5228.031 SE Angewandte Mathematik

KPH Wien, SS 2013

Franz Embacher

Modus:

- Seminarvorträge in 2er-Teams (ca. 30 Minuten, so dass pro Termin etwa 15 Minuten für Diskussionen zur Verfügung stehen). Jedes 2er-Team wählt eine Problemstellung/ein Thema. Das Problem/Thema des Referats soll in einen sachlogischen (mathematischen), didaktischen und methodischen Zusammenhang gestellt werden.

  (Wie kann man die Aufgabe lösen, auf welchem mathematischen Hintergrund beruht die Lösungsmethode, welchen didaktischen Sinn hat die Aufgabe, welche Kompetenzen werden mit ihr angesprochen/gefördert, wie lässt sich die Aufgabe methodisch in den Unterricht einbauen, was muss vorher bekannt sein, wie könnte man danach weitergehen,…?)

  Werden Unterrichtssequenzen durchgespielt, so nehmen alle anderen TeilnehmerInnen die Rolle der SchülerInnen ein.

  Die ReferentInnen verfassen gemeinsam eine Seminararbeit (5 – 10 Seiten) und laden sie innerhalb einer Woche in den Moodle-Bereich der LV hoch.
- Alle *anderen* TeilnehmerInnen laden nach jedem LV-Termin innerhalb einer Woche eine Stundenzusammenfassung von 2 – 3 Seiten in den Moodle-Bereich der LV hoch.
- In die Benotung gehen ein:
  - Referate und Seminararbeiten
  - Stundenzusammenfassungen

  Abwesenheiten sollten trotz der heurigen ungünstigen Umstände auf das mögliche Minimum beschränkt sein.

Themen der Referate:

Es handelt sich um Themen und Aufgaben unterschiedlichen Typs. Manche der Themen sind im Unterricht nicht „schnell“ abzuhandeln, sondern benötigen ihre Zeit und machen ein projekt-artiges Herangehen mit entsprechender Vorbereitung sinnvoll. Lassen Sie sich nicht dadurch beirren, dass manche Aufgaben „an der Grenze“ zwischen Sek 1 und Sek 2 angesiedelt sind!

Im Folgenden die Liste der Referatsthemen.

1. Geschwindigkeit:

Spielen Sie folgende **Aufgaben für SchülerInnen** durch und beleuchten Sie ihren didaktischen Hintergrund:

a.) Was bedeutet der Begriff „Geschwindigkeit“ für ein Objekt, das sich immer gleich schnell bewegt, eigentlich genau?

- Mit welcher Geschwindigkeit musst du gehen, um eine Strecke von 3 km in 45 min zurückzulegen?
- Das Licht bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 300000 km/s. Von der Sonne zur Erde benötigt es 8 Minuten und 20 Sekunden. Wie weit ist die Sonne von der Erde entfernt?
- Die Städte A und B sind 126 km voneinander entfernt. Zwischen ihnen verläuft eine gerade Eisenbahnlinie. Wie lange benötigt ein Zug, der mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h fährt, von A nach B, wenn er dazwischen keinen Halt macht?

b.) Und nun rechnen wir mit Buchstaben: Um mit der Geschwindigkeit v eine Strecke s zurückzulegen, ist eine Zeitspanne t nötig. Stelle eine Gleichung zwischen v, s und t auf, die immer richtig ist, unabhängig davon, welche Zahlenwerte für diese Buchstaben eingesetzt werden!

2. Beschleunigung:

Spielen Sie folgende **Aufgaben für SchülerInnen** durch und beleuchten Sie ihren didaktischen Hintergrund:

a.) Ein Stein fällt von einem hohen Felsvorsprung ins Meer. Dabei wird er immer schneller.

- Zu Beginn hat er die Geschwindigkeit 0.
- Nach einer Sekunde hat er die Geschwindigkeit 10 m/s.
- Nach einer weiteren Sekunde hat er die Geschwindigkeit 20 m/s.
- Nach einer weiteren Sekunde hat er die Geschwindigkeit 30 m/s.
- Nach einer weiteren Sekunde hat er die Geschwindigkeit 40 m/s und platscht ins Wasser.

Kannst du in Worten beschreiben, wie sich seine Geschwindigkeit erhöht? Um welchen Betrag nimmt seine Geschwindigkeit pro Sekunde zu?

b.) Ein Angeber sagt: „Mein Auto beschleunigt in 5 Sekunden von 0 auf 100km/h.“ Wenn die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um den gleichen Betrag zuwächst – wie schnell fährt sein Auto

- 1 Sekunde nach dem Start,
- 2 Sekunden nach dem Start,
- 3 Sekunden nach dem Start,
- 4 Sekunden nach dem Start,
- 5 Sekunden nach dem Start?

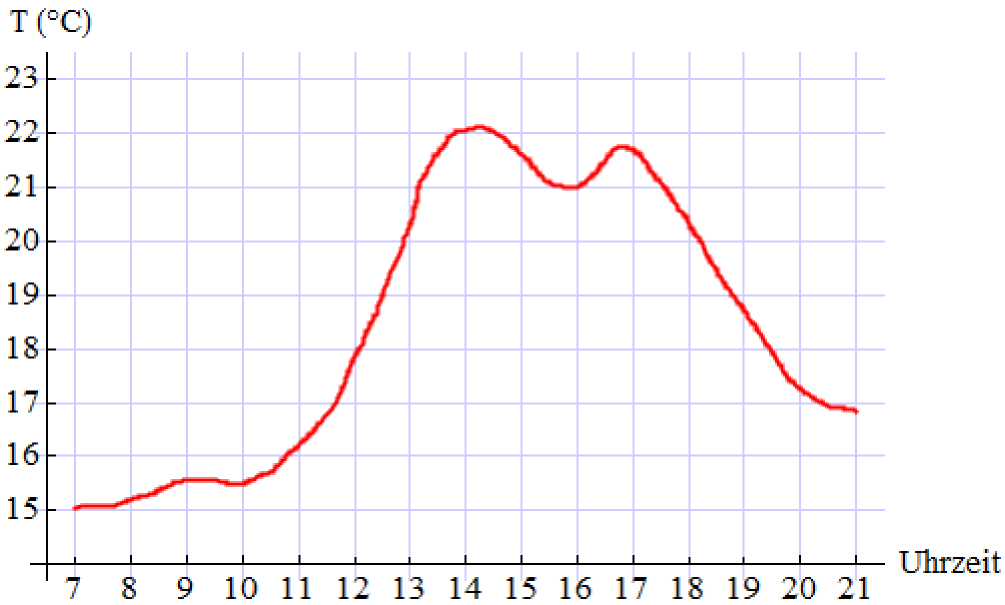
c.) Eine Raumfahrt-Technikerin sagt: „Diese Rakete hebt mit einer Beschleunigung von 20 m/s^2 ab.“ Was meint sie damit? Wie schnell ist die Rakete 10 s nach dem Start?

d.) Physiker sprechen die Einheit „m/s^2“ oft als „Meter pro Sekundenquadrat“ aus. Was meinen sie damit? (Schließlich wissen wir ja alle, was eine Sekunde ist, aber was soll ein „Sekundenquadrat“ sein?)

3. Visualisierung von Zeitentwicklungen:

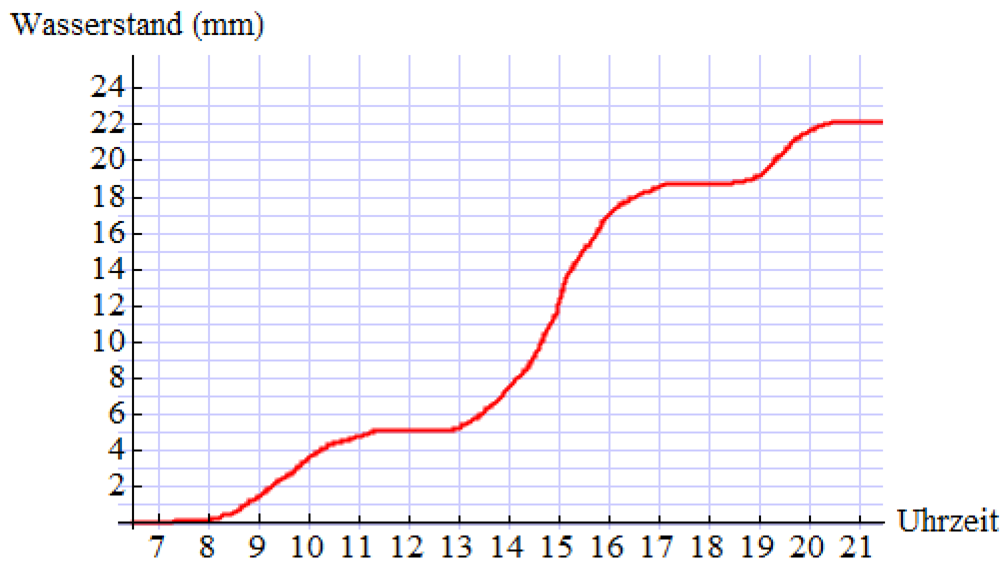
Spielen Sie folgende **Aufgaben für SchülerInnen** durch und beleuchten Sie ihren didaktischen Hintergrund:

a.) Das folgende Diagramm zeigt die Temperatur an einem bestimmten Ort während eines Tages in Abhängigkeit von der Zeit.



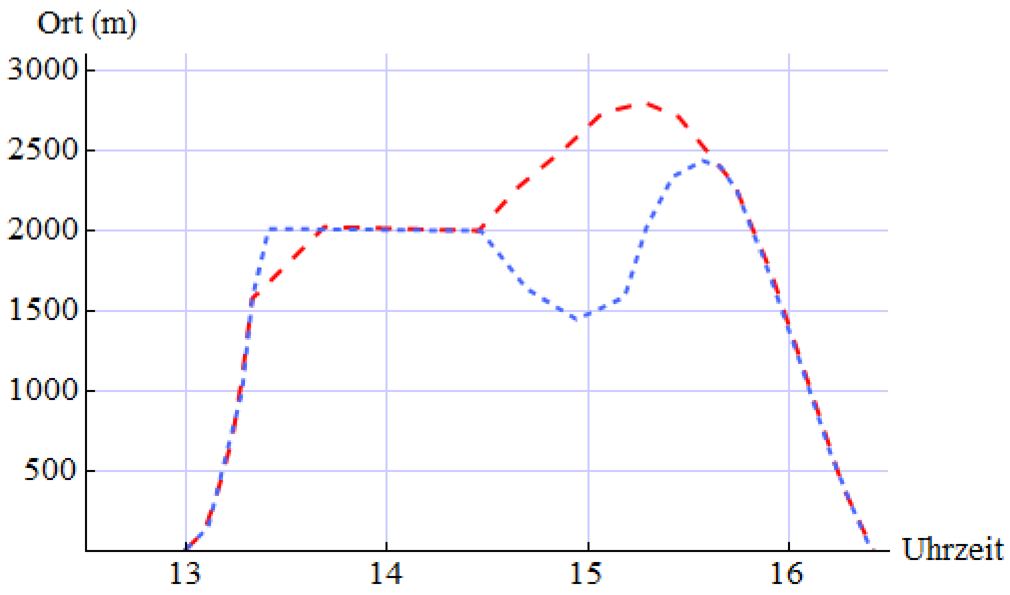
Wie könnte ein solcher Temperaturverlauf zustande kommen? Erzähle!

b.) Das folgende Diagramm zeigt den Wasserstand in einem offenen (zylinderförmigen) Gefäß, in das es hineinregnen kann, in Abhängigkeit von der Zeit.



Cornelia jammert über einen solchen Regentag! Wie beschreibt sie ihn?

c.) Armin und Bettina machen einen Spaziergang auf einer Landstraße. Im folgenden Diagramm ist dargestellt, wo sich Armin (rot) und Bettina (blau) [angegeben als Entfernung vom Ausgangspunkt] jeweils zu einer gegebenen Zeit befinden.



Erzähle eine Geschichte, was die beiden tun!

4. Zug und Baustelle:

Spielen Sie folgende **Aufgabe für SchülerInnen** durch und beleuchten Sie ihren didaktischen Hintergrund:

Von der Lokomotive eines Eisenbahnzugs wird durch das automatische Sicherheitssystem jede Minute die Position (in km vom Abfahrtbahnhof) ermittelt und aufgezeichnet:

Vergangene Zeit (ab Abfahrt) in Minuten	Position (Entfernung vom Abfahrtsbahnhof) in Kilometern
1	0,32
2	0,67
3	1,12
4	1,67
5	2,32
6	3,07
7	3,92
8	4,87
9	5,92
10	6,67
11	7,07
12	7,40
13	7,73
14	8,08
15	8,53
16	9,08
17	9,73
18	10,48
19	11,33
20	12,28
21	13,33
22	14,48
23	15,68
24	16,93
25	18,23

Wie ist die Fahrt verlaufen? Kannst du herausfinden, wo auf der Strecke sich eine Baustelle befindet, die zum Langsamfahren zwingt? Tipp: Visualisiere die Daten in einem „grafischen Fahrplan“!

5. Taschengeld:

Spielen Sie folgende **Aufgabe für SchülerInnen** durch und beleuchten Sie ihren didaktischen Hintergrund:

Anlässlich von Dominiks 10. Geburtstag wollen seine Eltern mit ihm eine Vereinbarung für sein monatliches Taschengeld während der nächsten zwei Jahre treffen. Im ersten Monat bekommt er 20 Euro. Nun hat er die Wahl:

a. Er bekommt jeden Monat um 1 Euro mehr Taschengeld als im vorangegangenen.
b. Er bekommt jeden Monat um 4% mehr Taschengeld als im vorangegangenen.

Wie soll er sich entscheiden? Hilf ihm durch Berechnungen und durch eine geeignete Visualisierung! Worin besteht für Dominik der Unterschied? Benutze ein Tabellenkalkulationsprogramm, um zu ermitteln, wie viel Taschengeld er insgesamt während zweier Jahre bei den beiden Varianten bekommen wird!

6. Radioaktiver Zerfall:

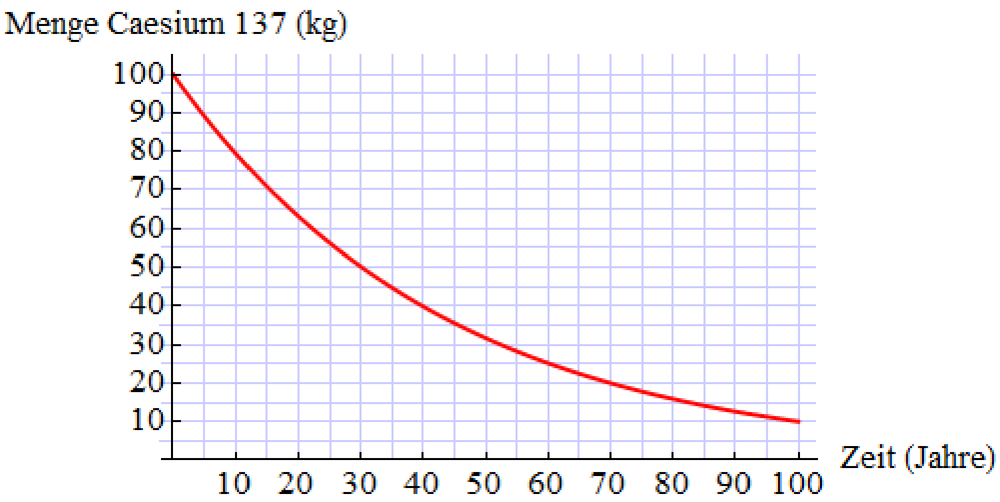
Spielen Sie folgende **Aufgaben für SchülerInnen** durch und beleuchten Sie ihren didaktischen Hintergrund:

a.) Das radioaktive Element Caesium 137, das im Inneren von Kernkraftwerken vorkommt, wandelt sich im Lauf der Zeit in andere Elemente um, die nicht radioaktiv sind. Nach einem Jahr ist eine gegebene Menge Caesium 137 auf 0.977287 der ursprünglichen Menge abgesunken. Berechne, welche Menge an Caesium 137 (verglichen mit der ursprünglichen)

- nach 2 Jahren
- nach 3 Jahren
- nach 5 Jahren
- nach 10 Jahren
- nach 30 Jahren
- nach 50 Jahren
- nach 100 Jahren

noch vorhanden ist! (Verwende dazu einen geeigneten Rechner!) Schätze aus deinen Ergebnissen ab, nach welcher Zeit die Menge an Caesium 137 auf die Hälfte ihres ursprünglichen Werts abgesunken ist! (Diese Zeit nennt man „Halbwertszeit").

b.) Das folgende Diagramm zeigt, wie viel von 100 kg Caesium 137 im Laufe der Zeit noch übrig ist.



Überprüfe anhand dieses Diagramms die Werte, die du in Aufgabe a.) für die verbleibende Menge an Caesium 137 nach 5, 10, 30, 50 und 100 Jahren herausbekommen hast!
Um welchen Faktor fällt die Menge an Caesium 137 während der ersten 30 Jahre ab?
Um welchen Faktor fällt die Menge an Caesium 137 zwischen den Jahren 20 und 50 ab?
Um welchen Faktor fällt die Menge an Caesium 137 zwischen den Jahren 30 und 60 ab?
Um welchen Faktor fällt die Menge an Caesium 137 zwischen den Jahren 40 und 70 ab?
Fällt dir etwas auf?

7. Astronomische Entfernungen:

Wie können Sie SchülerInnen folgende Größenordnungen (mit Hilfe der Zehnerpotenz-Schreibweise, durch Vergleiche, durch Lichtlaufzeiten und durch maßstäbliche Verkleinerungen) nahebringen:

- Größe von Österreich
- Radius der Erde
- Abstand Erde – Mond
- Abstand Erde – Sonne
- Radien der Planetenbahnen[1]
- Größe des Planetensystems
- Entfernung zu den nächsten Sternen
- Größe der Milchstraße

Machen Sie, ausgehend davon, dass eine Reise zum Mond bei heutiger Technologie wenige Tage benötigt, grobe Abschätzungen, wie lange eine Reise

- zum Mars
- an die Grenze des Planetensystems
- zum nächsten Stern
- quer durch die Milchstraße

dauern würde[2].

[1] Planetenbahnen sind zwar keine Kreise (weshalb man genau genommen nicht von „Radien" sprechen kann), aber sie können näherungsweise als Kreise angesehen werden.

[2] Da Raumschiffe zu anderen Himmelskörpern nicht allein durch die eigene Antriebskraft beschleunigt werden, sondern vorhandene Gravitationsfelder nutzen, kann sich hier nur um sehr große Schätzungen handeln.

8. Logarithmus:

Der Logarithmus ist Thema des Mathematikunterrichts der Sek 2. Wie kann die Idee, die ihm zugrunde liegt, anhand praktischer Beispiele bereits in der Sek 1 vorbereitet werden?

Tipp: Die Idee des Logarithmus ergibt sich beispielsweise, indem Zahlen, die einen erheblichen Größenordnungsbereich abdecken, näherungsweise („größenordnungsmäßig“) als Zehnerpotenzen ausgedrückt und in einer Zeichnung (auf einer „logarithmischen Skala“) visualisiert werden, etwa

- die Größen oder Massen von Lebewesen (von Viren bis zu den größten Pilzgeflechten, siehe etwa den – für die Sek 2 konzipierten – „Exkurs über die Nützlichkeit des Logarithmus“ unter http://www.mathe-online.at/mathint/log/i.html#ExkursLog),
- die Entfernungen zu Himmelskörpern (über Mond und Sonne zu anderen Planeten, benachbarten Sternen, dem Zentrum unserer Galaxie bis zu anderen Galaxien),
- die Größenordnungen vom Atom bis zu typischen Längen, die in unserem Alltag auftreten
- oder die Wellenlängen der elektromagnetischen Strahlung von Radiowellen bis zu Gammastrahlen.

9. Sparen:

Wir funktioniert Sparen? Skizzieren Sie die Sachlogik, visualisieren Sie typische Guthabensverläufe (z.B. in Excel) und skizzieren Sie ein Unterrichtsszenario!

10. Kredit:

Ihre SchülerInnen sollten die Gefahren einer Verschuldung durch Kreditaufnahme kennen! Skizzieren Sie das Problem anhand des folgenden einfachen Modells:

Jemand nimmt 30000 Euro Kredit zu einem jährlichen Zinssatz von p % auf und vereinbart eine konstante Ratenzahlung von jährlich x Euro, die ab dem dritten Jahr beginnt. Der Einfachheit halber werden die Raten immer zum Zeitpunkt der jährlichen Verzinsung bezahlt und Steuern sowie Bearbeitungsgebühren ignoriert:

Zeitpunkt t (Jahre)	
0	30000 Euro werden aufgenommen und ausbezahlt.
1	Verzinsung: Die Schuld steigt auf 30000*(1 + p/100) Euro.
2	Verzinsung: Die Schuld steigt auf [Schuld des Vorjahres]*(1 + p/100).
3	Verzinsung: Die Schuld steigt auf [Schuld des Vorjahres]*(1 + p/100).
4	Verzinsung: Die Schuld steigt auf [Schuld des Vorjahres]*(1 + p/100).
4	Rückzahlung: Die Schuld wird um x Euro vermindert.
5	Verzinsung: Die Schuld steigt auf [Schuld des Vorjahres]*(1 + p/100).
5	Rückzahlung: Die Schuld wird um x Euro vermindert.
…	…
…	…
n	Verzinsung: Die Schuld steigt auf [Schuld des Vorjahres]*(1 + p/100).
n	Letzte Rückzahlung: Die Schuld beträgt nun weniger als die jährliche Rate von x Euro und wird gänzlich gezahlt.

Visualisieren Sie typische Verläufe des Schuldbetrages für verschiedene Werte von p und x (1 Punkt pro Zeile der obigen Tabelle in einem Diagramm „Schuldbetrag gegen t“), beispielsweise in Excel, mit Schieberegler, um p und x einzustellen:

Nach wie viel Jahren (n) ist der Kredit zur Gänze abbezahlt? Wie viel ist der Bank insgesamt gezahlt worden? Wie groß ist das Verhältnis der gesamten Rückzahlung zur aufgenommenen Kreditsumme?

Worin besteht die Gefahr, wenn die vereinbarte Rate x nicht eingehalten werden kann?
(Beispiel: Es wurde vereinbart p = 6, x = 6000. Auf Wunsch des Kreditnehmers wurde vor der Zahlung der ersten Rate x auf 4000 herabgesetzt. Was ändert sich?)

11. Schulen, SchülerInnen und LehrerInnen:

Spielen Sie folgende **Aufgabe für SchülerInnen** durch, beleuchten Sie ihren didaktischen Hintergrund und fügen Sie eigene Beispiele hinzu:

In der Tabelle

Schule	Zahl der SchülerInnen	Zahl der LehrerInnen
A	722	35
B	395	19
C	410	20
D	484	24
E	665	18
F	527	26
G	459	24
H	630	31
I	751	38
J	584	29

ist die Zahl der SchülerInnen und LehrerInnen der Schulen einer Region zusammengestellt. Bei einer Schule ist ein Tippfehler passiert. Bei welcher?

- Visualisiere die Daten mit einem Tabellenkalkulationsprogramm! Woran erkennst du den Fehler?
- Wenn die Zahl der SchülerInnen für alle Schulen richtig eingetragen wurde – wie viele LehrerInnen müsste die betreffende (falsch eingetragene) Schule (ungefähr) haben?

12. Geheimtext:

Ein geheimer Text ist „monoalphabetisch" verschlüsselt, d.h. jeder Buchstabe wurde durch einen anderen ersetzt. Der Geheimtext lautet:

```
Chw Btpj zrc cmh xmhihr Khmxxphmr
Hmrhx Yfkhx xfkyh hmrh fpyh Khmxx gz mlwhr khpmhiyhr xmhihr
Omrchwr: "Pmhih Khmxxphmr, msl khlh nhygy mr chr Bfpc, zq zrx
Hxxhr gz ltphr. Xhmc fzj chw Lzy atw chq Btpj. Bhrr hw mr cfx
Lfzx otqqy, cfrr jwmxxy hw hzsl qmy Lfzy zrc Lffw. Mlw othrry
chr ithxhr Btpj tjy rmsly hwohrrhr, chrr hw ahwophmchy xmsl
khxslmsoy. Fihw xhmrh wfzh Xymqqh zrc xhmrh xslbfwghr Jzhxxh
ahwwfyhr mlr. Xt othrry mlw chr Ithxhbmsly hwohrrhr."
Cmh Omrchwphmr ahwxmslhwyhr mlwhw Qzyyhw, fslyxfq zrc
atwxmslymk gz xhmr. Xt kmrk cmh Qzyyhw ihwzlmky mr chr Bfpc.
```

Wie kann man ihn entschlüsseln?

Tipp: In den meisten Texten in deutscher Sprache kommen die Buchstaben nicht alle gleich häufig vor! Der häufigste Buchstabe ist E, gefolgt von N, und meist kommen danach I und S. Die relativen Häufigkeiten dieser vier Buchstaben in deutschsprachigen Texten sind

Buchstabe	relative Häufigkeit
E	0.174
N	0.098
I	0.076
S	0.037

Siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Buchstabenäufigkeit für die komplette Liste. Auch wenn das nicht in jedem Text exakt so sein muss, liefert diese Methode den Ausgangspunkt für die Entschlüsselung monoalphabetisch verschlüsselter Texte:

- Ermitteln Sie zuerst die relativen Häufigkeiten der Buchstaben E, N, I und S im obigen Geheimtext und vergleichen Sie mit den in der Tabelle angegebenen Werten. Sind die Ergebnisse plausibel?
  [Sie stimmen zwar nicht exakt mit den angegebenen Werten überein, sind aber plausibel!]
  Damit können Sie bestimmen, welche Buchstaben im obigen Geheimtext für E, N, I und S stehen.
- Der Rest folgt mit ein bisschen Knobeln. Bei jeder weiteren Vermutung können Sie die relative Häufigkeit mit den in der obigen Wikipedia-Seite angegebenen Werte vergleichen.

(Anmerkung: Wenn Sie das Buchstabenzählen von einem Programm erledigen lassen wollen, können Sie http://www.mathe-online.at/materialien/Franz.Embacher/files/geheim/mono.html verwenden.)

Welcher wichtige Begriff der beschreibenden Statistik kann auf diese Weise vermittelt werden?

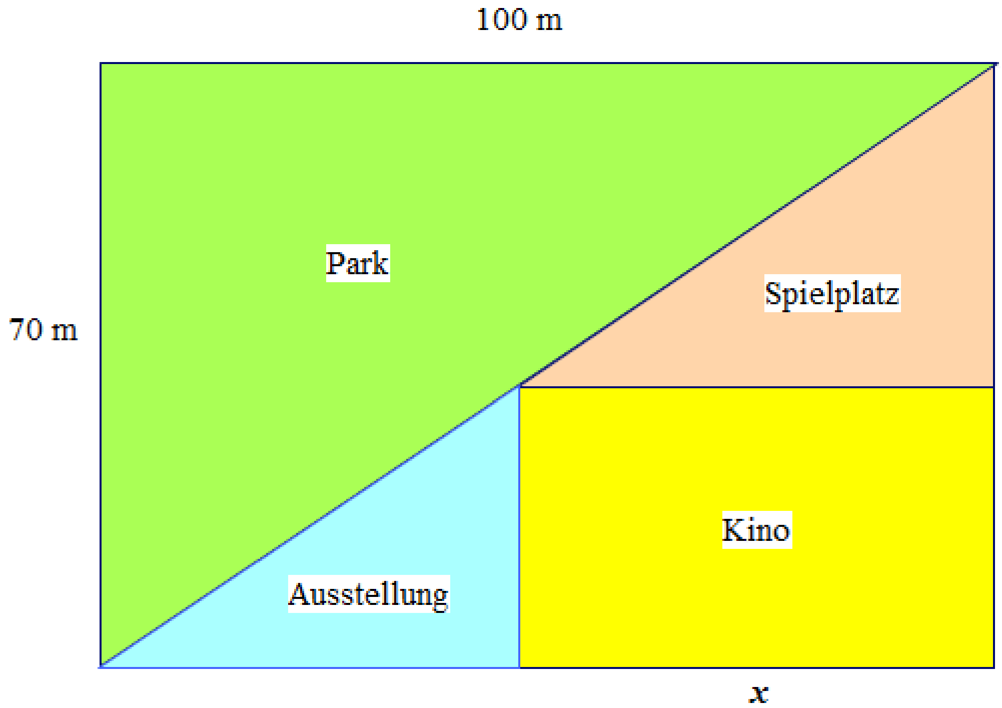
13. Wahrscheinlichkeit:

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist erst Thema des Mathematikunterrichts der Sek 2. Wie kann die Idee, die ihm zugrunde liegt, anhand praktischer Beispiele bereits in der Sek 1 vorbereitet werden?

14. Freizeitzentrum:

Spielen Sie folgende **Aufgabe für SchülerInnen** durch und beleuchten Sie ihren didaktischen Hintergrund:

Folgende Anordnung von Flächen zur Gestaltung eines Freizeitzentrums ist geplant:



Dabei ist die Länge ***x*** nicht vorgegeben. Wie muss sie gewählt werden, damit der für das Kino zur Verfügung stehende Flächeninhalt (gelb) am größten ist?

- Fertige eine Skizze in GeoGebra an, wobei du den Wert von ***x*** mit einem Schieberegler ändern kannst!
- Baue auch eine Anzeige des jeweiligen Werts des für das Kino zur Verfügung stehenden Flächeninhalts ein!

Nun variiere ***x***. Wie muss es gewählt werden, damit das Kino einen maximalen Flächeninhalt bekommt?

15. Ähnlichkeit und Längenmessungen:

Wir können ähnliche Dreiecke für praktische Messungen und Abschätzungen von Längen verwendet werden?

Erläutern und begründen Sie die Methode des „Daumensprungs“ zur Abschätzung von Entfernungen!

Spielen Sie folgende **Aufgabe für SchülerInnen** durch und beleuchten Sie ihren didaktischen Hintergrund:

a.) Wir sehen den Monddurchmesser unter einem Winkel von etwa einem halben Grad. Seine Entfernung beträgt im Mittel etwa 384000 km. Wie groß ist der Mond?

b.) Wir sehen Sonne und Mond ungefähr unter dem gleichen Winkel (was bei einer Sonnenfinsternis deutlich wird). Sie Sonne ist 150 Millionen km von der Erde entfernt. Wie groß ist sie?

c.) Daniel steht 100 m von einer Kirche entfernt und sieht den Gipfel eines Berges genau hinter der Kirchturmspitze. Einem Prospekt über die Sehenswürdigkeiten des Ortes entnimmt er, dass die Kirche 36.5 m hoch ist. Aus einer Wanderkarte liest er ab, dass der Berg 4 km entfernt ist. Wie hoch ist er?