

# Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt

## Übungstermin 12

1. Berechnen Sie  $\int_{-1}^1 (x^3 + 3x^2 + 4x + 5) dx$  und  $\int_{-1}^1 (3x^2 + 5) dx$ . Wieso kommt in beiden Fällen dasselbe heraus? Ist das Zufall?
2. Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Sinusfunktion und der ersten Achse im Intervall  $[0, \pi]$ . Was sagt uns das über den Mittelwert der Sinusfunktion in diesem Intervall?
3. Berechnen Sie  $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .
4. Rechnen Sie die Formel (7.80) des Skriptums (einmal in  $\mathbb{R}^+$  und einmal in  $\mathbb{R}^-$ ) nach!
5. Jemand rechnet bei einer Prüfung  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{-1} = -\frac{3}{2}$  und bekommt dafür null Punkte. Was hat er falsch gemacht?
6. Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , d.h.  $\int f(x) dx = F(x) + C$ . Geben Sie Formeln für
$$\int f(x-a) dx$$
(mit  $a \in \mathbb{R}$ ) und
$$\int f(bx) dx$$
(mit  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ ) an!
7. Warum ist im Skriptum beim Satz [7.31] über die partielle Integration in (7.95) eine Integrationskonstante angegeben, in (7.92) aber nicht?
8. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals  $\int \sin(x) \cos(x) dx$  führen Sie zunächst die im Skriptum in (7.99)–(7.100) angegebene Methode vor! Berechnen Sie danach das gleiche Integral mit Hilfe der Substitutionsregel!
9. Berechnen Sie (für  $x > 0$ )  $\int e^{-x} x dx$  und  $\int_0^{\infty} e^{-x} x dx$ .
10. Von einer Funktion  $f$  ist bekannt, dass  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 3$  gilt. Berechnen Sie  $\int_{-2}^2 f(-x) dx$ .

11. Berechnen Sie  $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$  (mit partieller Integration) und  $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ .
12. Für welche  $p \in \mathbb{R}$  existiert  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ ? Für welche  $p \in \mathbb{R}$  existiert  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ ? Passen Ihre Ergebnisse mit den Formen der Graphen diese Funktionen zusammen? Insbesondere: Wodurch unterscheiden sich die Graphen und die uneigentlichen Integrale der Funktionen  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  und  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ?
13. Machen Sie eine Skizze zur „Physiker-Herleitung“ der Formel für das Volumen eines Rotationskörpers!
14. Machen Sie eine Skizze zur „Physiker-Herleitung“ der Formel für die Bogenlänge des Graphen einer Funktion!
15. Leiten Sie eine Formel für den Inhalt der Mantelfläche eines Rotationskörpers her!
16. Der Volumsinhalt einer Kugel wurde im Skriptum in (7.143) berechnet. Benutzen Sie dieses Ergebnis und ein „Physiker-Argument“, um den Oberflächeninhalt der Kugel (elegant, also ohne aufwändige Rechnung) zu ermitteln!
17. Verifizieren Sie die im Skriptum in (7.152) und (7.153) angegebenen Formeln für die Simpsonregel zur näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Integrals!
18. Wenden Sie die Simpsonregel mit  $n = 2$  und  $n = 3$  an, um  $\int_1^2 e^{-x^2} dx$  näherungsweise zu berechnen! (Verwenden Sie dafür ein Computeralgebra-System!) Geben Sie jeweils den relativen Fehler im Vergleich zum wahren Wert  $0.1352572579\dots$  an!
- Anmerkung: Bestimmte Integrale über  $e^{-x^2}$  sind in der Stochastik im Zusammenhang mit der Normalverteilung wichtig!