Mechanik

Konzepte und Zusammenhänge

Franz Embacher

Vorbemerkung

Dieses Skriptum legt Wert auf wichtige Konzepte und Zusammenhänge. Im Vergleich zu Schulbüchern hat es einen eher „theoretischen" Charakter. Rechentechnische Gesichtspunkte (wie das Umformen von Termen und Gleichungen oder das Rechnen mit Einheiten), aber auch konkrete – und für den Unterricht nützliche – Anwendungen (wie etwa die Möglichkeiten der Kraftübertragung oder das Hebelgesetz) sind entweder ganz weggelassen oder werden vergleichsweise stiefmütterlich behandelt, da diese Themen in den meisten Schulbüchern gut und ausführlich behandelt werden. Im Zentrum stehen, entsprechend dem Titel der Lehrveranstaltung, die physikalischen *Grundlagen*. Besonders wichtig ist mir die Vermittlung von Sachverhalten, die aus Schulbüchern nur schwierig zu erschließen sind. In den Text sind einige Aufgaben eingestreut (die Sie bitte lösen), und am Ende steht eine Reihe von Frage zur Selbstprüfung, die Sie beantworten können sollten.

Beschreibung von Bewegungen

Die Bewegung eines Körpers ist – in der Sichtweise der Mechanik – die zeitliche Änderung seines Ortes oder seiner Position im Raum. Wird einmal von der möglichen Drehung eines Körpers abgesehen, so sind die beiden wichtigsten Kenngrößen, die eine Bewegung beschreiben, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung.

Geschwindigkeit

Die während eines gegebenen Zeitintervalls bestimmte **Durchschnittsgeschwindigkeit** ist durch das Verhältnis

$$v = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{dafür benötigte Zeit}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (1)$$

gegeben. Dabei steht Δt für die Dauer des zugrunde gelegten Zeitintervalls.[1] Wird diese Dauer als sehr *klein* angenommen (im Sinn eines mathematischen Grenzprozesses kann

[1] Mit dem griechischen Buchstaben Δ (Delta) werden generell *Änderungen* oder *Portionen* ausgedrückt. Eine Änderung ist als „Endwert minus Anfangswert" definiert: Ändert sich irgendeine Größe f, die beispielsweise zunächst den Wert 5 hatte, auf den Wert 7, so ist ihre Änderung durch $\Delta f = 7 - 5 = 2$ gegeben. Ist $\Delta f > 0$ (also Δf positiv), so liegt das eine *Zunahme*, ist $\Delta f < 0$

man sie „unendlich klein" nennen (eine weniger verfängliche Formulierung ist „beliebig klein"), so ergibt sich daraus die **Momentangeschwindigkeit** zu einem bestimmten Zeitpunkt (wie sie etwa vom Tachometer eines Autos angezeigt wird bzw. idealerweise angezeigt werden sollte). Wenn in der Physik von „der **Geschwindigkeit**" die Rede ist, so ist in der Regel die Momentangeschwindigkeit gemeint.

Formel (1) hat eine wichtige Struktur – sie gibt eine ***Rate*** an. Der Bruchstrich (das Kennzeichen einer Rate) kann als „***pro***" ausgesprochen (und gedacht) werden: $v =$ zurückgelegter Weg „pro Zeitintervall". Besonders deutlich wird das, wenn ein konkreter Wert der Geschwindigkeit angegeben wird, etwa:

$v = $ 5,4 km/h, also 5,4 Kilometer „pro Stunde"

für die Geschwindigkeit eines Spaziergängers. Um mit dieser Geschwindigkeit spazieren zu gehen, ist es natürlich nicht nötig, tatsächlich eine Stunde lang zu laufen! Man könnte die gleiche Geschwindigkeit auch in der Form

$v = $ 1,35 Kilometer „pro Viertelstunde"

angeben.

Aufgabe: Rechnen Sie nach!
Rechnen Sie v in die Einheiten „Kilometer pro Minute" und „Kilometer pro Jahr" um!

Wir können die Geschwindigkeit des Spaziergängers auch in das (vor allem im Unterricht bevorzugte) SI-Einheitensystem umrechnen:[2]

$$v = 5.4\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 5,4 \cdot \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = \underbrace{5,4 \cdot \frac{1000}{3600}}_{1,5}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,. \qquad (2)$$

(Beachten Sie, dass Sie mit den Einheitensymbolen km, h, m und s genauso rechnen können wie mit Zahlen oder Variablen!) Der Spaziergänger legt „pro Sekunde", also „in jeder Sekunde" eineinhalb Meter zurück. Sehen wir uns an, wie weit er kommt:

(also Δf negativ), so liegt eine *Abnahme* von f vor. Das Symbol Δs in (1) kann so verstanden werden: Mit s wird der Kilometerstand entlang einer Straße bezeichnet. Ein Fahrzeug bewegt sich von der Markierung $s =$ 8,2 km zur Markierung $s =$ 8,7 km. Die Strecke, die es dabei zurücklegt, hat die Länge $\Delta s =$ 8,7 km – 8,2 km = 0,5 km. Diese Größe drückt die „Änderung des Ortes" aus und wird kurz als „zurückgelegter Weg" bezeichnet. Analog kann man Δt als „Ankunftszeit – Abfahrtszeit" verstehen. Insgesamt ist das Symbol Δ eine Hilfe beim Lesen und Schreiben von Formeln. Man kann es zwar weglassen, muss aber dann umso genauer dazusagen (bzw. sich vergegenwärtigen), was die in einer Formel vorkommenden Größen bedeuten.

[2] Leider gibt es zu wenig Buchstaben! Verwechseln Sie bitte nicht s (Weg) mit s (Sekunde)! Ähnliche Verwechslungsmöglichkeiten treten in der Physik immer wieder auf, z. B. W für Arbeit (*work*) und W für Watt. In gedruckter Form (wie hier) werden Symbole für physikalische Größen oft kursiv geschrieben und Einheitensymbole aufrecht. Was jeweils gemeint ist, sollte aber immer aus dem Zusammenhang klar sein.

nach 1 Sekunde:	1,5 Meter
nach 2 Sekunden:	3 Meter
nach 10 Sekunden:	15 Meter
nach n Sekunden:	$1{,}5 \cdot n$ Meter

Die letzte Zeile besagt, dass die Zahl der zurückgelegten Meter *proportional* zur Zahl der Sekunden ist, die während dessen vergehen. Wir können diese Aussage von den verwendeten Einheiten und vom konkreten Wert der Geschwindigkeit unabhängig machen und in der Form

$$s = v\,t \tag{3}$$

anschreiben, wobei s für den während der Zeit t zurückgelegten Weg steht.[3] Hier haben wir ein schönes Beispiel für eine physikalische Formel, die etwas *ganz Bestimmtes* ausdrückt, das man sich am besten klar macht, indem man etwas mehr Worte verwendet:

Bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit v, so legt er während der Zeit t die Wegstrecke $v\,t$ zurück. (3')

Wir können auch sagen: Der zurückgelegte Weg ist zur benötigten Zeit *proportional*. Die Geschwindigkeit v spielt die Rolle der *Proportionalitätskonstante*. Durch verbale Formulierungen dieser Art wird auch meistens klar, was eine Formel *nicht* aussagt: So haben wir etwa hier vorausgesetzt, dass sich der Körper mit einer *konstanten* (also zeitlich unveränderlichen) Geschwindigkeit v bewegt (im Beispiel des Spaziergängers war $v = 1{,}5$ m/s). Eine derartige Bewegung nennen wir **gleichförmig**. Formel (3) gilt also *nur* für gleichförmige Bewegungen.

Geschwindigkeit als Vektor

Jetzt wollen wir noch hinzufügen, dass sich jeder Körper im (dreidimensionalen) *Raum* befindet und seine Bewegung in eine bestimmte *Richtung* erfolgt. Daher wird die Geschwindigkeit in Skizzen oft als Pfeil (**Vektor**) dargestellt, dessen Richtung in die (momentane) Bewegungsrichtung weist, und dessen Länge (der so genannte *Betrag*) angibt, wie schnell sich der Körper in diese Richtung bewegt. Um den Vektorcharakter einer Größe auszudrücken, wird ein Pfeilsymbol über das Symbol geschrieben, das sie bezeichnet. Der „**Geschwindigkeitsvektor**" wird dann in der Form $\vec{v}$ angeschrieben (und als „v Pfeil" ausgesprochen).

Unter dem Begriff „**gleichförmige Bewegung**" wird in der Physik meist eine *geradlinig*-gleichförmige Bewegung verstanden, bei der also die Bewegung stets in die gleiche Richtung verläuft und die Geschwindigkeit v konstant bleibt. (Insgesamt bleibt dabei der gesamte Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ zeitlich unverändert).

---

[3] Eine mathematisch orientierte und klarere Schreibweise für (3) wäre $s(t) = v\,t$. Dabei wird die Länge s der zurückgelegten Wegstrecke als *Funktion* der seit dem Start vergangenen Zeit t aufgefasst: Die Schreibweise $s(t)$ bringt zum Ausdruck, dass s von t abhängt (während v die Rolle einer vorgegebenen Konstante spielt).

Beschleunigung

Nicht jede physikalisch interessante Bewegung eines Körpers verläuft gleichförmig. Das schönste Beispiel dafür ist der **freie Fall**: Ein aus dem Fenster geworfener Körper wird immer schneller. Um quantitativ auszudrücken, wie schnell sich die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers ändert, benötigen wir ebenfalls eine *Rate*. Ganz ähnlich wie die Geschwindigkeit die zeitliche *Rate* der Ortsänderung ist, ist die **Beschleunigung** die zeitliche *Rate* der Geschwindigkeitsänderung:

$$a = \frac{\text{Änderung der Geschwindigkeit}}{\text{dafür benötigte Zeit}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{4}$$

Δt steht dabei wieder für ein Zeitintervall, das wir uns als sehr klein denken können. Sehen wir uns ein Beispiel an: Wenn etwa ein PKW eine Beschleunigung von

$$a = 20\,\frac{\text{km/h}}{\text{s}} \tag{5}$$

erfährt, so bedeutet das, dass seine Geschwindigkeit „pro Sekunde" um 20 km/h größer wird. (Lesen Sie den Bruchstrich wieder als „*pro*"!) Fährt der PWK aus dem Stand los, so ist seine Geschwindigkeit zu Beginn der Bewegung gleich 0. Danach ergeben sich folgende Geschwindigkeiten:

nach 1 Sekunde:	20 km/h
nach 2 Sekunden:	40 km/h
nach 3 Sekunden:	60 km/h
nach 5 Sekunden:	100 km/h
nach 10 Sekunden:	200 km/h
nach 20 Sekunden:	400 km/h

Sehen Sie sich die Zahlen an! Ist Ihnen klar, dass eine derartige Situation nicht allzu lange dauern kann? In der Realität wird die Beschleunigung vielleicht nach 5 Sekunden oder maximal 10 Sekunden nachlassen und kleiner werden – bis der PWK schließlich eine konstante Endgeschwindigkeit erreicht hat und die Beschleunigung auf 0 abgesunken ist. Aber immerhin während der ersten paar Sekunden ist das Modell einer konstanten Beschleunigung (wir sprechen dann von einer **gleichmäßig beschleunigten Bewegung**) einigermaßen realistisch.

Sehen wir uns die obige Angabe (5) der Beschleunigung genauer an. Da auch die Geschwindigkeit eine Rate ist, ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit „die Änderungsrate einer Änderungsrate" – verbal kommt das durch ein zweimaliges „*pro*" in „Kilometer *pro* Stunde *pro* Sekunde" zum Ausdruck. Mathematisch entspricht das einem Doppelbruch. Das wird insbesondere dann deutlich, wenn auch die Geschwindigkeit in SI-Einheiten (m/s) ausgedrückt wird. Rechnen wir (5) um:

$$a = 20\,\frac{\text{km/h}}{\text{s}} = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}\cdot\text{s}} = 20\cdot\frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}\cdot\text{s}} = \underbrace{20\cdot\frac{1000}{3600}}_{5{,}56}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 5{,}56\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \tag{6}$$

wobei wir den numerischen Wert (der sich zunächst als $5{,}5555555...$ ergibt) sinnvoll gerundet haben. Die SI-Einheit der Beschleunigung ist m/s², ausgesprochen: „Meter pro Sekundenquadrat". Diese vielleicht seltsam anmutende Bezeichnung (was ist ein „Sekundenquadrat"?) kann auch in der verständlicheren Form

$$\frac{\text{m/s}}{\text{s}} \quad \text{also} \quad \frac{\text{m/s (Geschwindigkeitsänderung)}}{\text{s (dafür benötigte Zeit)}} \tag{7}$$

aufgedröselt werden.

Fallgesetz

Der (bereits erwähnte) freie Fall eines Körpers ist eine Bewegung, die – solange der Luftwiderstand vernachlässigt wird – mit guter Genauigkeit als gleichmäßig beschleunigte Bewegung modelliert werden kann. Die Beschleunigung, die ein fallender Körper erfährt, beträgt etwa

$$g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,, \tag{8}$$

wobei der genaue Wert ein bisschen davon abhängt, wo auf der Erdoberfläche man sich befindet. (Er heißt **Erdbeschleunigung** und variiert je nach Ort um einige Promille). Beachten Sie, dass er unabhängig von der Beschaffenheit des fallenden Körpers ist, also insbesondere davon, wie schwer der Köper ist. Diese Gesetzmäßigkeit („alle Körper fallen gleich schnell, und zwar mit Erdbeschleunigung g") wurde von Galileo Galilei zu Beginn des 17. Jahrhunderts entdeckt. Das so genannte **Fallgesetz** drückt dies in quantitativer Weise aus. Es lautet

$$s = \frac{g}{2}\,t^2 \tag{9}$$

oder, in Worten: Ein fallender Körper hat nach der Zeit t die Strecke $g\,t^2/2$ durchfallen. Dabei ist vorausgesetzt, dass der Körper aus der Ruhelage zu fallen beginnt.[4] Wir wollen dieses Gesetz nicht ableiten, erwähnen aber, dass es sich direkt (und ohne weitere Annahme) aus der Konstanz der Beschleunigung ergibt. Eine zweite wichtige Formel zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung lautet

$$v = g\,t \tag{10}$$

oder, in Worten: Ein fallender Körper hat nach der Zeit t die Geschwindigkeit $g\,t$. Beachten Sie, dass v hier von der Zeit abhängt[5] – im Unterschied zur konstanten Geschwindigkeit v

[4] Hat er zu Beginn der Zeitzählung (also bei $t = 0$) eine nach oben gerichtete Anfangsgeschwindigkeit v_0, so gilt $s = \frac{g}{2}t^2 - v_0 t$. Diese Formel beschreibt den „lotrechten Wurf". Für $v_0 = 0$ reduziert sie sich auf (9).

[5] Man könnte (9) und (10) transparenter als $s(t) = \frac{g}{2}t^2$ und $v(t) = g\,t$ schreiben.

in Formel (3)! Wo die Beziehung (10) herkommt, sollte uns einleuchten: Dass die Beschleunigung konstant ist, bedeutet ja, dass die Geschwindigkeit „pro Sekunde“ um den gleichen Betrag zunimmt, dass sie also *proportional* zur insgesamt verstrichenen Zeit ist, wobei die Beschleunigung (hier also g) die Rolle der Proportionalitätskonstante spielt. Genau das drückt Formel (10) aus. Die beiden Beziehungen (9) und (10) charakterisieren den freien Fall (und, ganz allgemein, *jede* gleichmäßig beschleunigte Bewegung, wobei anstelle von g jede andere – konstante – Beschleunigung a gesetzt werden kann).

Wir erwähnen noch, dass auch eine Verzögerung, also ein Langsamer-werden, unter den Oberbegriff der „beschleunigten Bewegung“ fällt. (Mathematisch wird sie einfach als negative Beschleunigung beschrieben). Ganz allgemein ist eine „beschleunigte Bewegung“ eine Bewegung mit nicht-konstanter Geschwindigkeit.

Beschleunigung als Vektor

Schließlich kann der Beschleunigung, ebenso wie der Geschwindigkeit, eine *Richtung* im Raum zugeordnet werden. In diesem Sinn ist der „**Beschleunigungsvektor**“ durch Formel (4) gegeben, wenn sie um zwei Vektorpfeilchen ergänzt wird:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{11}$$

Besonders interessant ist seine Richtung im Fall einer **gleichmäßigen Drehbewegung**: Bewegt sich ein Körper auf einer Kreisbahn und durchläuft diese gleichmäßig (also mit konstanter Winkelgeschwindigkeit), wie beispielsweise ein Satellit um die Erde, so zeigt der Beschleunigungsvektor stets vom Körper zum Mittelpunkt des Kreises! Dieses Beispiel zeigt, dass Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor nicht in die gleiche Richtung zeigen müssen. Wir werden später mehr über die Drehbewegung sagen.

Ein wichtiger Spezialfall wird von Bewegungen gebildet, deren Beschleunigung(svektor) gleich 0 ist. Mit (11) folgt dann, dass die Änderung der Geschwindigkeit gleich 0 und daher die Geschwindigkeit konstant ist: Verschwindende Beschleunigung ist gleichbedeutend mit geradlinig-gleichförmiger Bewegung!

Kraft, Masse, Trägheit, Gewicht , Grundgesetz der Mechanik, Gravitationsgesetz

Kraft, intuitiv

Was eine **Kraft** ist, ist uns intuitiv klar. Mit einer Federwaage können mechanische Kräfte, die auf Körper ausgeübt werden, verglichen werden. Ebenso wie Geschwindigkeiten und Beschleunigungen haben Kräfte Richtungen im Raum und werden, sofern räumliche Situationen betrachtet werden, durch Vektoren dargestellt.

Grundgesetz der Mechanik

Wichtig für die Physik ist nun das Verhältnis der Kraft zur Bewegung. Für die Antike war die **Kraft** die **Ursache der Bewegung**. Das würde bedeuten: Hört die Kraft auf, zu wirken, so hört auch die Bewegung auf. Heute wissen wir, dass das nicht stimmt! Isaac Newton hat (im 17. Jahrhundert, aufbauend Galileo Galileis Vorarbeiten) das Verhältnis zwischen Kraft und Bewegung neu bestimmt und damit den wichtigsten Grundpfeiler der neuzeitlichen Physik errichtet:

Die **Kraft** ist die **Ursache der Bewegungs*änderung***. (12)

Daraus ergibt sich zunächst: Wirkt auf einen Körper *keine* Kraft, so behält er seinen Bewegungszustand bei: Er bewegt sich geradlinig-gleichförmig. Seine Geschwindigkeit (in Betrag und Richtung) ist konstant. In unserem Alltag ist die Schwerkraft zwar allgegenwärtig, aber immerhin bei horizontalen Bewegungen (wie dem Rollen einer Kugel auf einer waagrechten, glatt polierten Oberfläche oder beim Eislaufen) können wir diese Erkenntnis (den „**Trägheitssatz**") näherungsweise nachvollziehen. Bilder aus dem Inneren von Raumstationen vermitteln ein idealeres (und zudem dreidimensionales) Bild der „Schwerelosigkeit", die nichts anderes ausdrückt als eine Situation, in der der Trägheitssatz gilt: Ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, *verharrt* im Zustand der Ruhe oder der geradlinig-gleichförmigen Bewegung.

Um die Geschwindigkeit eines Körpers zu ändern, ist nach (12) eine Kraft nötig, die auf ihn wirkt. Newton präzisierte diese Idee in der folgenden Form: Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so erfährt er eine Beschleunigung, die (in Betrag und Richtung) *proportional* zu dieser Kraft ist. Mathematisch schreiben wir dies in der Form[6]

$$a = \frac{1}{m} F \qquad \text{oder, in vektorieller Form,} \qquad \vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}\,, \tag{13}$$

wobei F (bzw. in vektorieller Form $\vec{F}$) die wirkende Kraft bezeichnet. Der Körper *reagiert* auf die Kraftwirkung, indem er eine Beschleunigung a (bzw. in vektorieller Form $\vec{a}$) erfährt, die durch (13) gegeben ist. Die Konstante m wird als **Masse** bezeichnet. Diese Regel heißt **Grundgesetz der Mechanik** oder **Zweites Newtonsches Axiom**. Sie war zweihundert Jahre lang fast konkurrenzlos *die* Grundgleichung der Physik.[7] Sie wird oft auch in der Form

$$F = m\,a \qquad \text{oder, in vektorieller Form,} \qquad \vec{F} = m\,\vec{a} \tag{13'}$$

angeschrieben („Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung"), sollte aber in der Form (13) gelesen werden: Ist die Kraft bekannt, so bestimmt sich daraus die Beschleunigung. Die Struktur dieses Gesetzes erlaubt es uns, aus der Kenntnis der wirkenden Kräfte die zukünftige Entwicklung eines mechanischen Systems *vorherzusagen*. Darin besteht seine Stärke.[8]

---

[6] Newtons Formulierung war ein bisschen anders. Die Schreibweise (13) geht auf Leonhard Euler zurück.

[7] Erst mit der Entdeckung des elektromagnetischen Feldes und später der Entwicklung der Relativitätstheorie und der Quantentheorie bekam sie Konkurrenz, besteht aber in der modernen Physik in abgewandelter Form nach wie vor weiter.

[8] Etwas genauer ausgedrückt: Sind die in einem mechanischen System wirkenden Kräfte bekannt, und sind alle Orte und Geschwindigkeiten in diesem System zu einer gegebenen Anfangszeit bekannt, so lässt sich mit dem Grundgesetz der Mechanik die gesamte Zukunft des Systems berechnen. Der berühmte „Laplacesche Dämon" ist eine verständliche Illustration dieses

Aus (13‘) folgt sofort die Einheit der Kraft: Dazu multiplizieren wir die Einheit der Masse (kg) mit der Einheit der Beschleunigung (m/s^2) und erhalten als Einheit der Kraft kg m/s^2. Ein kg m/s^2 wird auch ein Newton (abgekürzt N) genannt

Trägkeit und Masse

Sehen wir uns zwei Aspekte dieses Grundgesetzes an:

- Zunächst folgt aus (13) unmittelbar: Ist die Kraft gleich 0, so ist auch die Beschleunigung gleich 0, daher die Geschwindigkeit konstant (und die Bewegung geradlinig-gleichförmig). Das ist der **Trägheitssatz** (der auch als **Erstes Newtonsches Axiom** bezeichnet wird).
- Die Masse m bestimmt, wie groß die Beschleunigung ist, die ein konkreter Körper unter der Einwirkung einer gegebenen Kraft erfährt. Je größer sie ist, umso kleiner ist die Beschleunigung. (Stellen Sie sich als Gedankenexperiment vor, auf einem – idealen reibungsfreien – Eislaufplatz einen Kinderwaagen und einen LKW der gleichen Kraftwirkung auszusetzen). Diese Eigenschaft der Masse wird manchmal auch als „träge Masse“ bezeichnet. Sie illustriert, wieso hier der Begriff „**Trägheit**“ verwendet wird: Jeder Körper ist „träge“ und setzt Kräften einen **Widerstand** gegen Geschwindigkeitsänderungen entgegen, und zwar umso erfolgreicher, je größer seine Masse ist.

Fallbewegung und Gewicht

Was sagt uns das Grundgesetz über die Fallbewegung? Wir haben bereits oben erwähnt, dass alle Körper beim Fallen (unter Vernachlässigung des Luftwiderstands) die gleiche Beschleunigung g erfahren. Auf einen Körper der Masse m wirkt also auf der Erde stets eine Kraft

$$F = m\,g\,, \tag{14}$$

die als **Gewichtskraft** (oder kurz als das „Gewicht“ des Körpers) bezeichnet wird. Beachten Sie: Das Gewicht eines Körpers ist in Bezug auf die Erde definiert – am Mond hätte ein Körper der gleichen Masse ein geringeres Gewicht!

Aufgabe: Berechnen Sie die auf einen Körper der Masse $m = 1$ kg wirkende Gewichtskraft

(i) auf der Erde,
(ii) am Mond und
(iii) am Jupiter!

(Recherchieren Sie die nötigen Informationen über Mond und Jupiter selbst!)

Aufgabe: Wie „stark“ ist eigentlich eine Kraft von 1 N? Welche Masse muss ein Körper haben, damit sein Gewicht gleich 1 N ist? Welche Alltagsgegenstände haben ein Gewicht von 1 N?

Sachverhalts: Wäre das ganze Universum ein mechanisches System, so wäre seine Zukunft aus den Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt.

Es könnte sich hier die Frage aufdrängen, wieso wir eigentlich im Alltag den Begriff „Gewicht“ benutzen, wenn er doch nur in Bezug auf die Erde definiert ist, während die Masse eines Körpers überall im Universum die gleiche ist? Die simple Antwort: Weil eine Waage die Gewichtskraft anzeigt!

Resultierende Kraft

Apropos: Was ist eigentlich eine Waage? Diese Frage führt uns auf einen weiteren wichtigen Aspekt des Kraftbegriffs: Manchmal wirken auf einen Körper *mehrere* Kräfte. Kräfte, die in verschiedene Richtungen wirken, können addiert werden, indem die Vektorpfeile, die sie darstellen, aneinander gehängt werden. (Im Fall von zwei Kräften führt das zum so genannten „Kräfteparallelogramm“). Die so ermittelte Summe von Kräften nennen wir die **resultierende Kraft** (oder kurz **Resultierende**), die in das Grundgesetz (13) bzw. (13‘) eingesetzt werden muss und die Ursache der Beschleunigungen von Körpern ist.

Zwei Kräfte, die in entgegengesetzte Richtungen wirken, deren Beträge aber gleich groß sind, heben einander auf: Ihre Resultierende ist gleich 0. Wirken zwei derartige Kräfte auf einen Körper, so erfährt dieser zwar (gemäß dem Grundgesetz) keine Beschleunigung, aber er wird verformt. Das ist die zweite wichtige Wirkung von Kräften: Kräfte führen zu **Verformungen**.

Was geschieht nun, wenn ein Körper auf einer Waage liegt? Auf ihn wirkt die nach unten gerichtete Gewichtskraft (14), aber da er nicht beschleunigt wird, muss die Resultierende aller auf ihn wirkenden Kräfte gleich 0 sein. Daraus folgern wir, dass die Waage auf den Körper eine nach *oben* gerichtete (Gegen-)Kraft ausübt, deren Betrag gleich jenem der Gewichtskraft ist. Das Zusammenwirken dieser beiden Kräfte verformt die Waage (also z.B. eine elastische Feder), und das Ausmaß der Verformung nutzen wir, um die Gewichtskraft zu messen.

Newtons Drittes Axiom

Die Existenz derartiger „Gegenkräfte“ ist Teil eines umfassenderen Prinzips, das als **Drittes Newtonsches Axiom** bezeichnet wird: Kräfte treten immer paarweise (als Kraft und Gegenkraft) auf. Wenn also die Erde auf einen fallenden Gegenstand eine Kraft ausübt (ohne die er ja nicht fallen würde), so übt demnach dieser Körper eine gleich große (in entgegengesetzter Richtung wirkende) Kraft *auf die Erde aus*! Das klingt zugegebenermaßen etwas seltsam…

Schwerkraft und Gravitationsgesetz

Um diesen Sachverhalt genauer zu verstehen, müssen wir auf eine weitere fundamentale Erkenntnis Newtons zu sprechen kommen: die **Schwerkraft** (**Gravitation**): Zwei Körper, die jeweils die Massen m und M besitzen, und die sich in einer Entfernung r voneinander befinden, üben aufeinander Kräfte aus, die anziehend wirken, zueinander entgegengesetzt sind und beide den Betrag

$$F = \frac{G\,M\,m}{r^2} \tag{15}$$

besitzen. Dabei ist G die so genannte Newtonsche Gravitationskonstante.[9] Handelt es sich um kugelförmige Körper, so ist für r die Entfernung ihrer Mittelpunkte zu setzen. Diese Regel ist das **Newtonsche Gravitationsgesetz**.[10] Zusammen mit dem Grundgesetz der Mechanik stellte es *den* ersten großen Triumph der neuzeitlichen Physik dar, denn es erlaubte, die Bewegungen von Körpern auf der Erde (Fallen) und im Himmel (Gestirne) auf der Basis einer *einheitlichen* Grundlage zu verstehen.[11]

Um einen Geschmack von der Mächtigkeit dieses Gesetzes zu bekommen, berechnen wir die Gravitationskraft, die die Erde auf einen Gegenstand der Masse m ausübt: Sie ist genau durch (15) gegeben, wobei für M die Masse der Erde und für r der Erdradius einzusetzen ist. Andererseits ist die Gravitationskraft, die die Erde auf einen Gegenstand ausübt, nichts anderes als dessen Gewicht, also (14). Durch Vergleich von (14) mit (15) ergibt sich

$$g = \frac{G\,M}{r^2}\,, \tag{16}$$

womit die Erdbeschleunigung durch Masse und Radius der Erde ausgedrückt ist.

> Aufgabe: Entnehmen Sie die Werte von G, M und r einem Physikbuch (oder einer zuverlässigen Webseite) und führen Sie die Rechnung durch[12] ! Sie sollten als Ergebnis ungefähr den Wert (8) der Erdbeschleunigung erhalten.

Man kann den Spieß auch umdrehen und aus der Kenntnis von g und r (die beide relativ leicht zu messen sind) auf die Erdmasse M schließen!

> Aufgabe: Führen Sie die Berechnung auch in dieser Richtung durch!
> Überlegen Sie zur Ergänzung, wie Sie g in einem Experiment messen können!
> Recherchieren Sie, wie der Erdradius bereits in der Antike (von wem?) recht genau bestimmt worden ist!

Nun können wir zur oben aufgeworfenen Frage zurückkommen, welche Kraft ein fallender Gegenstand seinerseits *auf die Erde ausübt*. Gemäß dem Gravitationsgesetz (16) ist ihr Betrag gleich der Kraft der Erde auf den Gegenstand, also gleich dem Gewicht des Körpers. Und wie reagiert die Erde darauf? Natürlich gemäß dem Grundgesetz (13), indem sie beschleunigt wird! Mit welcher Beschleunigung? Berechnen wir sie, indem wir im Grundgesetz m durch M ersetzen:

---

[9] Ihr Wert ist $G = 6{,}67428\cdot 10^{-11}$ m^3/(kg s^2).

[10] Beachten Sie, dass die Massen der Körper (die bisher die „Trägheit" gekennzeichnet haben) hier die Stärke der Schwerkraft bestimmen, also in einer neuen Rolle auftreten. Diese Eigenschaft der Masse wird manchmal auch als „schwere Masse" bezeichnet.

[11] Mit ihrer Hilfe hat Newton die – bereits zuvor bekannten – Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung begründet. Deren erstes besagt: Ein Planet umläuft die Sonne auf einer Ellipsenbahn, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet. Die beiden anderen Keplerschen Gesetze geben an, wie schnell diese Ellipsenbahn durchlaufen wird. (Dabei wird vorausgesetzt, dass die Sonne im Raum fixiert ist, was näherungsweise erfüllt ist, wenn der Planet eine sehr viel kleinere Masse besitzt als die Sonne).

[12] Da die Erde aufgrund ihrer Eigenrotation ein bisschen abgeplattet ist, setzen Sie für r am besten den „mittleren Erdradius" ein.

$$a = \frac{F}{M} = \frac{G\,M\,m}{r^2 M} = \frac{G\,m}{r^2} = \frac{m}{M}\,\frac{G\,M}{r^2} = \frac{m}{M}\,g\,. \tag{17}$$

Diese Kraft ist um den Faktor m/M kleiner als die Erdbeschleunigung.

> Aufgabe: Berechnen Sie, welche Beschleunigung ein fallender Körper von 1 kg Masse auf die Erde ausübt!

Die Beschleunigung (17) ist für Gegenstände des Alltags zu klein, um in der Praxis bemerkt zu werden. Wenn wir aber statt dessen etwa den Mond betrachten (also mit m die Masse des Mondes bezeichnen), so ist der entsprechende Effekt größer: In Wahrheit kreist nicht nur der Mond um die Erde, sondern auch die Erde spürt eine vom Mond herrührende Beschleunigung und „kreist" daher um den gemeinsamen Massenmittelpunkt des Erde-Mond-Systems (der innerhalb der Erde liegt). Das ist also ein Beispiel für Newtons Drittes Axiom: Kräfte treten immer paarweise (als Kraft und Gegenkraft) auf.[13]

Reibung

Zuletzt erwähnen wir die **Reibungskräfte**, zu denen auch der Luftwiderstand zählt, und die in unserem Alltagsleben eine wichtige Rolle spielen. Sie sind normalerweise proportional zur Geschwindigkeit (Reibung von Festkörpern aneinander, Sinken von Körpern in einer zähen Flüssigkeit) oder zum Quadrat der Geschwindigkeit (Luftwiderstand). Sollen sie bei einer Bewegung berücksichtigt werden, so müssen auch sie zur resultierenden Kraft im Grundgesetz gezählt werden.

Ein Körper, auf den *nur* Reibungskräfte wirken, wird immer langsamer. Um einen Körper, auf den eine Reibungskraft wirkt, in gleichförmiger Bewegung zu halten, muss eine zusätzliche Kraft aufgewandt werden, die die Reibungskraft gerade kompensiert.

Reibungskräfte sind der Grund dafür, dass Körper im Alltagsleben nicht immer unbegrenzt schneller werden, wenn wir eine konstante Kraft auf sie ausüben. Beispiel: Sie ziehen Ihren Reisetrolly über die Straße und üben dabei eine konstante Kraft auf ihn aus, die die (nach hinten wirkende) Reibung kompensiert. Gäbe es keine Reibung, so würde er immer schneller werden (so dass sie ihn schließlich auslassen könnten und er sich gemäß dem Trägheitssatz ohne weitere Krafteinwirkung neben Ihnen her bewegen würde).

Bedeutung von „Gesetzen" und „Axiomen"

In diesem Abschnitt ist vom „Grundgesetz" der Mechanik, von den drei Newtonschen „Axiomen" und vom „Gravitationsgesetz" gesprochen worden. Es handelt sich dabei um *Grundannahmen*, die an den Beginn der Mechanik gestellt werden. Sie können *nicht* einfach aus Beobachtungsdaten abgelesen werden, sondern rechtfertigen sich durch ihren Erfolg, d.h. durch ihr Potential, physikalische Erscheinungen zu erklären und vorherzusagen. Natürlich hat Newton nicht *irgendwelche* Grundannahmen aufgestellt, sondern von Beginn

---

[13] Dieses Prinzip gilt vor allem im Bereich der Mechanik und der Schwerkraft. Im Bereich der Schwerkraft führt es zu einer Modifikation der Keplerschen Gesetze: Ein Zentralgestirn steht nicht starr im Brennpunkt der Ellipsenbahn eines Begleiters, sondern umrundet den gemeinsamen Massenmittelpunkt auf einer (kleinen) Ellipsenbahn. Für Kräfte, die von elektromagnetischen Feldern verursacht werden, verliert das Dritte Newtonsche Axiom aus mehreren Gründen seine strenge Gültigkeit.

an gewusst, welche Phänomene er vorhersagen und erklären wollte, und zudem hat er auf der Arbeit seiner Vorgänger (vor allem jener von Galilei) aufgebaut und sich von einer großartigen physikalischen Intuition leiten lassen.

Logisch betrachtet, bilden diese Grundannahmen das *theoretische Grundgerüst* der Mechanik.[14] In der modernen Physik (die durch den Feldbegriff, die Relativitätstheorie, die Quantentheorie sowie unsere Kenntnisse über die Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen geprägt ist) leben sie in modifizierter Form weiter.

Arbeit, Energie und Leistung

Einen schweren Gegenstand in der Luft zu halten, erfordert Kraft (um seine Gewichtskraft auszugleichen) und kann anstrengend sein. Wir können diese Aufgabe aber etwa einer Tischplatte übertragen, was den gleichen Effekt hat, ohne anstrengend zu sein. Was hingegen *nicht* einfach von einem statischen Gerüst erledigt werden kann, ist das *Heben* eines Gegenstands. Es ist – im physikalischen Sinn – mit „Arbeit" verbunden.

Arbeit

Arbeit (genauer: **mechanische Arbeit**) ist physikalisch so definiert: Wirkt auf einen Körper eine konstante Kraft, und bewegt er sich eine gewisse Strecke weit, so verrichtet diese Kraft am Körper eine Arbeit, die gleich dem Produkt

„Kraftkomponente in Wegrichtung" mal zurückgelegter Wegstrecke (18)

ist. Bewegt er sich genau in die gleiche Richtung, in die die Kraft wirkt, so ist die von ihm verrichtete Arbeit einfach das Produkt „Kraft mal Weg"

$$\Delta W = F\,\Delta s\,. \tag{19}$$

Das Δ vor dem Symbol W drückt aus, dass es sich um eine „Arbeitsportion" handelt.[15] Bewegt sich der Körper in Kraftrichtung, so wird er gemäß dem Grundgesetz (13) immer schneller. Die Arbeit drückt dann gewissermaßen den „Aufwand" aus, den die Kraft aufbringen muss, um den Körper zu beschleunigen. Bewegt sich der Körper *gegen* die Kraftrichtung, so wird er immer langsamer. In diesem Fall verrichtet die Kraft am Körper eine „negative Arbeit" (formal ist dann $\Delta W < 0$). Das bedeutet, dass der Körper selbst Arbeit leisten kann: Wird die Kraft von einer Hand ausgeübt, die ihn abbremst, so stellt der Betrag von ΔW die Arbeit dar, die der Körper an der Hand verrichtet.

---

[14] Im Laufe des 18. und 19. Jahrhunderts wurden sie in verschiedener Weise umformuliert und weiterentwickelt, so dass genau genommen zwischen der „Newtonschen Mechanik" (wie Newton sie ursprünglich konzipierte) und dem Oberbegriff der „klassischen Mechanik" (der Mechanik bis zur Entwicklung der Quantentheorie ab dem frühen 20. Jahrhundert) unterschieden werden kann.

[15] Vgl. Fußnote 1. Ist die Kraft nicht konstant, so können wir uns den Weg, auf dem der Körper sich bewegt, in kleine Stücke zerlegt denken, so dass entlang jedes Wegstücks die Kraft zumindest näherungsweise konstant ist. Für jedes dieser kleinen Wegstücke ergibt dann Regel (18) die Arbeitsportion, die von der Kraft am Körper entlang dieses Wegstücks verrichtet wird. Zuletzt können wir alle diese Portionen addieren und erhalten die gesamte verrichtete Arbeit.

Durchfällt nun ein Köper die Strecke h, so verrichtet die durch (14) gegebene Gewichtskraft an ihm gemäß (19) mit $\Delta s = h$ die Arbeit $m\,g\,h$. Umgekehrt ist zum Anheben des Körpers bis zur Höhe h (oder um ihn so hinauf zu werfen, dass er gerade die Höhe h erreicht) ebenfalls die Arbeit $m\,g\,h$ nötig – ganz gleich, wie man es anstellt! Diese Arbeit wird als **Hebearbeit** (oder **Hubarbeit**) bezeichnet. Fällt der Körper wieder herunter und wird von einer Hand aufgefangen und zum Stillstand gebracht, so verrichtet er an der Hand ebenfalls die Arbeit $m\,g\,h$, die damit in gewisser Weise „zurückgewonnen“ wird.

Energie

Bei der Arbeit handelt sich um eine Art „Aufwand“, der in ein System hineingesteckt werden muss oder aus ihm herausbekommen werden kann. (Man verwendet dazu am besten den Ausdruck „verrichten“). Hier kündigt sich an, dass es ein Etwas gibt, das genauso wie Geld ausgegeben oder eingenommen werden kann, dessen „Gesamtbetrag“ sich aber dadurch nicht ändert. Dieses Etwas ist die **Energie**. Wir können Energie als die „**Fähigkeit, Arbeit zu verrichten**“ definieren.

Potentielle Energie

Wenn wir also einen Körper in die Höhe heben, d.h. Hebearbeit verrichten (in ihn „hineinstecken“), so nimmt seine Energie um den gleichen Betrag zu. Wir können sie uns wieder holen, wenn wir den Körper wieder um die gleiche Strecke senken. Diese Energieform nennen wir **potentielle Energie**. Sie ist gleich der oben erwähnten Hebearbeit, also

$$E_{\text{pot}} = m\,g\,h\,, \qquad (20)$$

wobei h die Höhe in Bezug auf einen (beliebig festzusetzenden) Nullpunkt ist. Indem wir einen Körper heben, „speichern“ wir potentielle Energie in ihm – wird er abgesenkt, gewinnen wir sie wieder zurück. Nach diesem Prinzip funktioniert ein Speicherkraftwerk: Das Wasser im Stausee (das natürlich nicht von Menschen, sondern durch die *Strahlungsenergie* der Sonne in Form von Verdunsten und Abregnen vom Meer in den Stausee „angehoben“ wurde), fällt auf Turbinen, treibt diese an und leistet dadurch mechanische Arbeit (wodurch ihm zum Ausgleich potentielle Energie verloren geht). Die an den Turbinen verrichtete mechanische Arbeit konsumieren wir nicht als solche, sondern wandeln sie mit Hilfe von Generatoren in *elektromagnetische Energie* um, die zum Verbraucher transportiert werden kann, wo sie beispielsweise – indem der Staubsauger an die Steckdose angeschlossen ist – in mechanische Arbeit umgewandelt oder – indem wir den Heizstrahler aufdrehen – in *Wärmenergie* umgewandelt werden kann. Diese Kette von Ereignissen illustriert sehr schön, dass die Energie verschiedene *Formen* annehmen kann, dass sie aber – quantitativ als „Energiemenge“ betrachtet – weder verloren geht noch aus dem Nichts gewonnen werden kann.

Die potentielle Energie kann auch als „Bindungsenergie“ verstanden werden: Ein von einem Tisch heruntergefallener Körper ist stärker an die Erde „gebunden“ als ein auf dem Tisch liegender Körper der gleichen Masse. Ihn wieder anzuheben bedeutet, ihn ein Stück weit von der Erde zu lösen, und um das zu tun, muss gerade so viel Arbeit verrichtet werden wie der Portion zusätzlicher Bindungsenergie entspricht. Die *gesamte* Bindungsenergie eines

Körpers ist gleich der Arbeit, die notwendig ist, um ihn ihrem Gravitationseinfluss ganz zu entreißen und „ins Unendliche“ zu katapultieren. Diese Energie muss aufgebracht werden, um eine Rakete so abzuschießen, dass sie zwar immer langsamer wird, aber nie zurückkehrt.[16]

Kinetische Energie

Eine weitere Möglichkeit, die Fähigkeit zur Verrichtung von Arbeit zu speichern, besteht darin, einen Körper in Bewegung zu versetzen. Die entsprechende Energieform heißt **kinetische Energie** (oder **Bewegungsenergie**). Wird der Körper abgebremst, so kann er eine Maschine antreiben, wodurch die Energie wieder in Arbeit umgesetzt wird.

Üben wir unser physikalisches Verständnis ein bisschen und *berechnen* wir die kinetische Energie eines Körpers der Masse m, der sich mit Geschwindigkeit v bewegt. Dazu müssen wir folgende Frage beantworten: Wie groß ist die Arbeit, die an ihm verrichtet werden muss, um ihn aus der Ruhe auf eine Geschwindigkeit v zu bringen? Wir wollen ihn gleichmäßig beschleunigen, da wir für diese Bewegungsform die benötigten Formeln bereits zur Verfügung haben. Wenden wir also eine konstante Kraft F auf ihn an. Gemäß dem Grundgesetz (13) erfährt er eine konstante Beschleunigung $a = F/m$, wobei m seine Masse ist. Schreiben wir die Gleichungen, die diese Bewegungsform beschreiben, noch einmal an:

$$s = \frac{a}{2}\, t^2 \tag{21}$$

$$v = a\, t \tag{22}$$

Das sind gerade die Formeln (9) und (10), wobei g durch a ersetzt wurde. Die zu verrichtende Arbeit ist daher

$$W = F\, s = m \underbrace{a}_{v/t} \underbrace{s}_{at^2/2} = m \frac{v}{t} \frac{a\, t^2}{2} = \frac{m\, v\, t}{2} \underbrace{a}_{v/t} = \frac{m\, v\, t}{2} \frac{v}{t} = \frac{m\, v^2}{2}\,. \tag{23}$$

Schrecken Sie sich nicht vor dieser Rechnung! Ihr Sinn besteht lediglich darin, das Produkt $F\, s = m\, a\, s$ mit Hilfe von (21) und (22) so umzuformen, dass es nur mehr von m und v abhängt, aber nicht mehr von der ausgeübten Kraft F und daher auch nicht davon, wie lang es dauert, bis der Körper die Geschwindigkeit v besitzt. Hier haben wir also unsere Antwort: Die kinetische Energie, die unser Körper nun besitzt, ist durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{m\, v^2}{2} \tag{23}$$

gegeben – eine Formel, die sie sich merken sollten! (Wir hätten den Körper auch in einer beliebigen anderen Weise auf die Geschwindigkeit v bringen können – das Resultat wäre

[16] Eine Formel für diese Energie ist GMm/r, wobei M die Masse der Erde und r die anfängliche Entfernung der Rakete vom Erdmittelpunkt ist. In diesem Szenario wird übrigens die Wirkung der Sonne vernachlässigt, die die Rakete ja auch an sich bindet.

immer das gleiche gewesen. Um das ganz allgemein zu zeigen, ist allerdings ein bisschen Integralrechnung vonnöten.)

Die kinetische Energie vervollständigt nun das Bild, das wir uns vom Fallen eines Körpers machen können: Während seine potentielle Energie abnimmt, nimmt sein Geschwindigkeit und damit seine kinetische Energie zu, und zwar – wie wir gleich sehen werden – im gleichen Ausmaß, so dass die Summe aus kinetischer und potentieller Energie (die wir die **Gesamtenergie** nennen) einen stets gleichbleibenden Wert hat.

Potentielle und kinetische Energie beim freien Fall

Jetzt können wir einen wunderbaren Check der Aussage, dass die Gesamtenergie konstant ist, machen: Lassen wir einen Körper der Masse m aus der Ruhe von einer Höhe H herunterfallen. Der Luftwiderstand wird dabei wieder vernachlässigt. Zu Beginn besitzt der Körper (bezüglich des beliebig gewählten Nullniveaus) die potentielle Energie $m\,g\,H$, und seine kinetische Energie ist gleich 0, da seine Geschwindigkeit ja zunächst 0 ist. Nach einer gewissen Zeit t ist er ein Stück weit gefallen. Er befindet sich jetzt auf einer kleineren Höhe h, hat also insgesamt die Strecke $s = H - h$ durchfallen. Seine potentielle Energie ist jetzt nur mehr $m\,g\,h$. Um die kinetische Energie zu diesem Zeitpunkt zu berechnen, benötigen wir die Geschwindigkeit. Dazu gehen wir folgendermaßen vor: Aus dem Fallgesetz (9) folgt

$$H - h = \frac{g}{2}\,t^2, \quad \text{daher} \quad t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}, \tag{24}$$

woraus sich mit (10) die Geschwindigkeit zur Zeit t zu

$$v = g\,t = g\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = \sqrt{2g\,(H-h)} \tag{25}$$

ergibt. Die kinetische Energie ist mit (23) zu diesem Zeitpunkt daher gleich

$$E_{\text{kin}} = \frac{m\,v^2}{2} = \frac{m}{2}\,2g\,(H-h) = m\,g\,(H-h), \tag{26}$$

woraus sich die Gesamtenergie zu

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = m\,g\,(H-h) + m\,g\,h = m\,g\,H \tag{27}$$

ergibt. Sie hängt nicht von der Zeit ab, ist also eine **Erhaltungsgröße**! Sehen Sie sich das Ergebnis genauer an: $m\,g\,H$ ist nichts anderes als die potentielle Energie, die der Körper zu Beginn der Bewegung hatte (als die kinetische Energie 0 war). Während des Falls wird die potentielle Energie immer kleiner, aber zum Ausgleich wächst die Geschwindigkeit und damit die kinetische Energie, und zwar genau so, dass die Summe dieser beiden Energieformen (die Gesamtenergie) konstant bleibt!

Beim Hinaufwerfen eines Körpers passiert das Umgekehrte: die potentielle Energie wächst auf Kosten der kinetischen Energie, aber die Gesamtenergie bleibt konstant.

Energieerhaltung

Dieses schöne Ergebnis ist ein Spezialfall eines viel umfassenderen Prinzips: Der **Satz von der Erhaltung der Energie** besagt, dass die in einem abgeschlossenen System (also einem System, das mit seiner Umgebung nicht wechselwirkt) enthaltene Gesamtenergie konstant ist, d.h. sich mit der Zeit nicht ändert. Dieser Satz kann (ähnlich, wie wir es für den freien Fall demonstriert haben) für viele andere mechanische Systeme bewiesen werden, umfasst aber auch nicht-mechanische Energieformen wie die Bindungsenergie von Atomen und Molekülen in Festkörpern und Flüssigkeiten, die Bindungsenergie von Atomen in Molekülen (die „chemische Energie"), die Bindungsenergie von Bausteinen der Atomkerne (die „Kernenergie", fälschlicherweise auch als „Atomenergie" bezeichnet) und die so genannte „Ruheenergie", die ein Körper nach der Relativitätstheorie lediglich aufgrund seiner Masse besitzt. Auch die Wärmeenergie zählt dazu – sie lässt sich (unter einem mikroskopischen Blick) auf die kinetische Energie der Atome und Moleküle zurückführen. Und schließlich können auch Felder (wie das elektromagnetische Feld) Energie besitzen.

Der Satz von der Erhaltung der Energie wird in der modernen Physik mit dem Zeitfluss in Verbindung gebracht. (Ein bisschen vereinfacht gesagt, folgt er daraus, dass es „keinen ausgezeichneten Zeitpunkt" gibt). Rein theoretisch wären Kräfte denkbar, die zu Bewegungsabläufen führen, in denen die Gesamtenergie nicht erhalten ist. Eine solche Kraft wurde aber in der Natur nie beobachtet, so dass der Satz von der Erhaltung der Energie mittlerweile als fundamentales Prinzip angesehen werden kann.[17]

Perpetuum Mobile

Aus dem Satz von der Erhaltung der Energie folgt, dass es keine Maschine geben kann, die ohne Energiezufuhr Arbeit leistet. Eine solche Maschine würde man als **Perpetuum Mobile** bezeichnen. Achtung: Eine endlos ablaufende Bewegung (wie die ständige Umrundung der Erde durch einen Satelliten) ist noch kein Perpetuum Mobile, denn sie leistet keine Arbeit. (Würde man einen Satelliten dazu nutzen, um Arbeit zu verrichten, so müsste man ihm Energie entziehen, wodurch er abstürzen würde).

Leistung

Um einem System Energie zuzuführen oder ihm Energie zu entziehen, kann man sich beeilen oder Zeit lassen – wie beim Kassieren und Zahlen: Ob 1000 Euro sofort bezahlt oder in Raten abgestottert werden, ändert an der gesamten Geldmenge nichts. Manchmal wollen wir aber wissen, wie schnell eine bestimmte Energiemenge verfügbar ist oder wie lange es dauert, um eine bestimmte Arbeit zu verrichten. Also ist wieder eine *Rate* gefragt. Die **Leistung** ist die Arbeit, die pro Zeitintervall verrichtet wird:

$$P = \frac{\text{verrichtete Arbeit}}{\text{dafür benötigte Zeit}} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \tag{28}$$

[17] Im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts sah es so aus, als wäre der Energiesatz in einer Elementarteilchenreaktion (dem so genannten Beta-Zerfall) verletzt. Der aus Österreich stammende Physiker Wolfgang Pauli hielt aber an der Gültigkeit der Energieerhaltung fest und postulierte im Jahr 1930 ein bis dahin unentdecktes Elementarteilchen, das die fehlende Energie mit sich forttrӓgt und damit den (falschen) Eindruck einer Nicht-Erhaltung bewirkt. 26 Jahre später wurde es tatsächlich beobachtet: das *Neutrino* – so gesehen ein österreichisches Elementarteilchen!

Analog wird auch die pro Zeiteinheit (etwa von einem Kraftwerk) aufgebrachte Energiemenge als Leistung bezeichnet.

Beachten Sie: Die SI-Einheit der Arbeit und der Energie ist das Joule (J). Die SI-Einheit der Leistung ist daher J/s, was auch als Watt (W) bezeichnet wird. 1 Joule ist daher eine Wattsekunde (Ws). Daraus ergibt sich, dass

- die Leistung eines Kraftwerks üblicherweise in Vielfachen von Watt angegeben wird, etwa in Megawatt (MW),
- eine bestimmte Energiemenge, die Sie der Kraftwerksgesellschaft (über Ihre Stromrechnung) bezahlen müssen, aber in Vielfachen von Wattsekunden, etwa in Kilowattstunden (kWh).

Aufgabe 1: Finden Sie heraus, wie viel der Haushalt, in dem Sie leben, für eine Kilowattstunde an (über das Stromnetz bezogene) Energie bezahlen muss!

Aufgabe 2 (basierend auf der vorigen Aufgabe): Wie viel kostet es dem Haushalt, in dem Sie leben, einen Heizstrahler, auf dem eine Leistung von 2000 W vermerkt ist, eine Stunde lang in Betrieb zu nehmen?

Aufgabe 3: Welche Masse müssen Sie 1 m hoch heben, um eine Arbeit von 1 kWh zu verrichten?

Aufgabe 4: Eine weitere Einheit der Energie ist die Kalorie (1 cal = 4,1868 J, daher 1 kcal = 4186,8 J). Die bei der Umsetzung von Nahrung gewonnene Energie wird in der Regel in kcal oder kJ angegeben. Die entsprechenden Werte sind auf Lebensmittelverpackungen angegeben und können Nährwerttabellen entnommen werden (z.B. http://www.naehrwerttabelle.de/main/tabelle.htm). Der menschliche Körper benötigt als „Grundumsatz" eine bestimmte, von Geschlecht, Gewicht, Körpergröße und Alter abhängige Energiemenge pro Tag. Mit den in http://www.gesumag.de/kalorien-grundumsatz-pro-tag-60/ angegebenen Formeln können Sie einen Richtwert für sich berechnen. Welche Masse müssten Sie 1 m hoch heben, um eine Arbeit zu verrichten, die Ihrem täglichen Grundumsatz entspricht?

Impuls und Impulserhaltung, Stoßgesetze

Impuls und Impulserhaltung

Bewegt sich ein Körper der Masse m mit Geschwindigkeit v, so ist sein **Impuls** durch das Produkt

$$p = m v \tag{29}$$

definiert. Den Impuls kann man sich als ein Maß für die „Wucht" vorstellen, mit der ein bewegter Körper auf ein Hindernis stößt. Ebenso wie die Gesamtenergie ist die Summe aller in einem abgeschlossenen System enthaltenen Impulse (d.h. der **Gesamtimpuls**) eine **Erhaltungsgröße**.

Die zeitliche Änderungsrate des Impulses ist die Kraft. Das Grundgesetz der Mechanik kann also anstelle von $F = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$ auch in der Form $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ geschrieben werden. (Das ist Newtons ursprüngliche Formulierung).

Stoßgesetze

Aus der Erhaltung der Energie und des Impulses eines abgeschlossenen Systems können wir uns Aufschluss über den Ablauf von Stoßprozessen verschaffen, wobei es auf die Details, wie die Stöße im Einzelnen ablaufen, nicht ankommt. Bei einem *elastischen* Stoß wird die gesamte kinetische Energie der Partner *vor* dem Stoß in kinetische Energie der Partner *nach* dem Stoß umgewandelt. Bei einem *inelastischen* Stoß wird ein Teil der kinetischen Energie in andere Energieformen umgewandelt (z.B. Wärme), geht also aus dem Blickwinkel der Mechanik verloren.

Für elastische Stöße ist es recht einfach, eine Energie- und Impulsbilanz aufzustellen. Hier ein Beispiel: Ein Körper der Masse m stößt mit Geschwindigkeit v auf einen ruhenden Körper der gleichen Masse. Was wird passieren? Nehmen wir an, der Stoß sei elastisch, und nach dem Stoß bewegen sich die Körper mit den Geschwindigkeiten u und w. Die Energiebilanz sieht so aus:

$$E_{\text{vor dem Stoß}} = \frac{mv^2}{2}, \qquad E_{\text{nach dem Stoß}} = \frac{mu^2}{2} + \frac{mw^2}{2}. \tag{30}$$

Die Impulsbilanz sieht so aus:

$$p_{\text{vor dem Stoß}} = mv, \qquad p_{\text{nach dem Stoß}} = mu + mw. \tag{31}$$

Sind Energie und Impuls erhalten, so folgen die beiden Gleichungen

$$v^2 = u^2 + w^2 \quad \text{und} \quad v = u + w. \tag{32}$$

Quadrieren wir die zweite ($v^2 = (u+w)^2 = u^2 + w^2 + 2\,u\,w$) und benutzen die erste, so folgt:

$$v^2 = \underbrace{u^2 + w^2}_{v^2} + 2\,u\,w, \qquad \text{daher} \qquad u\,w = 0. \tag{33}$$

Da zwei Zahlen nur dann 0 sein können, wenn zumindest eine von beiden 0 ist, folgern wir, dass nach dem Stoß einer der beiden Körper ruht. Der andere bewegt sich dann aufgrund der zweiten Gleichung in (32) mit Geschwindigkeit v. Es gibt also nur zwei Möglichkeiten: Entweder es findet gar keine Wechselwirkung statt (theoretisch möglich!) oder der zuerst bewegte Körper kommt exakt zur Ruhe und überträgt dem anderen seine ursprüngliche Geschwindigkeit. Eine andere Möglichkeit gibt es nicht (sofern der Stoß elastisch ist und ein Ausweichen in andere Richtungen unterbunden wird)!

> Aufgabe: Rechnen Sie einen elastischen Stoß durch, bei dem ein Körper der Masse m auf einen ruhenden Körper der Masse $2m$ stößt!

Nachbemerkung: Die Teilchenphysik kennt Stoßprozesse, in denen sich die Identitäten (und daher auch die Massen) der Stoßpartner ändern. Um solche Prozesse zu beschreiben, geht man ähnlich vor wie in unserem Beispiel, muss allerdings die Relativitätstheorie verwenden, in der Energien und Impulse durch andere Formeln beschrieben werden.

Drehbewegung, Drehimpuls, Drehimpulserhaltung und die Bewegung von Satelliten

Drehbewegung und Winkelgeschwindigkeit

Die Drehbewegung kann in mancher Hinsicht analog zur geradlinigen Bewegung behandelt werden. Dabei sind zwei (idealtypische) Varianten zu unterscheiden:

- Ein Körper bewegt sich auf einer Kreisbahn, ist aber selbst viel kleiner als der Radius des Kreises und kann daher als Punkt angesehen werden (wie etwa die Erde auf ihrer – fast kreisförmigen – Bahn um die Sonne).
- Ein Körper dreht sich um seine eigene Achse (etwa ein Kreisel oder die Erde während ihrer täglichen Rotation).

Wie „schnell" solche Bewegungen aus der Sicht eines Beobachters im Zentrum oder auf der Drehachse ablaufen, kann mit dem Begriff der **Winkelgeschwindigkeit** ω (überstrichener Winkel pro Zeitintervall) beschrieben werden. Dabei wird der Winkel meist im Bogenmaß angegeben, in dem ein voller Winkel (also im Gradmaß 360°) 2π entspricht. Die Winkelgeschwindigkeit kann als Vektor aufgefasst werden, der in die Richtung der Drehachse zeigt. Seine Orientierung ist dann durch die Rechtsschraubenregel festgelegt.

Drehimpuls und Drehimpulserhaltung

Für einen auf einer Kreisbahn bewegten Körper ist der **Drehimpuls** durch

$$L = m\,\omega\,r^2 \tag{34}$$

definiert, wobei r der Radius der Kreisbahn ist. Einen Körper, der sich um seine eigene Achse dreht, kann man sich aus vielen kleinen „Massenelementen" zusammengesetzt denken, die sich alle auf Kreisbahnen bewegen. Werden die gemäß (34) berechneten Drehimpulse all dieser Massenelemente addiert, so ergibt sich der gesamte Drehimpuls des Körpers. Wirkt keine äußere Kraft auf den Körper, so ist sein Drehimpuls eine **Erhaltungsgröße**.

Dies erklärt den Pirouetteneffekt beim Eiskunstlauf: Werden die Arme an den Körper herangezogen (d.h. wird das r der Arme verkleinert), so muss, damit der gesamte Drehimpulses des Körpers erhalten bleibt, gemäß (34) die Winkelgeschwindigkeit ω größer werden.

Auch dem Drehimpuls wird eine Richtung zugeordnet. Für eine Bewegung um eine fixe Drehachse ist der Drehimpulsvektor parallel und gleichgerichtet zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit. (Für kompliziertere, „torkelnde" Bewegungen kann sie auch davon abweichen). Der Drehimpuls der Eigenrotation der Erde weist nach Norden. (Man stellt sich ihn am besten mit dem Schaft an den Erdmittelpunkt angeheftet vor.)

> Aufgabe: Wie verhält sich der Drehimpuls(vektor) beim Schaukeln? Warum ist er nicht erhalten?

Drehmoment und Hebelgesetz

Ergänzend erwähnen wir, dass der Begriff der Kraft bei der Drehbewegung ein Analogon besitzt: das **Drehmoment** (Kurzformel: „Kraft mal Kraftarm"). Der Kräftefreiheit entspricht das Aufheben der Drehmomente, das direkt auf das so genannte **Hebelgesetz** führt. Es besagt: Das Produkt „Masse mal Hebel-Länge" ist auf beiden Seiten eines Hebels gleich. Daraus ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, Massen zu vergleichen (und nach entsprechender Eichung zu messen). Eine Reihe von Waagen ist nach diesem Prinzip konstruiert.

Kreisbahn

Betrachten wir nun einen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn rotierenden Körpers etwas genauer. Seine Winkelgeschwindigkeit hängt mit seiner Geschwindigkeit v (entlang der Kreisbahn) über die Beziehung

$$v = \omega\, r \tag{35}$$

zusammen. Sein Beschleunigungsvektor (die so genannte **Zentripetalbeschleunigung**) zeigt, wie bereits früher erwähnt, vom Körper zum Zentrum. Sein Betrag ist durch

$$a = \omega^2\, r = \frac{v^2}{r} \tag{36}$$

gegeben. (Der Beweis von (35) ist ganz leicht, der Beweis von (36) ist ein bisschen schwieriger. Wir verzichten hier auf beide Beweise.)

Satellitenbewegung

Die Beziehung (36) gibt uns die Möglichkeit, das Grundgesetz der Mechanik ein letztes Mal auf ein berühmtes Problem anzuwenden und seine Tragweite nachzuvollziehen: Wie schnell rotiert ein Satellit unter der Wirkung der Schwerkraft auf einer Kreisbahn um einen Zentralkörper (also etwa die Erde um die Sonne oder der Mond um die Erde)? Wenden wir das Grundgesetz in der Form (13'), das Gravitationsgesetz (15) und Formel (36) an: Wir erhalten

$$\frac{G\,M\,m}{r^2} = m\,a\,, \quad \text{daher, mit (36),} \quad \frac{G\,M\,m}{r^2} = m\,\omega^2\,r\,, \quad \text{folglich} \quad \frac{G\,M}{r^2} = \omega^2\,r\,, \tag{37}$$

wobei M die Masse des Zentralkörpers ist. Die Masse m des Satelliten hat sich herausgekürzt – von ihr hängt die Bewegung nicht ab!

Betrachten Sie die in der letzten Gleichung von (37) vorkommenden Symbole nun genauer: Für die Bewegung der Erde um die Sonne ist ω bekannt: 1 Umlauf pro Jahr entspricht, ins Bogenmaß umgerechnet, einer Winkelgeschwindigkeit von

$$\omega = 2\pi\,/\,\text{Jahr} = \frac{2\pi}{365,25\cdot 24\cdot 3600}\,/\,\text{s} = 2\cdot 10^{-7}\,/\,\text{s}\,. \tag{38}$$

Die Entfernung r der Erde zur Sonne kann mit astronomischen Methoden gemessen werden.[18] Sie beträgt 150 Millionen Kilometer. Die Gravitationskonstante ist ebenfalls bekannt (siehe Fußnote 9). Damit kann die Sonnenmasse M bestimmt werden!

> Aufgabe: Berechnen Sie die Masse der Sonne!
> Vergleichen Sie mit Werten aus der Literatur!

Generell ist (37) – bzw. seine Verallgemeinerung auf Ellipsenbahnen (das so genannte **Dritte Keplersche Gesetz**) – in der Astrophysik die wichtigste Methode, die Massen von Himmelskörpern aus den Bahndaten ihrer Satelliten zu bestimmen.

> Aufgabe: Benutzen Sie die letzte Formel in (37), um vorherzusagen, wie lange ein um die Erde kreisender Satellit (in einer erdnahen Umlaufbahn – sie können für r einfach den Erdradius setzen) für einen Umlauf braucht! (Für M setzen Sie natürlich die Erdmasse ein.)

[18] Sie kann bestimmt werden, indem ein „Venustransit", d.h. das Vorbeiziehen der Venus vor der Sonnenscheibe (wie er pro Jahrhundert höchstens zweimal auftritt), von verschiedenen Punkten der Erde aus beobachtet wird. Das wurde zum ersten Mal im 18. Jahrhundert durchgeführt (siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Venustransit).

Fragen zur Selbstprüfung

Versuchen Sie, die folgenden Fragen einigermaßen in der gleichen Ausführlichkeit (inklusive argumentative Begründungen und Formeln) zu beantworten, mit der sie im Text behandelt werden!

Ein Tipp: Wenn Sie eine Frage nicht auf Anhieb beantworten können, so lesen Sie die entsprechenden Textstellen noch einmal durch. Schreiben Sie sich die wichtigsten Formeln und einige Stichworte heraus, legen Sie dann den Text beiseite und beantworten Sie die Frage – nur mit Ihren selbstgeschriebenen Unterlagen ausgerüstet – noch einmal!

- Wie ist die Geschwindigkeit definiert? Was ist der Unterschied zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit und der Momentangeschwindigkeit?
- Was bedeutet das Symbol Δ, das in so vielen physikalischen Formeln steht?
- Was bedeutet der Begriff Vektor? Geben Sie einige physikalische Größen an, die Vektoren sind!
- Erklären Sie die Formel $s = v\,t$ in Worten! Für welche Bewegungsform gilt sie?
- Was bedeutet der Begriff gleichförmige Bewegung?
- Wie ist die Beschleunigung definiert?
- Was soll man sich unter der Einheit der Beschleunigung (m/s^2) vorstellen? Wie kommt sie zustande?
- Was besagt das Fallgesetz?
- Was ist die Erdbeschleunigung? Welchen Wert hat sie? Was kann man vorhersagen, wenn man ihren Wert kennt?
- Erklären Sie die Formel $s = \frac{g}{2} t^2$ in Worten! Für welche Bewegungsform gilt sie?
- Was unterscheidet die neuzeitliche von der antiken Auffassung über die Ursache von Bewegungen?
- Was besagt das Grundgesetz der Mechanik (in Worten und in einer Formel)?
- Wozu ist das Grundgesetz der Mechanik gut? Wieso ist es so wichtig?
- Was besagt der Trägheitssatz?
- Was ist die Gewichtskraft? Wie hängt sie mit der Masse zusammen?
- Wie werden Kräfte, die auf einen Körper wirken, addiert?
- Was ist eine „resultierende Kraft“?
- Wie lautet das Dritte Newtonsche Axiom?
- Was besagt das Newtonsche Gravitationsgesetz (in Worten und in einer Formel)?
- Was fällt Ihnen zum Stichwort „Erstes Keplersches Gesetz“ ein?
- Wie kann die Masse der Erde bestimmt werden, wenn die Erdbeschleunigung und der Erdradius bekannt sind?
- Wie kann man die Gewichtskraft, die ein Körper auf einem anderen Himmelskörper hätte, berechnen? Was muss man dazu über diesen anderen Himmelskörper wissen?
- Wovon hängen Reibungskräfte normalerweise ab?
- Was ist ein „Axiom“?
- Was ist (mechanische) Arbeit?

- Was ist die potentielle Energie?
- Was ist die kinetische Energie?
- Welche Energieformen werden noch im Text erwähnt?
- Was besagt der Satz von der Erhaltung der Energie? (Genaue Formulierung!)
- Was ist ein Perpetuum Mobile?
- Was ist Leistung?
- Erklären Sie die Bezeichnungen „Kilowatt“ und „Kilowattstunde“ und ihr Verhältnis zueinander!
- Nennen Sie einige physikalische Erhaltungsgrößen!
- Was ist der Impuls?
- Erläutern Sie die Energie- und Impulserhaltung anhand eines einfachen Stoßprozesses!
- Was ist die Winkelgeschwindigkeit?
- Was ist der Drehimpuls?
- Was ist der Pirouetteneffekt beim Eiskunstlauf, und wie kann er erklärt werden?
- Welche Gesetze müssen verwendet werden, um die (kreisförmige) Bewegung eines Satelliten um einen Zentralkörper unter der Wirkung der Gravitationskraft vorherzusagen?
- Wie bestimmt die Astrophysik die Massen von Himmelskörpern?
- Was fällt Ihnen zum Stichwort „Drittes Keplersches Gesetz“ ein?
- Führen Sie einem „Wissenschaftsskeptiker“ einige der großen Triumphe der Physik (wie sie im Text beschrieben werden) vor Augen!
- Im Text werden die Namen einiger weniger bedeutender Physiker genannt. Welcher? In welchen Zusammenhängen treten sie auf?

Und wenn Sie Ihr Verständnis noch eingehender überprüfen (und fördern) wollen, machen Sie Folgendes:

- Manche der nummerierten Formeln im Text sind

  - Definitionen (also Festsetzungen oder „Benennungen“), manche sind
  - Grundannahmen (die wahr oder falsch sein können, also im Prinzip durch Beobachtungen bestätigt oder widerlegt werden können), und manche sind
  - Folgerungen (von etwas Vorhergehendem). Einige wenige sind
  - Beispiele.

  Schreiben Sie zu jeder dieser Formeln dazu, ob es sich um eine Definition (D), um eine Grundannahme (G), um eine Folgerung (F) oder um ein Beispiel (B) handelt!

  (In wenigen Fällen ist die Zuordnung nicht ganz eindeutig, aber das finden Sie am besten selbst heraus!)

Dieses Skriptum finden Sie im Web unter http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/KPH/. Es unterstützt die Lehrveranstaltung „Physikalische Grundlagen – Mechanik und Wärmelehre“ an der KPH Wien vom WS 2011/12.