Relativität für den Hausgebrauch

Die Grundzüge der Speziellen Relativitätstheorie

Wolfgang Lucha
Institut für Hochenergiephysik, Österreichische Akademie der Wissenschaften
Nikolsdorfergasse 18, A-1050 Wien, Austria
E-Mail: wolfgang.lucha@oeaw.ac.at

Was Sie schon immer über Relativität wissen wollten, aber nicht zu fragen wagten, zusammengefaßt als knappe Einführung in das Wesen der Speziellen Relativitätstheorie – in extrem gedrängter Form und unter sehr weitgehendem Verzicht auf mathematische Formulierung erkannter Zusammenhänge.

1 Einleitung

Die Spezielle Relativitätstheorie stellt – im Gegensatz etwa zur Allgemeinen Relativitätstheorie oder zur sog. „Standard-Theorie“ der Elementarteilchenphysik – keine dynamische Theorie im Sinne der Beschreibung von Kräften („Wechselwirkungen“) zwischen Elementarteilchen (Massenpunkten) dar, sondern ist lediglich als Konsistenzkriterium für die Formulierung jeder solchen dynamischen Theorie auf dem Hintergrund von Raum und Zeit anzusehen.

Die Spezielle Relativitätstheorie ist im wesentlichen nur die Konsequenz des – von dem deutschen Physiker und Nobelpreisträger für Physik (1921) Albert Einstein (1879–1955) in seiner Arbeit *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* aus dem Jahre 1905 aufgestellten – Relativitätsprinzips (Abschn. 5). Aus diesem Relativitätsprinzip ergibt sich (ohne weitere Annahmen!) als Vorschrift für den Übergang zwischen den Vertretern einer ausgezeichneten Klasse von Bezugssystemen, den Inertialsystemen, die Lorentz-Transformation (Abschn. 6), mit einer noch unbestimmten Konstanten c von der Dimension einer Geschwindigkeit. Das Geschwindigkeitsadditionstheorem (Abschn. 9) zeigt, daß diese Konstante c in sämtlichen Inertialsystemen denselben Wert annimmt und somit eine invariante Geschwindigkeit darstellt, die auf experimentellem Wege mit der Lichtgeschwindigkeit identifiziert wird (Abschn. 10).

2 Inertialsysteme

Die Beschreibung physikalischer Vorgänge erfordert im allgemeinen die Einführung eines (adäquaten) *Bezugssystems*, also eines Koordinatensystems, bezüglich dessen alle Bewegungen angegeben werden. In diesem Zusammenhang spielt das Konzept des sog. „Inertialsystems“ eine ganz fundamentale Rolle:

> Ein *Inertialsystem* ist ein Bezugssystem, in welchem das Trägheitsgesetz gilt: Ein Teilchen (Massenpunkt, Körper) verharrt in Ruhe oder in geradlinig-gleichförmiger Bewegung, also unbeschleunigt, solange keinerlei äußeren Kräfte auf dieses Objekt einwirken.

Verschiedene Inertialsysteme befinden sich demzufolge ebenfalls im Zustand geradlinig-gleichförmiger Bewegung relativ zueinander. Die zentrale Fragestellung lautet: Wie sieht die korrekte Transformation für den Übergang von einem Inertialsystem (mit den Koordinaten $\mathbf{x}, t$) zu einem anderen, relativ zu ersterem mit einer Geschwindigkeit $v \equiv |\mathbf{v}|$ bewegten Inertialsystem (mit den Koordinaten $\mathbf{x}', t'$) aus? (Der Einfachheit halber seien alle folgenden Betrachtungen auf nur eine Raumdimension beschränkt.)

3 Galilei-Transformation

Alle Schwierigkeiten im Verständnis der Speziellen Relativitätstheorie gründen sich auf den Umstand, daß wir, auf Grund unserer Erfahrungen im Alltag, Vorstellungen von Raum und Zeit verhaftet sind, wie sie in der Galilei-Transformation zum Ausdruck kommen:

$$\begin{aligned} x' &= x - v\,t\,, \\ t' &= t \qquad \text{(absolute Zeit)}\,. \end{aligned}$$

Das zweite Transformationsgesetz $t' = t$ ist äquivalent zur Annahme der Existenz einer absoluten Zeit.

4 Relativität der Gleichzeitigkeit

Die Galilei-Transformation kann sicher nicht der Weisheit letzter Schluß sein: Zwei Ereignisse seien als *gleichzeitig* verstanden, wenn von den Ereignissen emittierte Lichtsignale bei einem Beobachter in der Mitte zwischen den Ereignissen zur selben Zeit eintreffen. Ein sich etwa entlang der Verbindungslinie der Ereignisse *bewegender* Beobachter wird diese Lichtsignale aber nicht zur selben Zeit wahrnehmen, als Folge der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit. Die „Gleichzeitigkeit“ ist also ein *relativer* Begriff.

5 Relativitätsprinzip

Die Spezielle Relativitätstheorie kann nicht aus irgendeiner übergeordneten Theorie abgeleitet werden (und genauso wenig aus den Ergebnissen des Michelson-Morley-Experiments allein gefolgert werden). In einer axiomatischen Formulierung steht an der Spitze der Speziellen Relativitätstheorie EINSTEINS Relativitätsprinzip:

> **Relativitätsprinzip:** Sämtliche Naturgesetze nehmen in allen Bezugssystemen, in denen jeder sich selbst überlassene Körper in Ruhe oder in geradlinig-gleichförmiger Bewegung verharrt – also in allen „Inertialsystemen" –, die gleiche Form an.

Dieser Sachverhalt ist als „Forminvarianz der Naturgesetze unter Lorentz-Transformationen" bekannt.

6 Lorentz-Transformation

Die durch EINSTEINS Relativitätsprinzip eindeutig festgelegte Gestalt der Transformationen zwischen Inertialsystemen, der Lorentz-Transformationen, läßt sich mit Hilfe einfacher Überlegungen herleiten: Diese Transformationen müssen linear sein. Bewegt sich ein Inertialsystem gegen ein zweites mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, bewegt sich das zweite Inertialsystem gegen das erste mit der Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$. Hintereinanderausführen zweier Lorentz-Transformationen muß wieder eine Lorentz-Transformation ergeben. Ausgedrückt durch den in Relationen der Speziellen Relativitätstheorie sehr oft auftretenden sog. „Gamma-Faktor"

$$\gamma = \gamma(v) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \geq 1 \ ,$$

der eine an dieser Stelle noch zu bestimmende Konstante c von der Dimension einer Geschwindigkeit enthält, lautet die *Lorentz-Transformation* (in nur einer Raumdimension x und einer Zeitdimension t)

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - v\,t) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right) \end{aligned}}$$

Auf Grund der Linearität der Lorentz-Transformation in den Raum- und Zeitkoordinaten gelten diese Transformationsgesetze auch für die Differenzen $\Delta x \equiv x_2 - x_1$ und $\Delta t \equiv t_2 - t_1$ je zweier Ereignisse:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma\,(\Delta x - v\,\Delta t) \ , \\ \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\,\Delta x\right) \ . \end{aligned}$$

Im Grenzfall $c \to \infty$, genauer, für $v \ll c$, reduziert sich die Lorentz-Transformation offensichtlich auf die Galilei-Transformation aus Abschn. 3. Einige Folgen der Lorentz-Transformation sind ungewohnt:

7 Lorentz-Kontraktion

Was bedeutet der Begriff „Längenmessung"? Jede Ermittlung der Länge eines – sich mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegenden – Objekts erfolgt durch Vergleich dieses Objekts mit einem Maßstab oder einer Längenskala *zur gleichen Zeit* t: $\Delta t = 0$ in obiger Lorentz-Transformation impliziert jedoch

$$\Delta x' = \gamma\,\Delta x \geq \Delta x$$

bzw.

$$\boxed{\Delta x = \frac{1}{\gamma}\,\Delta x' \equiv \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\Delta x' \leq \Delta x'} \qquad \text{(Lorentz-Kontraktion)} \ .$$

8 Zeitdilatation

Was bedeutet der Begriff „Zeitmessung"? Eine Uhr bewege sich – mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ – von einer ruhenden Uhr „1" zu einer ruhenden Uhr „2"; sie ruht aber natürlich in ihrem Bezugssystem: $\Delta x' = 0$ in obiger Lorentz-Transformation impliziert jedoch

$$\Delta x = v\,\Delta t\ ,$$

d. h., die Uhr bewegt sich im ruhenden Bezugssystem mit der Geschwindigkeit v. Einsetzen führt auf

$$\begin{aligned}
\Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\,\Delta x\right)\\
&= \gamma\left(\Delta t - \frac{v^2}{c^2}\,\Delta t\right)\\
&= \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t\\
&= \gamma\,\frac{1}{\gamma^2}\,\Delta t\\
&= \frac{1}{\gamma}\,\Delta t\ ,
\end{aligned}$$

also

$$\Delta t' = \frac{1}{\gamma}\,\Delta t \equiv \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t \leq \Delta t$$

bzw.

$$\boxed{\Delta t = \gamma\,\Delta t' \geq \Delta t'} \qquad \text{(Zeitdilatation)}\ .$$

9 Geschwindigkeitsadditionstheorem

Ein Teilchen mit einer konstanten Geschwindigkeit $V \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$ im ruhenden Inertialsystem bewegt sich in einem mit der Relativgeschwindigkeit v bewegten Inertialsystem mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
V' &\equiv \frac{\Delta x'}{\Delta t'}\\
&= \frac{\Delta x - v\,\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\,\Delta x}\\
&= \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,\frac{\Delta x}{\Delta t}}\\
&\equiv \frac{V - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,V}\ ,
\end{aligned}$$

also mit

$$\boxed{V' = \frac{V - v}{1 - \dfrac{v\,V}{c^2}}} \qquad \text{(Geschwindigkeitsadditionstheorem)}\ .$$

10 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Die Konstante c stellt eine *invariante*, in jedem Inertialsystem gleiche, *Geschwindigkeit* dar, denn aus $V = c$ ergibt sich durch Einsetzen in obiges Geschwindigkeitsadditionstheorem für die im bewegten Bezugssystem beobachtete Geschwindigkeit V' ebenfalls

$$V' = \frac{c - v}{1 - \dfrac{v}{c}} = c \qquad \text{(invariante Geschwindigkeit)}\ .$$

Erst *experimentell*, also durch Experimente wie etwa dem (zum ersten Male im Jahre 1881) von dem deutschgebürtigen Physiker und Nobelpreisträger für Physik (1907) Albert Abraham Michelson (1852–1931) mit Hilfe eines von diesem entwickelten optischen Präzisionsinstruments, dem (nach ihm benannten) Michelson-Interferometer, durchgeführten Versuch, stellt sich heraus, daß diese invariante Geschwindigkeit mit der Lichtgeschwindigkeit identisch ist:

$$c = \text{Lichtgeschwindigkeit}\ .$$

Deren numerischer Wert beträgt – heutzutage *per definitionem*, somit exakt (also *ohne* Meßfehler!) –

$$\boxed{c = 2.99792458 \times 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}}\ .$$

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Inertialsystemen ist demnach – vermöge ihrer experimentellen Identifikation mit der invarianten Geschwindigkeit c – in gewissem Maße bereits eine Konsequenz des Relativitätsprinzips.

Diese invariante Geschwindigkeit bildet – auf Grund der ziemlich offensichtlichen Singularität der Lorentz-Transformation an der Stelle $v^2 = c^2$ – eine *Grenzgeschwindigkeit* in dem Sinne, daß sich alle massebehafteten Teilchen entweder langsamer oder schneller als diese Geschwindigkeit c zu bewegen haben. Ganz offensichtlich leben wir in einer Welt, in der diese invariante Geschwindigkeit eine *obere* Grenzgeschwindigkeit darstellt – wir beobachten ja schließlich ziemlich häufig auch ruhende Körper.

11 Lorentz-Invarianz

Die Größe $c^2\,t^2 - x^2$ erweist sich als invariant unter sämtlichen Lorentz-Transformationen – und bildet daher den Prototyp aller sog. „Lorentz-Invarianten“:

$$\begin{aligned}
c^2\,t'^2 - x'^2 &= \gamma^2 \left[c^2 \left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right)^2 - (x - v\,t)^2\right] \\
&= \gamma^2 \left[c^2 \left(t^2 - 2\,\frac{v}{c^2}\,x\,t + \frac{v^2}{c^4}\,x^2\right) - \left(x^2 - 2\,v\,x\,t + v^2\,t^2\right)\right] \\
&= \gamma^2 \left(c^2\,t^2 - 2\,v\,x\,t + \frac{v^2}{c^2}\,x^2 - x^2 + 2\,v\,x\,t - v^2\,t^2\right) \\
&= \gamma^2 \left(c^2\,t^2 + \frac{v^2}{c^2}\,x^2 - x^2 - v^2\,t^2\right) \\
&= \gamma^2 \left[c^2\,t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] \\
&= \gamma^2\,\frac{1}{\gamma^2}\left(c^2\,t^2 - x^2\right) = c^2\,t^2 - x^2\ ,
\end{aligned}$$

also

$$\boxed{c^2\,t'^2 - x'^2 = c^2\,t^2 - x^2}\ .$$

In differentieller Form wird dieses Ergebnis häufig auch als „Invarianz des Linienelements“ bezeichnet.

12 Raum-Zeit-Diagramme

Der durch die Lorentz-Transformation vermittelte Zusammenhang zwischen ruhendem und bewegtem Inertialsystem läßt sich mit Hilfe von Raum-Zeit-Diagrammen, in denen Raum- und Zeitkoordinaten von Ereignissen und Bahnkurven von Massenpunkten angegeben werden, graphisch veranschaulichen:

- Die x'-Koordinatenachse ist definitionsgemäß die Menge aller Punkte mit $t' = 0$. Zufolge obiger Lorentz-Transformation bedeutet $t' = 0$ aber

  $$t = \frac{v}{c^2}\,x$$

  bzw.

  $$\boxed{c\,t = \frac{v}{c}\,x}\ .$$

  Die x'-Koordinatenachse bildet demzufolge im $(x, c\,t)$-Koordinatensystem eine Gerade mit dem Anstieg

  $$\frac{c\,\Delta t}{\Delta x} = \frac{v}{c}\ .$$

- Die t'-Koordinatenachse ist definitionsgemäß die Menge aller Punkte mit $x' = 0$. Zufolge obiger Lorentz-Transformation bedeutet $x' = 0$ aber

  $$x = v\,t$$

  bzw.

  $$\boxed{c\,t = \frac{c}{v}\,x}\ .$$

  Die t'-Koordinatenachse bildet demzufolge im $(x, c\,t)$-Koordinatensystem eine Gerade mit dem Anstieg

  $$\frac{c\,\Delta t}{\Delta x} = \frac{c}{v}\ .$$

Die Angabe von Koordinaten erfordert natürlich die Festlegung der entsprechenden Einheitspunkte:

- Der Punkt $(x' = 1, c\,t' = 0)$ ergibt sich zufolge der in Abschn. 11 diskutierten Lorentz-Invarianz als Schnitt der Hyperbel $c^2\,t^2 - x^2 = -1$ mit der x'-Koordinatenachse:

  $$\begin{aligned} c^2\,t'^2 - x'^2 &= -1 \\ &= c^2\,t^2 - x^2 \qquad \text{(Hyperbel)} \\ &= \frac{v^2}{c^2}\,x^2 - x^2 \\ &= -x^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= -x^2\,\frac{1}{\gamma^2} \end{aligned}$$

  impliziert $x = \gamma$ und daher $c\,t = \frac{v}{c}\,x = \frac{v}{c}\,\gamma$ im $(x, c\,t)$-Koordinatensystem:

  $$\boxed{\left(x = \gamma, c\,t = \frac{v}{c}\,\gamma\right)}\ .$$

- Der Punkt $(x' = 0, c\,t' = 1)$ ergibt sich zufolge der in Abschn. 11 diskutierten Lorentz-Invarianz als Schnitt der Hyperbel $c^2\,t^2 - x^2 = 1$ mit der t'-Koordinatenachse:

$$\begin{aligned} c^2\,t'^2 - x'^2 &= 1 \\ &= c^2\,t^2 - x^2 \qquad \text{(Hyperbel)} \\ &= c^2\,t^2 - v^2\,t^2 \\ &= c^2\,t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= c^2\,t^2\,\frac{1}{\gamma^2} \end{aligned}$$

impliziert $c\,t = \gamma$ und daher $x = v\,t = \frac{v}{c}\,\gamma$ im $(x, c\,t)$-Koordinatensystem:

$$\boxed{\left(x = \frac{v}{c}\,\gamma, c\,t = \gamma\right)}\,.$$

Genau dieselben Resultate erhält man natürlich auch bei Einschränkung der Lorentz-Transformation auf die Werte $x' = 1$ und $c\,t' = 0$ bzw. $x' = 0$ und $c\,t' = 1$.

Beispiel: Die Relativgeschwindigkeit v zweier Inertialsysteme möge

$$\frac{v}{c} = \frac{3}{5}$$

betragen. Dann nimmt der Gamma-Faktor den Wert

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{9}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{5}{4}$$

und das Raum-Zeit-Diagramm dieser beiden Inertialsysteme genau die in Abb. 1 gezeigte Gestalt an: Die x'- und t'-Koordinatenachsen sind Gerade mit dem Anstieg $\frac{3}{5}$ bzw. $\frac{5}{3}$, die beiden Einheitspunkte $(1', 0')$ und $(0', 1')$ liegen bei $(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$ bzw. $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$.

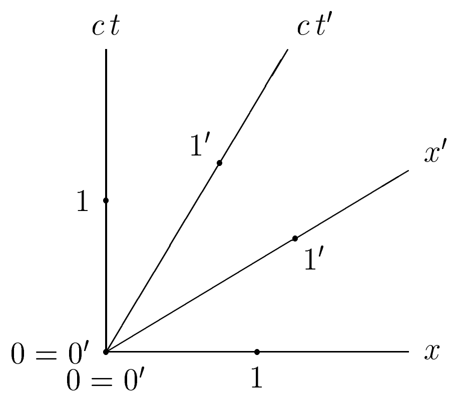

Abb. 1: Raum-Zeit-Diagramm zweier mit der Relativgeschwindigkeit $\frac{v}{c} = \frac{3}{5}$ bewegter Inertialsysteme.

Lichtsignale pflanzen sich in Raum-Zeit-Diagrammen wegen

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = c \ ,$$

also

$$\frac{\Delta x}{c\,\Delta t} = \pm 1 \ ,$$

entlang von Geraden mit dem Anstieg

$$\frac{c\,\Delta t}{\Delta x} = \pm 1 \ ,$$

also entlang von „45°-Geraden“, fort.

Selbstverständlich stellt sich die Situation für zwei in den ihnen eigenen Inertialsystemen ruhende, relativ zueinander geradlinig-gleichförmig bewegte Beobachter vollkommen symmetrisch dar (Abb. 2).

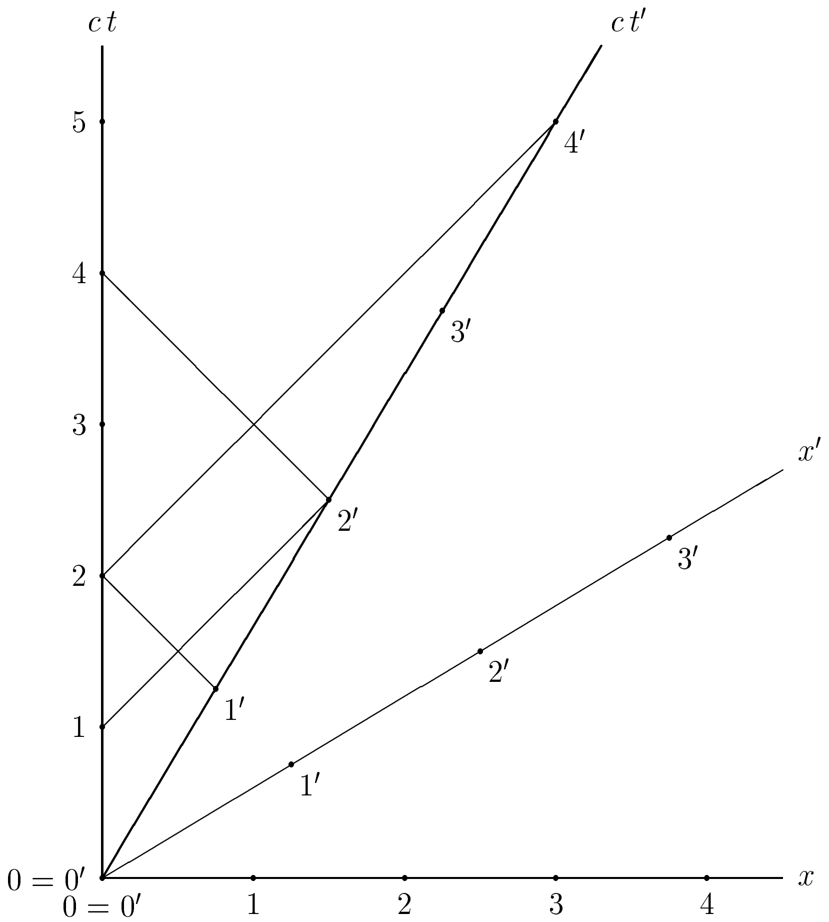

Abb. 2: Symmetrie zwischen Inertialsystemen am obigen Beispiel einer Relativgeschwindigkeit $\frac{v}{c} = \frac{3}{5}$: Das zum Zeitpunkt $c\,t = 1$ vom ruhenden Beobachter ausgesandte Lichtsignal wird vom bewegten Beobachter (exakt) zum Zeitpunkt $c\,t' = 2$ empfangen, das zum Zeitpunkt $c\,t' = 1$ vom bewegten Beobachter ausgesandte Lichtsignal wird vom ruhenden Beobachter (exakt) zum Zeitpunkt $c\,t = 2$ empfangen, die zu den Zeitpunkten 2 emittierten Lichtsignale werden im anderen Inertialsystem jeweils zum Zeitpunkt 4 registriert, und so fort.

13 Zwillings-„Paradoxon“

Die festgestellte, für die gesamte Klasse der Inertialsysteme gültige Symmetrie der Betrachtungsweise geht beim Übergang zu einem beschleunigten Bezugssystem natürlich verloren, was zu *scheinbaren* (!) Paradoxien führt, von denen das sog. „Zwillings- (oder Uhren-) Paradoxon“ das wohl bekannteste ist: An einem ruhenden Beobachter möge sich ein zweiter Beobachter mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ vorbeibewegen, nach einiger Zeit bis zum vollkommenen Stillstand verzögern, anschließend exakt in Gegenrichtung beschleunigen, um sich schließlich mit der konstanten Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ wieder am ruhenden Beobachter vorbeizubewegen. Da die Verzögerungs- und Beschleunigungsphasen gegenüber der geradlinig-gleichförmigen Bewegung des beschleunigten Beobachters beliebig kurz gewählt werden können, läßt sich die Bewegung des beschleunigten Beobachters – in idealisierter Weise – durch dessen Ruhe in *zwei* Inertialsystemen mit „abruptem“ Wechsel von einem zum anderen beschreiben (Abb. 3). Beim neuerlichen Zusammentreffen der beiden Beobachter *ist* für den beschleunigten Beobachter auf jeden Fall weniger Zeit vergangen als für den ruhenden Beobachter – wie beide Beobachter auch aus der empfangenen Anzahl von vom anderen jeweils zum gleichen Zeitpunkt ausgesandten Lichtsignalen schließen.

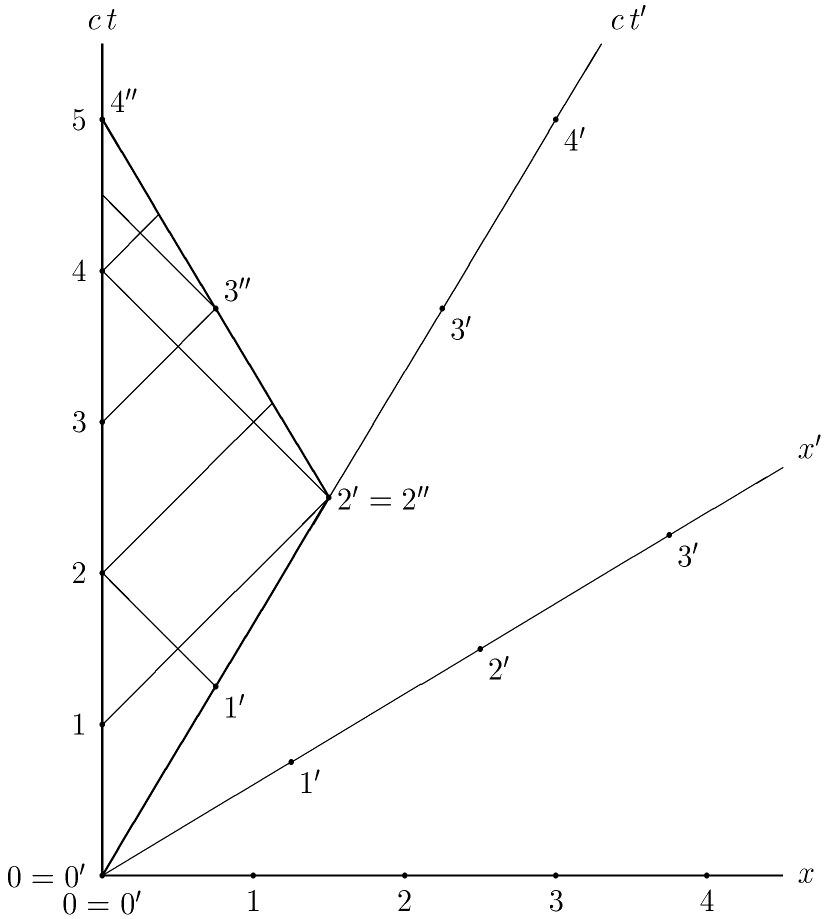

Abb. 3: Zwillingsparadoxon. Der beschleunigte Beobachter möge sich in den unbeschleunigten Phasen mit der Geschwindigkeit $\frac{v}{c} = \frac{3}{5}$ (aus obigem Beispiel) bewegen. Er empfängt bis zur Umkehr ein Lichtsignal, danach drei Lichtsignale, insgesamt also vier Lichtsignale des ruhenden Beobachters. Der ruhende Beobachter empfängt hingegen nur drei Lichtsignale des beschleunigten Beobachters. Beide Beobachter kommen zu dem Schluß, daß im beschleunigten Bezugssystem weniger Zeit verstrichen ist als im ruhenden Inertialsystem.