} \equiv \vec{x}(t)$, die – sofern die Anfangsdaten $\vec{x}(0)$ und $\dot{\vec{x}}(0)$ gegeben sind – bestimmen, an welchem Ort das Teilchen zu einer gegebenen Zeit t ist[10].

Zwei Spezialfälle sind von Bedeutung:

- In einem rein elektrischen Feld (also mit $\vec{B}(\vec{x},t) = 0$) reduziert sich die rechte Seite von (1.18) und (1.20) auf $q\vec{E}(\vec{x},t)$, also auf das Produkt von Ladung und elektrischem Feld. Das elektrische Feld ist in dieser Situation daher nichts anderes als die „Kraft pro Ladung“ (oder, anders ausgedrückt, die „Kraft auf ein Teilchen mit Ladung $q = 1$“). Daher rührt die Bezeichnung *elektrische Feldstärke*. Die Richtung, in die die Kraft wirkt, ist genau die Richtung von $\vec{E}(\vec{x},t)$ (für $q > 0$) oder $-\vec{E}(\vec{x},t)$ (für $q < 0$).

- In einem reinen Magnetfeld (also mit $\vec{E}(\vec{x},t) = 0$) hängt die rechte Seite von (1.18) und (1.20) nicht nur vom Ort, sondern auch von der Geschwindigkeit des Teilchens ab. Die von einem Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x},t)$ auf ein geladenes Teichen ausgeübte Kraft wirkt *nicht* in die Richtung von $\vec{B}(\vec{x},t)$, sondern in eine Richtung, die (entsprechend der Definition des Vektorprodukts $\times$) auf $\vec{B}(\vec{x},t)$ und auf die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$ normal steht.

1.1.4 Ladungsdichte und Stromdichte

Die wichtigsten Ladungsträger in der Materie, die uns umgibt, und aus der wir selbst bestehen, sind (negativ geladene) Elektronen und (positiv geladene) Atomkerne. Liegt in einem makroskopischen Körper ein Elektronenüberschuss oder ein Elektronenmangel vor, so besitzt er eine nicht-verschwindene elektrische *Nettoladung*, die meist aus einer großen Anzahl von Elementarladungen besteht. Die Ladungsverteilung kann dann mittels einer kontinuierlichen Näherung beschrieben werden. Dazu dient das Konzept der **elektrischen Ladungsdichte**, die wir mit $\rho \equiv \rho(\vec{x},t)$ bezeichnen. Sie ist dadurch definiert, dass in jedem (infinitesimal kleinen) Raumgebiet vom Volumsinhalt d^3x, das sich beim Punkt $\vec{x}$ befindet, die Ladung

$$d^3x\,\rho(\vec{x},t) \tag{1.22}$$

enthalten ist. Wie angedeutet, kann die Ladungsdichte vom Ort und von der Zeit abhängen, und sie muss kein einheitliches Vorzeichen haben. In ladungsfreien Gebieten wird $\rho = 0$ gesetzt. Die zu einer gegebenen Zeit t in einem beliebigen Raumgebiet V enthaltene elektrische

[10] Um das zu unterstreichen, können wir (1.18) und (1.20) auch ausführlicher in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{\vec{x}}(t)}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}(t)^2}{c^2}}} = q\left(\vec{E}(\vec{x}(t),t) + \dot{\vec{x}}(t)\times\vec{B}(\vec{x}(t),t)\right) \quad \text{bzw.} \quad m\ddot{\vec{x}}(t) = q\left(\vec{E}(\vec{x}(t),t) + \dot{\vec{x}}(t)\times\vec{B}(\vec{x}(t),t)\right) \tag{1.21}$$

anschreiben. Es ist nicht immer leicht, derartige Differentialgleichungssysteme zu lösen, aber wenn Ihnen jemand konkrete Beispiele für die Felder $\vec{E}(\vec{x},t)$ und $\vec{B}(\vec{x},t)$ sowie für die Teilchenbewegung $\vec{x}(t)$ mitteilt, ist es eine einfache Übung in Differenzieren, ihre Gültigkeit zu überprüfen.

Gesamtladung ist dann durch das Volumsintegral

$$Q(t) = \int_V d^3x\,\rho(\vec{x},t) \tag{1.23}$$

gegeben. Für *kleine* Raumgebiete (in denen ρ als räumlich konstant angesehen werden kann) gilt wegen (1.22) die – Ihnen wahrscheinlich bekannte – Kurzformel „Ladungsdichte = Ladung/Volumen". Ist ρ räumlich nicht konstant, so verliert diese vereinfachte Beziehung für größere Raumgebiete ihre Bedeutung und muss durch (1.23) ersetzt werden.

Manchmal ist die Ladungsdichte auf der Oberfläche eines Körpers konzentriert. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn sich Ladungsträger innerhalb des Körpers frei bewegen können und unter dem Einfluss ihrer Abstoßungskräfte von selbst an seiner Oberfläche anordnen. In diesem Fall sprechen wir von einer **Flächenladungsdichte**.

Werden *sehr kleine* geladene Körper oder geladene Elementarteilchen betrachtet, so ist das Konzept der **Punktladung** hilfreich. Es beschreibt die (idealisierte) Situation, dass eine bestimmte Ladung in einem einzigen Punkt konzentriert ist.

Exkurs*

Die Ladungsdichte einer Punktladung:
Kann einem an einem Punkt $\vec{a}$ ruhenden Punktteilchen der Ladung Q eine Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ zugeordnet werden? Im Rahmen der gewöhnlichen Funktionen muss diese Frage verneint werden, denn $\rho(\vec{x})$ müsste ja an allen Punkten $\vec{x} \neq \vec{a}$ verschwinden und dafür an der Stelle $\vec{x} = \vec{a}$ unendlich (oder minus unendlich) sein. Glücklicherweise stellt uns die mathematische Theorie der *Distributionen* (oder *verallgemeinerten Funktionen*) ein Objekt zur Verfügung, das in formaler Hinsicht die gewünschten Eigenschaften besitzt, und mit dem in wohldefinierter Weise gerechnet werden kann. Im Anhang können Sie ein bisschen über Distributionen lesen, falls Sie noch keine Bekanntschaft mit ihnen gemacht haben. Die Ladungsdichte unserer Punktladung wird durch

$$\rho(\vec{x}) = Q\,\delta^3(\vec{x}-\vec{a}) \tag{1.24}$$

beschrieben, wobei δ^3 die dreidimensionale *Diracsche Deltafunktion* ist. (Eigentlich sollte man sie *Delta-Distribution* nennen, da sie eben *keine* Funktion ist, aber der Ausdruck „Deltafunktion" hat sich eingebürgert). Formal ist $\delta^3(\vec{x}-\vec{a}) = 0$ für $\vec{x} \neq \vec{a}$ und $\delta^3(0) = \infty$, aber letzteres wird in der Praxis gar nicht benötigt. Wichtiger ist die Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\,\delta^3(\vec{x}-\vec{a}) = 1\,, \tag{1.25}$$

die sofort

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\,\rho(\vec{x}) = Q \tag{1.26}$$

zur Folge hat. Als Faustregel gilt: Mit der Deltafunktion kann man alles Mögliche anstellen (mit stetigen Funktionen multiplizieren, integrieren, sogar differenzieren

– einige dieser Themen werden im Anhang angeschnitten), aber eines muss man vermeiden: sie zu quadrieren. Dann kann fast nichts schiefgehen! Insbesondere gilt für jedes Raumgebiet V, in dessen Innerem der Punkt $\vec{a}$ liegt,

$$\int_V d^3x\,\rho(\vec{x}) = Q\,, \tag{1.27}$$

und für jedes Raumgebiet V, in dem der Punkt $\vec{a}$ nicht enthalten ist (wobei wir zusätzlich verlangen, dass der Punkt $\vec{a}$ auch nicht am Rand von V liegt),

$$\int_V d^3x\,\rho(\vec{x}) = 0\,. \tag{1.28}$$

Die Beziehungen (1.27) und (1.28) drücken aus, dass (1.24) tatsächlich eine Punktladung beschreibt.

In der Elektrodynamik sind auch *bewegte Ladungen* von Bedeutung. Die durch eine gegebene Fläche pro Zeitintervall hindurchtretende elektrische (Netto-)Ladung wird als **elektrischer Strom** bezeichnet. Da Bewegungen in verschiedene Richtungen erfolgen können, und da Flächen beliebig im Raum ausgerichtet sein können, benötigen wir zur Beschreibung von *Ladungsflüssen* Vektoren. Ein infinitesimales Flächenelement können wir uns als Bereich auf einer glatten Fläche vorstellen, dessen Flächeninhalt durch dA gegeben ist, und das so klein ist, dass es als Stück einer Ebene angesehen werden kann. Es besitzt daher einen wohldefinierten Einheits-Normalvektor $\vec{n}$. Der infinitesimale Vektor $d\vec{A} = \vec{n}\,dA$ (das vektorielle Flächenelement) charakterisiert dann sowohl den Flächeninhalt als auch die Ausrichtung im Raum, und zudem wird durch die Richtung von $\vec{n}$ eine Orientierung des Flächenelements (eine Unterscheidung zwischen einer „Unterseite" und einer „Oberseite") festgelegt: $\vec{n}$ weist von der „Unterseite" zur „Oberseite". Ein Ladungsfluss wird nun in der kontinuierlichen Näherung mit Hilfe eines Vektorfeldes $\vec{j} \equiv \vec{j}(\vec{x},t)$ beschrieben, dem **Stromdichtevektor**. Er ist dadurch definiert, dass der elektrische Strom durch eine infinitesimale Fläche mit vektoriellem Flächenelement $d\vec{A}$, die sich beim Punkt $\vec{x}$ befindet, gleich

$$d\vec{A}\cdot\vec{j}(\vec{x},t) \tag{1.29}$$

ist. Ist diese Größe positiv, so fließt eine positive (Netto-)Ladung von der „Unterseite" zur „Oberseite" bzw. negative Ladung in die umgekehrte Richtung. (Aus der Kenntnis des Stromdichtevektors alleine lassen sich diese beiden Fälle nicht unterscheiden). Der zu einer gegebenen Zeit t durch eine Fläche S fließende elektrische Strom ist dann durch das Flächenintegral

$$I(t) = \int_S d\vec{A}\cdot\vec{j}(\vec{x},t) \tag{1.30}$$

gegeben (das ja nichts anderes als die Aufsummierung der Größen (1.29) im Grenzfall einer unendlich feinen Parzellierung der Fläche darstellt). Kommt ein Ladungsfluss durch die Bewegung eines Schwarms von Ladungen zustande, die eine Ladungsdichte $\rho(\vec{x},t)$ bilden und sich gemäß einem kontinuierlichen Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x},t)$ bewegen, so ist der Stromdichtevektor durch

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \rho(\vec{x},t)\,\vec{v}(\vec{x},t) \tag{1.31}$$

gegeben[11]. Beachten Sie aber in diesem Zusammenhang, dass die Ladungsdichte in einem elektrisch neutralen stromdurchflossenen Leiter (sofern man nicht so genau hinschaut, um die einzelnen Ladungsträger zu sehen) gleich 0 ist, da sich in ihm zwar die Elektronen bewegen (was den Strom ausmacht), aber jedes Volumselement gleich viel positive wie negative Ladung enthält. In dieser Situation ist also $\vec{j} \neq 0$ und $\rho = 0$.

Die Ladungsdichte ρ und der Stromdichtevektor $\vec{j}$ beschreiben jene Aspekte der elektrischen Ladung, die als Quellen des elektromagnetischen Feldes auftreten.

1.1.5 Die Maxwell-Gleichungen

Wir kommen nun zu den verbleibenden vier Grundgleichungen, die das Zustandekommen und die Dynamik des elektromagnetischen Feldes beschreiben und zusammen mit der Lorentzkraft (1.18) das Fundament der Elektrodynamik bilden: die **Maxwell-Gleichungen**, ein System von partiellen Differentialgleichungen für das elektrische Feld $\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{x},t)$ und das Magnetfeld $\vec{B} \equiv \vec{B}(\vec{x},t)$, in das zudem die Ladungsdichte $\rho \equiv \rho(\vec{x},t)$ und der Stromdichtevektor $\vec{j} \equiv \vec{j}(\vec{x},t)$ eingehen[12]. Sie lauten:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{1.32}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{1.33}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1.34}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{1.35}$$

Die dabei auftretenden Konstanten ε_0 (die *elektrische Feldkonstante*[13]) und μ_0 (die *magnetische Feldkonstante*[14]) sind im SI-Einheitensystem durch

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{N\,s^2/C^2} \tag{1.36}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0\,c^2} = 8.85418781762\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\,m^2)} \tag{1.37}$$

definiert[15]. Was es mit dem Auftreten der Lichtgeschwindigkeit in (1.37) auf sich hat, wird sich im Abschnitt über elektromagnetische Wellen erweisen. Die Operationen div (Divergenz) und rot (Rotation) sind in (1.4) definiert.

[11] Ein ähnliche Situation besteht in der Hydrodynamik: Beschreibt $\rho(\vec{x},t)$ die Massendichte einer mit Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{x},t)$ strömenden Flüssigkeit, so ist $\vec{j}(\vec{x},t) = \rho(\vec{x},t)\,\vec{v}(\vec{x},t)$ die Massenstromdichte. Das Integral (1.30) gibt dann den Massenstrom an, d. h. die Masse, die pro Zeiteinheit durch die Fläche S hindurchtritt.

[12] Um Formeln nicht zu überladen, werden wir im Folgenden die Variablen $(\vec{x},t)$, von denen die verschiedenen Größen abhängen, nicht immer eigens anschreiben. Halten Sie sich diese Abhängigkeiten aber bitte immer vor Augen!

[13] Andere Bezeichnungen dafür sind *Permittivität des Vakuums* oder *Dielektrizitätskonstante des Vakuums*.

[14] Eine andere Bezeichnung dafür ist *magnetische Permeabilität des Vakuums*.

[15] Sie verdanken ihre numerischen Werte der Wahl der Einheiten für $\vec{E}$, $\vec{B}$ und die elektrische Ladung. Da hier eine gewisse Freiheit besteht, gibt es zahlreiche Einheitensysteme für elektromagnetische Größen und

Das also sind die berühmten Maxwell-Gleichungen. Sie setzen das elektrische und das magnetische Feld zur Ladung und ihrer Bewegung in Beziehung, und sie beschreiben auch eine Verwebung der beiden Felder untereinander: Ändert sich das Magnetfeld mit der Zeit (d. h. gilt $\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$), so kann aufgrund von (1.34) das elektrische Feld nicht verschwinden, und ändert sich das elektrische Feld mit der Zeit (d. h. gilt $\partial\vec{E}/\partial t \neq 0$), so beeinflusst dies über (1.35) das Magnetfeld. Im materiefreien Raum (wo $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$ gilt) wird zudem eine fast perfekte Symmetrie der beiden Felder sichtbar. Bereits der erste Blick auf die Maxwellgleichungen offenbart also, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zusammengehören und zu Recht als *ein* Feld (das sich aus zwei Vektorfeldern zusammensetzt) betrachtet werden. Ludwig Boltzmann, der gemeinsam mit eben jenem James Clerk Maxwell als Begründer der statistischen Physik gilt, und dessen Werk uns im zweiten Kapitel dieses Bands begegnen wird, würdigte die Maxwellgleichungen mit dem abgewandelten Faust-Zitat „*War es ein Gott, der diese Zeilen schrieb...?*“ [16]. Wir werden sie als Grundlage für unser weiteres Vorgehen nehmen, ihre Struktur besprechen und aus ihnen die wichtigsten Phänomene des Elektromagnetismus (zu dem auch die Optik zählt) ableiten.

1.1.6 Ladungserhaltung

Sehen wir uns die Struktur der Maxwellgleichungen (1.32) – (1.35) an: Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gehen in sie in differenzierter Form ein, die Ladungsdichte ρ und der Stromdichtevektor $\vec{j}$ ohne Ableitung. Als einfachste Möglichkeit, sie zu betrachten, nehmen wir an, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bekannt sind. Sind die Gleichungen (1.33) und (1.34), in denen ρ und $\vec{j}$ nicht vorkommen, erfüllt, so können wir die beiden anderen dazu benutzen, um ρ und $\vec{j}$ zu berechnen. Ladungsdichte und Stromdichte sind durch das elektromagnetische Feld eindeutig bestimmt. In realistischen Situationen liegen die Dinge aber meist genau anders herum: Mit Hilfe experimenteller Aparaturen oder technischer Vorrichtungen (zu denen auch die Kraftwerke zählen, aus denen wir „den Strom“ beziehen) manipulieren wir die Materie und *erzeugen* elektromagnetische Felder – die Vorstellung, dadurch ρ und $\vec{j}$ vorzugeben, kommt der Wirklichkeit also näher. Sind ρ und $\vec{j}$ bekannt, so stellen die Maxwellgleichungen ein System partieller Differentialgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ dar.

Beziehungen. Beispielsweise können Sie ins Gaußsche Einheitensystem wechseln, indem Sie $\varepsilon_0 = 1/(4\pi)$ und $\mu_0 = 4\pi/c^2$ setzen. Siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetische_Maßeinheiten` für einen Überblick.

[16] Ludwig Boltzmann (*Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichts*, 1893):
War es ein Gott, der diese Zeilen schrieb,
die mit geheimnisvoll verborgnem Trieb
die Kräfte der Natur um mich enthüllten
und mir das Herz mit stiller Freude füllten?
Johann Wolfgang von Goethe (*Faust I, Nacht*, 1808):
War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb,
Die mir das innre Toben stillen,
Das arme Herz mit Freude füllen,
Und mit geheimnisvollem Trieb
Die Kräfte der Natur rings um mich her enthüllen?

Untersucht man diese Situation genauer, so ergibt sich eine interessante Einschränkung: ρ und $\vec{j}$ können nicht beliebig vorgegeben werden! Das ist leicht einzusehen, indem wir beide Seite von (1.32) mit ε_0 multiplizieren und partiell nach der Zeit ableiten: Wir erhalten

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \,\mathrm{div}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,, \tag{1.38}$$

da die partielle Zeitableitung mit den in div enthaltenen räumlichen partiellen Ableitungen vertauscht werden kann. Mittels (1.35) können wir nun $\partial\vec{E}/\partial t$ durch $\vec{j}$ und $\mathrm{rot}\vec{B}$ ausdrücken und in (1.38) einsetzen:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\vec{B}}_{0}\,. \tag{1.39}$$

Der letzte Term verschwindet, da die Divergenz einer Rotation immer gleich 0 ist (siehe (1.7)). Die verbleibende Beziehung schreiben wir in der Form

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0\,. \tag{1.40}$$

Sie heißt **Kontinuitätsgleichung**. Was besagt sie? Eine mächtige Methode, Fragen dieser Art zu beantworten, geben uns die Integralsätze der Vektoranalysis – siehe (1.13) und (1.14) – in die Hand. Betrachten wir ein beliebiges Raumgebiet V und bilden das Volumsintegral über (1.40):

$$\int_V d^3x\,\frac{\partial\rho}{\partial t} + \int_V d^3x\,\mathrm{div}\,\vec{j} = 0\,. \tag{1.41}$$

Aus dem ersten Term ziehen wir die partielle Zeitableitung vor das Integral (was zulässig ist, wenn sich das Raumgebiet mit der Zeit nicht ändert). Der zweite Term kann mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes zu einem Oberflächenintegral umgeformt werden. Damit ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\,\rho + \oint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{j} = 0\,, \tag{1.42}$$

wobei ∂V den Rand (die Oberfläche) von V bezeichnet und das Symbol $\oint$ anzeigt, dass das Integral über eine *geschlossene* Fläche genommen wird. Das vektorielle Flächenelement $d\vec{A}$ ist so orientiert, dass es aus dem Raumgebiet herausweist. Die partielle Zeitableitung hat sich in eine totale Zeitableitung verwandelt, da das nach ihr stehende Integral nur mehr von t abhängt. Die so gewonnene Beziehung können wir nun leicht physikalisch interpretieren: Der erste Term ist die zeitliche Änderungsrate der in V enthaltenen elektrischen Gesamtladung $Q_{\mathsf{in}\,V}$ (vgl. (1.23)). Der zweite Term ist der aus V heraus fließende elektrische Strom $I_{\mathsf{aus}\,V}$ (vgl. (1.30)). Wir können also schreiben

$$\frac{dQ_{\mathsf{in}\,V}}{dt} = -I_{\mathsf{aus}\,V}\,, \tag{1.43}$$

was nichts anderes ausdrückt, als dass jede Änderung der in V enthaltenen Ladung von einem entsprechenden Ladungsfluss durch die Randfläche von V genau ausgeglichen werden muss.

Wichtig ist, dass dies für *jedes* Raumgebiet V gilt. Elektrische Ladung (genauer: elektrische Nettoladung) kann nicht verschwinden oder aus dem Nichts entstehen – sie kann lediglich verschoben werden! Dies steht nicht im Widerspruch zur Erzeugung und Vernichtung geladener Elementarteilchen, wie sie die Teilchenphysik kennt. Wenn etwa ein neutrales Teilchen in zwei Teilchen zerfällt, von denen eines positiv und das andere negativ geladen ist, so hat sich damit die Nettoladung in einem Raumgebiet, in dem sich beide befinden, nicht geändert[17].

Die Kontinuitätsgleichung (1.40) drückt daher die **Ladungserhaltung** aus[18]. Beachten Sie, dass wir sie nicht eigens postulieren mussten – sie ist eine Konsequenz der Maxwell-Gleichungen. Erfüllen ρ und $\vec{j}$ diese Bedingung, so besitzen die Maxwellgleichungen immer Lösungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

1.1.7 Die Maxwell-Gleichungen in Integralform und was sie aussagen

Um die Bedeutung der einzelnen Maxwellgleichungen zu erschließen, formulieren wir sie mit Hilfe der Integralsätze (1.13) und (1.14) um – eine Methode, die uns bereits geholfen hat, die Bedeutung der Kontinuitätsgleichung (1.40) aufzuklären.

Die Maxwellgleichung $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ in Integralform

Wir bezeichnen mit V ein beliebiges (zeitlich festgehaltenes) Raumgebiet und bilden das Volumsintegral über beide Seiten der Maxwellgleichung (1.32), die auch **Gaußsches Gesetz** genannt wird:

$$\int_V d^3x \operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3x\, \rho\,. \tag{1.44}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist wegen (1.23) gleich der in V enthaltenen Ladung $Q_{\mathsf{in}\,V}$. Die linke Seite formen wir mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in ein Oberflächenintegral über die Randfläche ∂V um. Wir erhalten

$$\oint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\mathsf{in}\,V}\,, \tag{1.45}$$

wobei vereinbarungsgemäß $d\vec{A}$ nach außen weist. Das ist die Maxwellgleichung (1.32) in Integralform. Wichtig ist, dass sie für *beliebige* Raumgebiete V gilt. Was besagt sie? Wie wir sehen, ist die in einem Raumgebiet V enthaltene Ladung eindeutig durch die Werte des elektrischen Feldes auf der Oberfläche ∂V bestimmt. Ist $Q_{\mathsf{in}\,V} > 0$, so drückt diese Gleichung die Tendenz des Vektorfeldes $\vec{E}$ aus, auf der Oberfläche von V „eher nach außen als nach innen" zu zeigen. Ist $Q_{\mathsf{in}\,V} < 0$, so drückt sie die Tendenz von $\vec{E}$ aus, „eher nach innen als

[17] Unsere Beobachtungen (auch weit entfernter Bereiche des Universums) legen nahe, dass die Nettoladung des gesamten Universums gleich 0 ist, d. h. dass es gleich viele positive wie negative Ladungsträger gibt.

[18] Erhaltungsgleichungen dieser Form spielen auch in anderen Gebieten der Physik eine Rolle. So drückt etwa die Kontiniutätsgleichung für die Massendichte und die Massenstromdichte in der Hydrodynamik – vgl. Fußnote 11 auf Seite 13 – die Erhaltung der Masse aus.

nach außen“ zu zeigen[19]. Mathematisch hat das Integral die gleiche Struktur wie (1.30), nur dass es jetzt über eine geschlossene Fläche genommen wird und $\vec{j}$ durch $\vec{E}$ ersetzt ist. Auch der Massenstrom einer Flüssigkeit kann durch ein analoges Oberflächenintegral ausgedrückt werden (vgl. Fußnote 11 auf Seite 13). Um die Vorstellung, dass ein solches Integral etwas „Fließendes“ oder „Strömendes“ misst, beibehalten zu können, nennen wir die linke Seite von (1.45) den **elektrischen Fluss**[20] durch die Randfläche ∂V. Er ist proportional zu der in V enthaltenen Ladung.

Ein nützliches Hilfmittel, um sich diese Situation besser vorstellen zu können, bietet das Konzept der **elektrischen Feldlinien** (oder **Flusslinien**). Ein elektrische Feldlinie ist eine Kurve, die (zu einer gegebenen Zeit) in jedem ihrer Punkte in die Richtung von $\vec{E}$ weist. Gleichung (1.45) besagt, ein bisschen salopp formuliert, dass die Tendenz der Feldlinien, eher aus V heraus zu „strömen“ als in V hinein, proportional zu der in V enthaltenen Ladung ist. Für $Q_{\mathsf{in}\,V} < 0$ hieße das, dass die Feldlinien dazu tendieren, in V hinein zu fließen. Dieses Bild wird unterstützt von der intuitiven Vorstellung, dass die elektrischen Feldlinien „von positiven Ladungen ausgehen und in negativen Ladungen enden“. Im Fall einer kontinuierlichen Ladungsverteilung dürfen wir diese Vorstellung nicht allzu ernst nehmen, denn dann ist das Vektorfeld $\vec{E}$ im ganzen Raum wohldefiniert, und es kann durchaus überall $\vec{E} \neq 0$ gelten. In einem solchen Fall kann keine individuelle Feldlinie irgendwo beginnen oder enden, denn sie kann von jedem mutmaßlichen Anfangs- oder Endpunkt aus weiter fortgesetzt werden. Im Fall von Punktladungen aber werden wir sehen, dass das Bild von den in positiven Ladungen entspringenden und in negativen Ladungen endenden Feldlinien recht gut zutrifft[21]. In diesem Sinne sagen wir, dass elektrische Ladungen die **Quellen** für das elektrische Feld

---

[19] Erinnern wir uns, dass das vektorielle Flächenelement $d\vec{A}$ als $\vec{n}\,dA$ verstanden werden kann, wobei dA den Inhalt einer infinitesimal kleinen Fläche repräsentiert und $\vec{n}$ der aus V heraus weisende Einheits-Normalvektor auf die Randfäche ist. Denken wir uns die Randfläche in viele kleine Flächenelemente vom Inhalt dA zerlegt, so können wir das Oberflächenintegral näherungsweise als Summe aller Skalarprodukte $\vec{n}\cdot\vec{E}$ (multipliziert mit dA) darstellen. Nun ist aber $\vec{n}\cdot\vec{E}$ nichts anderes als $|\vec{E}|\cos\alpha$, wobei α der von $\vec{n}$ und $\vec{E}$ eingeschlossene Winkel ist. Es ist positiv, wenn α ein spitzer Winkel ist (also $\vec{E}$ an der betreffenden Stelle aus V heraus weist) und negativ, wenn α ein stumpfer Winkel ist (also $\vec{E}$ an der betreffenden Stelle in V hinein weist). Es gilt dann dann

$$\oint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{E} \;\approx\; dA\sum_j |\vec{E}_j|\cos\alpha_j\,, \tag{1.46}$$

wobei der Index j die Flächenelemente durchnummeriert. Lassen wir den Betrag $|\vec{E}_j|$ des elektrischen Feldes im j-ten Flächenelement als „Gewicht“ gelten, wie stark der jeweilige Term in der Summe beiträgt, so stellt sie – je nach ihrem Vorzeichen – die Netto-Tendenz von $\vec{E}$ dar, eher aus V heraus oder in V hinein zu zeigen. Je kleiner dA gewählt wird (also je feiner die Randfläche ∂V parzelliert wird), umso genauer gilt (1.46).

[20] Nach der auf Seite 6 vereinbarten Terminologie ist der elektrische Fluss durch die Randfläche der „Fluss des Vektorfeldes $\vec{E}$“ durch diese Fläche. Wir werden später die Bezeichnung „elektrischer Fluss“ auch für Flächen verwenden, die nicht Oberfläche eines Raumbereichs sind – siehe (1.57).

[21] Falls eine zeitunabhängige Ladungsverteilung so modelliert wird, dass ihre Nettoladung ungleich 0 ist, so laufen die überzähligen Feldlinien ins Unendliche bzw. kommen von dort. In der realen Welt würden sie irgendwo „weit draußen“ schließlich doch wieder auf eine Ladung treffen, aber diese schieben wir – etwa wenn ein einzelner geladener Körper betrachtet wird – so weit weg, dass sie im Modell gar nicht mehr aufscheint.

sind (wobei man sie im Fall negativer Ladungen auch **Senken** nennen kann) oder dass **elektrische Ladungen das elektrische Feld erzeugen**. Die durch dividierte ε_0 Ladungsdichte, also die Größe $\operatorname{div}\vec{E}$, wird daher auch als **Quellstärke** des elektrischen Feldes bezeichnet. Sie ist gewissermalen die „lokale“ Version des elektrischen Flusses aus einem Raumgebiet. Aber Achtung: Unsere Betrachtungen schließen nicht aus, dass das elektrische Feld (auch) geschlossene Feldlinien besitzt. Wir werden tatsächlich Situationen kennen lernen, in denen das der Fall ist.

Exkurs

Wie sage ich's im Physikunterricht?

Vielleicht werden Sie jetzt überrascht sein, dass sich die Maxwellgleichung (1.32) in ihrer integrierten Form (1.45) in vielen Physik-Schulbüchern findet. Bevor Sie weiterlesen, blättern Sie in ihrem Physikbuch, um sie zu finden!

Es könnte sein, dass Sie auf eine Beziehung stoßen, die so ähnlich wie

$$\Phi = \frac{Q_{\text{in}\,V}}{\varepsilon_0} \tag{1.47}$$

aussieht, wobei Φ den elektrischen Fluss durch die Oberfäche von V bezeichnet – was nichts anderes als die linke Seite von (1.45) ist! Diese Beziehung ist insofern eine Hürde für SchülerInnen, als sie in der Regel ganz zu Beginn des Kapitels über das elektrische Feld steht (wie auch immer dieses im Einzelnen übertitelt ist) und – sofern bereits eine Grundvorstellung über die elektrische Ladung vorhanden ist – mit Φ und ε_0 gleich *zwei* neue, wenig anschauliche Größen einführt. Falls Sie das Lehramt anstreben, sollten Sie gut darauf vorbereitet sein, wichtige Dinge gegenüber weniger wichtigen hervorzuheben. Zu den weniger wichtigen Dingen zählt hier das Auftreten von ε_0, einer Konstante, deren Wert von der Einheitenwahl herrührt. Wichtig hingegen ist die Proportionalität des elektrischen Flusses aus einem Raumgebiet zu der in diesem Gebiet enthaltenen elektrischen Ladung, denn dieses Gesetz beschreibt, *wie Ladungen das Feld erzeugen*.

Eine zwar physikalisch zwar nicht lupenreine, aber dennoch nützliche Hilfsvorstellung, um (1.45) bzw. (1.47) fassen zu können, besteht darin, gedanklich jeder positiven Elementarladung zu erlauben, eine Feldlinie in den Raum zu schicken, und jeder negativen Elementarladung, eine Feldlinie zu verschlucken. Für typische in der makroskopischen Welt auftretende Ladungsmengen erhalten wir auf diese Weise ein große Zahl von Feldlinien, die zudem so zusammenspielen sollen, dass sie dort enger beieinander liegen, wo der Betrag $|\vec{E}|$ groß ist, und weiter auseinander, wo $|\vec{E}|$ klein ist. In diesem Szenario gibt die Richtung der Feldlinien die Richtung des elektrischen Feldes an, und ihre „Dichte“ ist ein Maß für dessen Betrag. Die Maxwellgleichung (1.45) bzw. (1.47) kann dann so gedeutet werden, dass die „Zahl der aus V herauslaufenden Feldlinien“ (linke Seite) proportional zu der in V enthaltenen elektrischen Ladung (rechte Seite) ist.

Um das elektrische Feld, das von einer gegebenen Ladungsverteilung erzeugt wird, zu bestimmen, sind – wie wir sehen werden – sowohl (1.32) als auch (1.45) nützlich. Wir werden in jedem Fall diejenige Form wählen, mit der die Argumentation einfacher wird.

Die Maxwellgleichung $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ in Integralform

Wir bezeichnen mit V ein beliebiges (zeitlich festgehaltenes) Raumgebiet und bilden das Volumsintegral über beide Seiten der Maxwellgleichung (1.33):

$$\int_V d^3x\,\mathrm{div}\vec{B} = 0\,. \tag{1.48}$$

Wir formen die linke Seite mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in ein Oberflächenintegral um und erhalten

$$\oint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{B} = 0\,. \tag{1.49}$$

Das ist die Maxwellgleichung (1.33) in Integralform. Wichtig ist, dass sie für *beliebige* Raumgebiete V gilt. Was besagt sie? Sie hat die gleiche Struktur wie die zuvor besprochene Maxwellgleichung (1.32) bzw. (1.45), mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt die Quellstärke gleich 0 ist. Wir nennen die linke Seite von (1.49) den **magnetischen Fluss** durch die Randfläche ∂V. Allgemeiner bezeichnen wir für eine beliebige Fläche S das Integral

$$\int_S d\vec{A}\cdot\vec{B} \tag{1.50}$$

als magnetischen Fluss[22] durch S. Beziehung (1.49) besagt daher, dass der magnetische Fluss durch eine *geschlossene* Fläche stets verschwindet. Analog zum elektrischen Fall ist es nützlich, sich **magnetische Feldlinien** (**Flusslinien**) vorzustellen, also Kurven, die (zu einer gegebenen Zeit) in jedem ihrer Punkte in die gleiche Richtung zeigen wie $\vec{B}$. Ein bisschen unscharf formuliert, kommen aus jedem Raumgebiet genausoviele Feldlinien heraus, wie in ihn hineinfließen. Da das für *jedes* Raumgebiet gilt, können wir (ebenso unscharf) formulieren, dass magnetische Feldlinien nirgends entspringen und nirgends enden – sie sind stets *geschlossen*[23]. Das Magnetfeld wird nicht auf die gleiche Weise „erzeugt" wie das elektrische Feld. Dass die rechte Seite von (1.49) gleich 0 ist, können wir als verschwindende magnetische Quellstärke deuten und gelangen so zur Kurzformel: **Es gibt keine magnetischen Ladungen**.

Die Maxwellgleichung $\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ in Integralform

In den beiden ersten Maxwellgleichungen trift die Operation div auf, von der auch der Gaußsche Integralsatz handelt. In die beiden verbleibenden Maxwellgleichungen geht die Operation

[22] Nach der auf Seite 6 vereinbarten Terminologie ist der magnetische Fluss durch die Fläche der „Fluss des Vektorfeldes $\vec{B}$" durch diese Fläche. Aus der Rolle von $\vec{B}$ in (1.50) ergibt sich übrigens die Bezeichnung *magnetische Flussdichte*, die manchmal anstelle von „Magnetfeld" verwendet wird.

[23] Man könnte jetzt einwenden, dass sie doch auch ins Unendliche laufen könnten. Tatsächlich ist das aber – im Unterschied zu den elektrischen Feldlinien – nicht der Fall, wie wir an den späteren Beispielen erkennen werden.

rot ein, für die der Stokessche Integralsatz zuständig ist. Um diesen anzuwenden, bezeichnen wir eine beliebige (zeitlich festgehaltene) in den Raum gelegte Fläche mit S und bilden das Flächenintegral über (1.34):

$$\int_S d\vec{A} \cdot \mathrm{rot}\vec{E} = -\int_S d\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,. \tag{1.51}$$

Auf der rechten Seite ziehen wir die partielle Zeitableitung (die dadurch zu einer totalen Zeitableitung wird) heraus, und die linke Seite wandeln wir mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes in ein Linienintegral über die Randkurve ∂S um, deren Orientierung aus jener von S durch die Rechtsschraubenregel festgelegt ist. Wir erhalten

$$\oint_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{E} = -\frac{d}{dt}\int_S d\vec{A} \cdot \vec{B}\,. \tag{1.52}$$

Das ist die Maxwellgleichung (1.34) in Integralform. Wichtig ist, dass sie für *beliebige* Flächen S gilt. Was besagt sie? Die linke Seite ist das Linienintegral des Magnetfelds über die Randkurve der Fläche S. Es misst die Tendenz des Vektorfeldes $\vec{E}$, bei einem Umlauf um diese Kurve deren Orientierung (oder der umgekehrten Orientierung) zu folgen. Angelehnt an die auf Seite 6 vereinbarten Terminologie nennen wir es die **elektrische Zirkulation** entlang der geschlossenen Kurve ∂S. Da $d\vec{x}$ den Verbindungsvektor zwischen zwei infinitesimal benachbarten Kurvenpunkten darstellt, ist intuitiv klar, dass die Aufsummierung von Skalarprodukten der Form $d\vec{x} \cdot \vec{E}$ ein Maß für die Übereinstimmung der Richtungen von $\vec{E}$ und ∂S ist. Die Maxwellgleichung (1.52) besagt nun, dass die elektrische Zirkulation gleich minus der zeitlichen Änderungsrate des magnetischen Flusses durch S ist. Eine Änderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche „induziert" eine elektrische Zirkulation entlang der Randkurve dieser Fläche. Was wir hier vor uns haben, ist nichts anderes als das auf Michael Faraday zurückgehende **Induktionsgesetz**.

Eine interessante Perspektive ergibt sich, wenn Ladungsträger in einer Leiterschleife, in der sie sich frei bewegen können, eingesperrt sind. Eine Änderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche, die die Leiterschleife als Randkurve besitzt[24], induziert ein elektrisches Feld,

[24] Dabei spielt es keine Rolle, welche Fläche betrachtet wird, solange ihre Randkurve mit der Leiterschleife zusammenfällt. Das folgt daraus, dass die linke Seite von (1.52) nur von der Randkurve ∂S abhängt – also hängt auch die rechte Seite nur von ∂S ab. Dass das nicht nur für die Änderungsrate des magnetischen Flusses, sondern auch für den magnetischen Fluss selbst gilt, kann aus der zweiten Maxwellgleichung (1.33) abgeleitet werden: Sind S_1 und S_2 zwei Flächen mit der gleichen (und gleich orientierten) Randkurve (wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass sie sich nicht überschneiden), so betrachten wir jenen Raumbereich V, der von S_1 und S_2 begrenzt wird. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes berechnen wir

$$\int_{S_1} d\vec{A} \cdot \vec{B} - \int_{S_2} d\vec{A} \cdot \vec{B} = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{B} = \int_V d^3x\, \underbrace{\mathrm{div}\vec{B}}_{0} = 0\,, \tag{1.53}$$

wobei wir im ersten Schritt berücksichtigt haben, dass die Orientierung einer der Flächen (wir haben S_2 gewählt) umgekehrt werden muss, damit die Randfläche von V eine einheitliche Orientierung bekommt. Daher ist der magnetische Fluss durch die Randkurve bereits eindeutig bestimmt. In diesem Sinn kann auch vom *magnetischen Fluss durch eine geschlossene Kurve* gesprochen werden.

das die Ladungsträger spüren. (Die vom Magnetfeld auf sie ausgeübte Kraft wollen wir hier unter den Tisch fallen lassen). Aufgrund der nichtverschwindenden elektrischen Zirkulation besitzt die zur Leiterschleife tangentiale Komponente des elektrischen Feldes die Tendenz, der Orientierung der Leiterschleife zu folgen, wodurch die Ladungsträger die Leiterschleife entlang getrieben werden – ein *Kreisstrom* ist entstanden.

Die Größe $\mathrm{rot}\vec{E}$ wird auch als **elektrische Wirbelstärke** bezeichnet. Sie ist gewissermaßen die „lokale" Version der elektrischen Zirkulation.

Die Maxwellgleichung $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ in Integralform

Wir bezeichnen eine beliebige (zeitlich festgehaltene) in den Raum gelegte Fläche mit S und bilden das Flächenintegral über (1.35):

$$\int_S d\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\int_S d\vec{A}\cdot\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\int_S d\vec{A}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,. \tag{1.54}$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist gleich μ_0 mal dem durch die Fläche S fließenden elektrischen Strom $I_{\mathsf{durch}\,S}$ (vgl. (1.30)). Im zweiten Term auf der rechten Seite ziehen wir die partielle Zeitableitung (die dadurch zu einer totalen Zeitableitung wird) heraus, und die linke Seite wandeln wir mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes in ein Linienintegral über die Randkurve ∂S um, deren Orientierung wieder mit jener von S durch die Rechtsschraubenregel abgestimmt ist:

$$\oint_{\partial S} d\vec{x}\cdot\vec{B} = \mu_0\,I_{\mathsf{durch}\,S} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{d}{dt}\int_S d\vec{A}\cdot\vec{E}\,. \tag{1.55}$$

Das ist die Maxwellgleichung (1.35) in Integralform. Wichtig ist, dass sie für *beliebige* Flächen S gilt. Was besagt sie? Der erste Term auf der rechten Seite gibt uns einen Hinweis, wie die Materie (konkret: der elektrische Strom) das Magnetfeld hervorbringt. Betrachten wir einmal für den Moment eine Situation, in der alle Größen zeitunabhängig sind. Dann fällt der zweite Term auf der rechten Seite weg, und wir erhalten einen Zusammenhang zwischen dem Linienintegral des Magnetfelds über die Randkurve einer Fläche und dem elektrischen Strom, der durch diese Fläche fließt. Im Einklang mit der auf Seite 6 vereinbarten Terminologie nennen wir die linke Seite die **magnetische Zirkulation** entlang der geschlossenen Kurve ∂S. In einer zeitunabhängigen Situation ist sie porportional zum elektrischen Strom, der durch S fließt. Das ist das **Amperèsche Gesetz**. Da die Zirkulation eines Vektorfeldes (wie anhand der dritten Maxwellgleichung diskutiert) die Tendenz ausdrückt, dass dieses bei einem Umlauf der Orientierung der Kurve folgt, schließen wir – zunächst intuituiv –, dass ein elektrischer Strom ein Magnetfeld hervorbringt, dessen (geschlossene) Feldlinien „um ihn herumlaufen". Wir werden dieses Bild anhand des von einem stromdurchflossenen Leiter erzeugten Magnetfelds bestätigt finden.

Im allgemeinen Fall gibt es aber noch den zweiten Term auf der rechten Seite von (1.55). Die Größe

$$\varepsilon_0\,\frac{d}{dt}\int_S d\vec{A}\cdot\vec{E} \tag{1.56}$$

heißt **Maxwellscher Verschiebungsstrom**, ist also (bis auf den Faktor ε_0) gleich der zeitlichen Änderungsrate des elektrischen Flusses durch S, wobei wir ganz allgemein für eine beliebige Fläche S das Integral

$$\int_S d\vec{A}\cdot\vec{E} \tag{1.57}$$

als elektrischen Fluss durch S bezeichnen. (1.55) sagt uns also, dass der Maxwellsche Verschiebungsstrom[25] auf das Magnetfeld die gleiche Wirkung hat wie ein aus bewegten Ladungen bestehender elektrischer Strom (der so genannte *Leitungsstrom*). Die magnetische Zirkulation entlang ∂S wird (von den Konstanten ε_0 und μ_0 einmal abgesehen) bestimmt durch die Summe aus dem elektrischen Strom und der zeitliche Änderung des elektrischen Flusses durch S.

Die Größe $\mathrm{rot}\vec{B}$ wird auch als **magnetische Wirbelstärke** bezeichnet. Sie ist gewissermaßen die „lokale“ Version der magnetischen Zirkulation.

Die lokale und die integrierte Form der Maxwellgleichungen

Die Form (1.32) − (1.35), in der wir die Maxwellgleichungen zunächst angegeben haben, wird auch *lokale* Form oder *differentielle Form* der Maxwellgleichungen genannt. Lokal heißt sie, weil sie durch die Ladungsdichte, die Stromdichte und die Ableitungen der Felder zu *einer* Zeit t und an *einem* Punkt $\vec{x}$ ausgedrückt sind. Die integrierte Form der Maxwellgleichungen hingegen ist auf Raumgebiete, Flächen und Kurven bezogen.

Beide Formen haben ihre Vor- und Nachteile. Die integrierte Form hat uns bei einer ersten Orientierung darüber, was diese Gleichungen überhaupt aussagen, geholfen. Wir werden sie auch benutzen, um Feldkonfigurationen, die von gegebenen Ladungs- und Stromdichten erzeugt werden, in einfachen Situationen zu finden. Im Physikunterricht bietet sie durch die Begriffe des Flusses und der Zirkluation und deren Veranschaulichung durch Feldlinien Möglichkeiten der „Elementarisierung“, die die lokale Form vermissen lässt.

Allerdings hat die integrierte Form den Nachteil, dass in ihr die Zusätze „für alle Raumbereiche V“ und „für alle Flächen S“ entscheidend ist. Nur mit diesen Zusätzen ist sie äquivalent zur lokalen Form der Maxwellgleichungen. Für gegebene (oder vermutete) Feldkonfigurationen $\vec{E}(\vec{x},t)$ und $\vec{B}(\vec{x},t)$ ist es aufgrund dieser Zusätze (außer in besonders einfachen Situationen) schwierig, zu überprüfen, ob sie die Maxwellgleichungen tatsächlich „für alle V“ und „für alle S“ erfüllen. In der lokalen Form ist die Überprüfung einer vermuteten Lösung ganz einfach – weil das Differenzieren leichter ist als das Integrieren! Auch wenn Lösungen für die Felder in verzwickten Situationen gefunden werden sollen, arbeitet man in der Regel lieber mit der lokalen Form (und muss dann eben ein System partieller Differentialgleichungen lösen). In manchen Bereichen (z. B. bei der Behandlung elektromagnetischer Wellen) hat die lokale

[25] Es ist dies der einzige Teil der Maxwellgleichungen, der auf Maxwell selbst zurückgeht. Ohne ihn wäre die elektrische Ladung nicht erhalten. (Velleicht erinnern Sie sich, dass wir bei der Herleitung der Kontinuitätsgleichung (1.40) die vierte Maxwellgleichung benutzt haben). Alle anderen Bestandteile der Maxwellgleichungen waren – wie auch ihre Namen ausdrücken – Maxwell bereits bekannt.

Form einen klaren Vorteil gegenüber der integrierten. Und schließlich lassen sich Verallgemeinerungen (etwa die Berücksichtigung von Kräften innerhalb der Materie, die Einbeziehung des Graviationsfeldes oder der Übergang von der klassischen Elektrodynamik zur Quantenelektrodynamik) einfacher mit der lokalen Form erzielen.

Wir werden uns die Vorteile beider Formen zunutze machen und die immer Variante benutzen, die im jeweiligen Zusammenhang einfacher ist.