

Das Konzept der Raumzeit-Krümmung



Franz
Embacher

Fakultät für Physik
der Universität Wien

Vortrag auf der Jahrestagung der Wiener Arbeitsgemeinschaft für Astronomie
Wien, 14. November 2015

Das Konzept der Raumzeit-Krümmung

1. Allgemeine Relativitätstheorie
2. (Nicht-)Euklidische Geometrie
3. Die Wanze auf der heißen Ofenplatte
4. Kausalstruktur und Lichtkegel
5. Kausalstruktur eines Schwarzen Lochs
6. Raumkrümmung in der Nähe eines Schwarzen Lochs
7. Trichtermodell
8. Äquivalenzprinzip
9. SRT, Metrik, Geraden, Geodäten und Sphären
10. Raum-Zeit-Krümmung in der Nähe von Himmelskörpern
11. Krümmungsradius und Lichtablenkung
12. Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum
13. Gravitationswellen

Allgemeine Relativitätstheorie

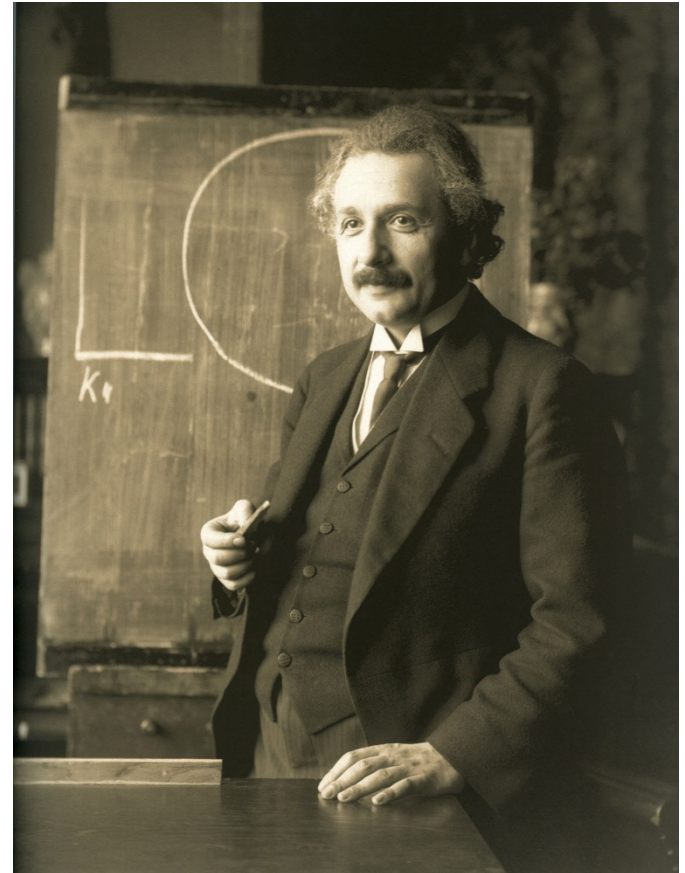
Albert Einstein, 1915:

- Materie krümmt die Raumzeit.
- Die gekrümmte Raumzeit sagt der Materie, wie sie sich bewegen soll.

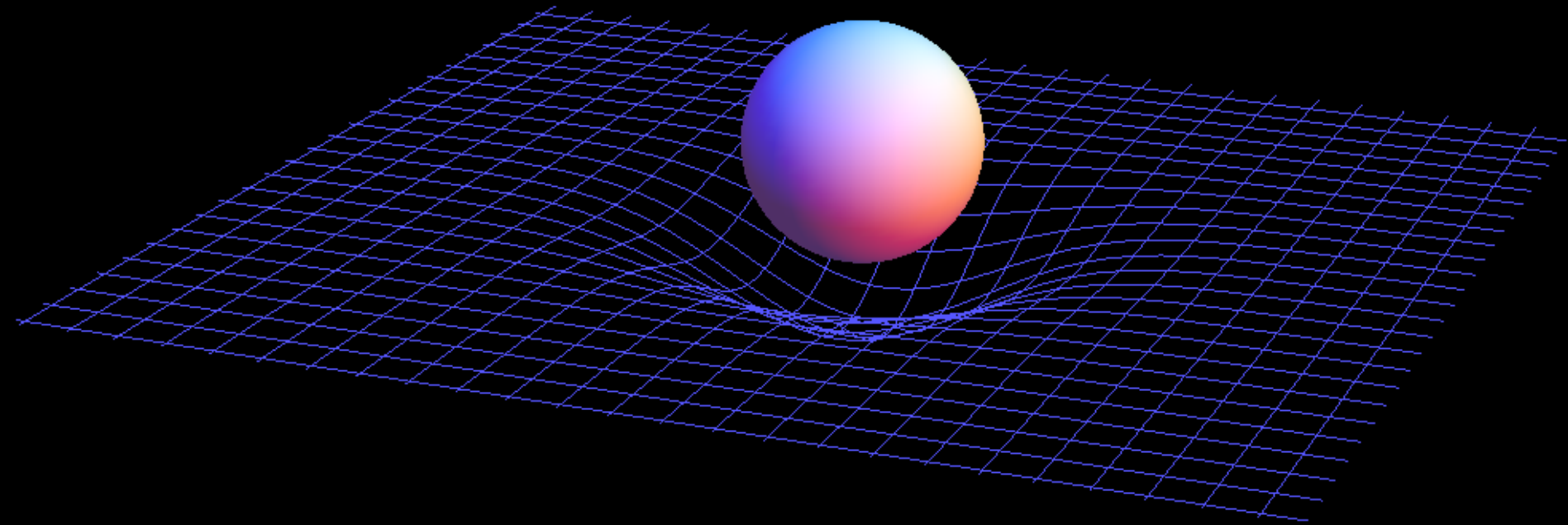
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Was bedeutet das?

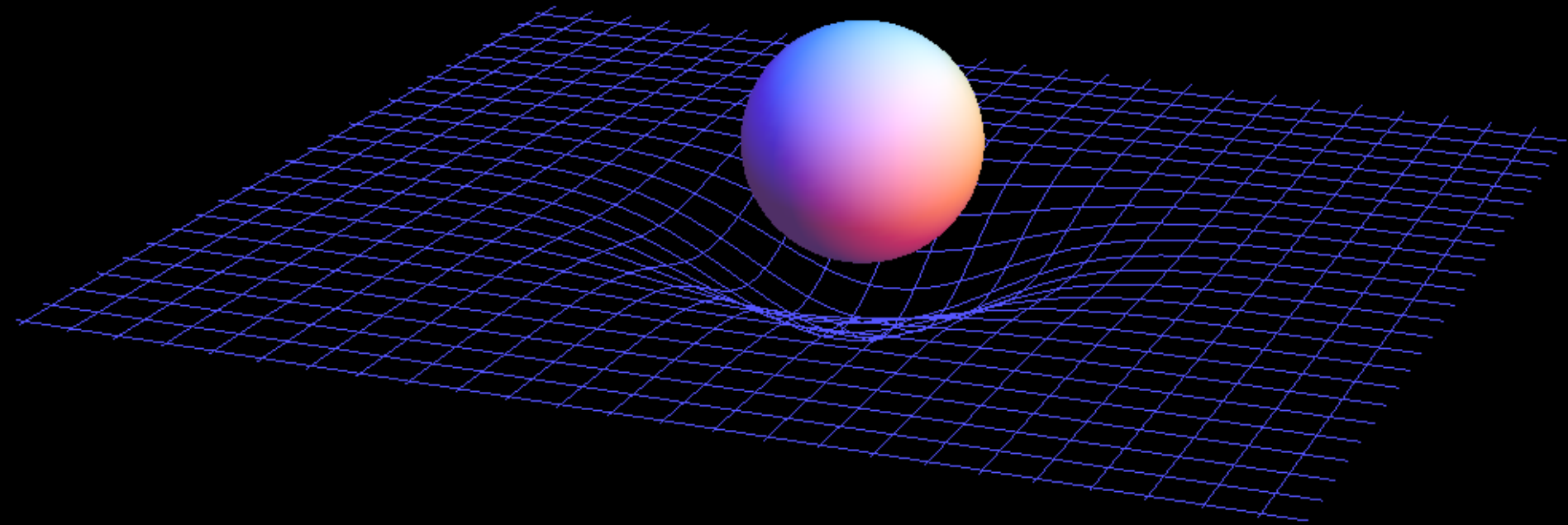
Was ist überhaupt „Krümmung“?



Allgemeine Relativitätstheorie

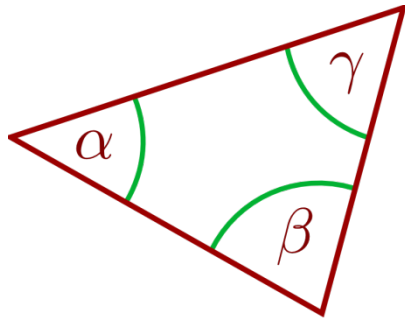


Allgemeine Relativitätstheorie

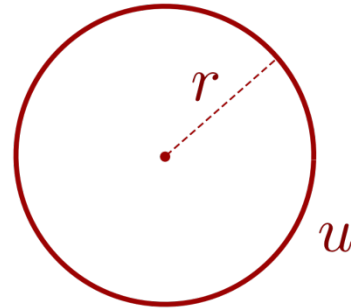


Wie soll man Bilder wie dieses interpretieren?

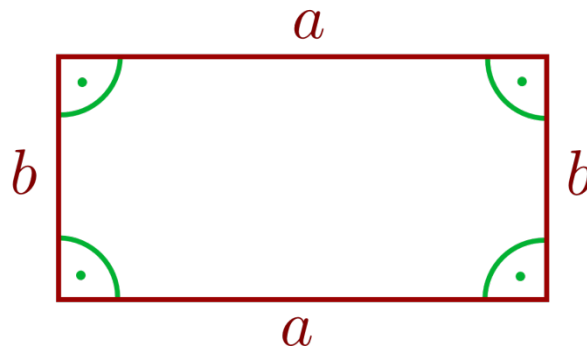
(Nicht-)Euklidische Geometrie



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

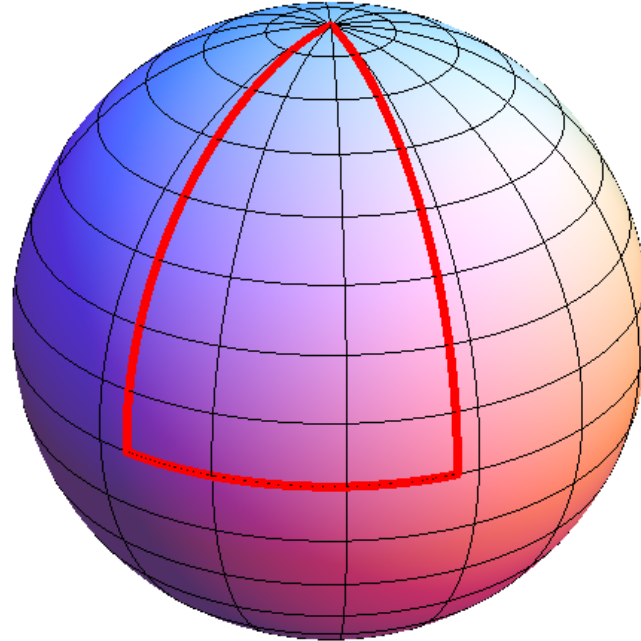


$$u = 2\pi r$$



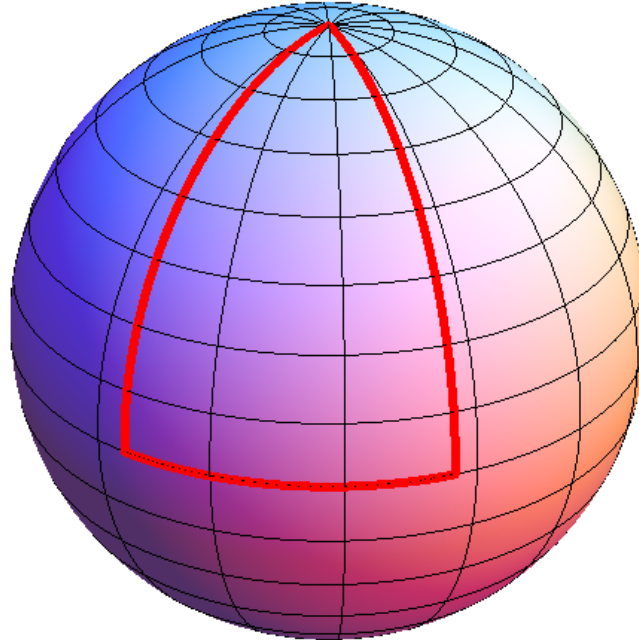
Euklidische Geometrie der Ebene

(Nicht-)Euklidische Geometrie



Sphärische Geometrie

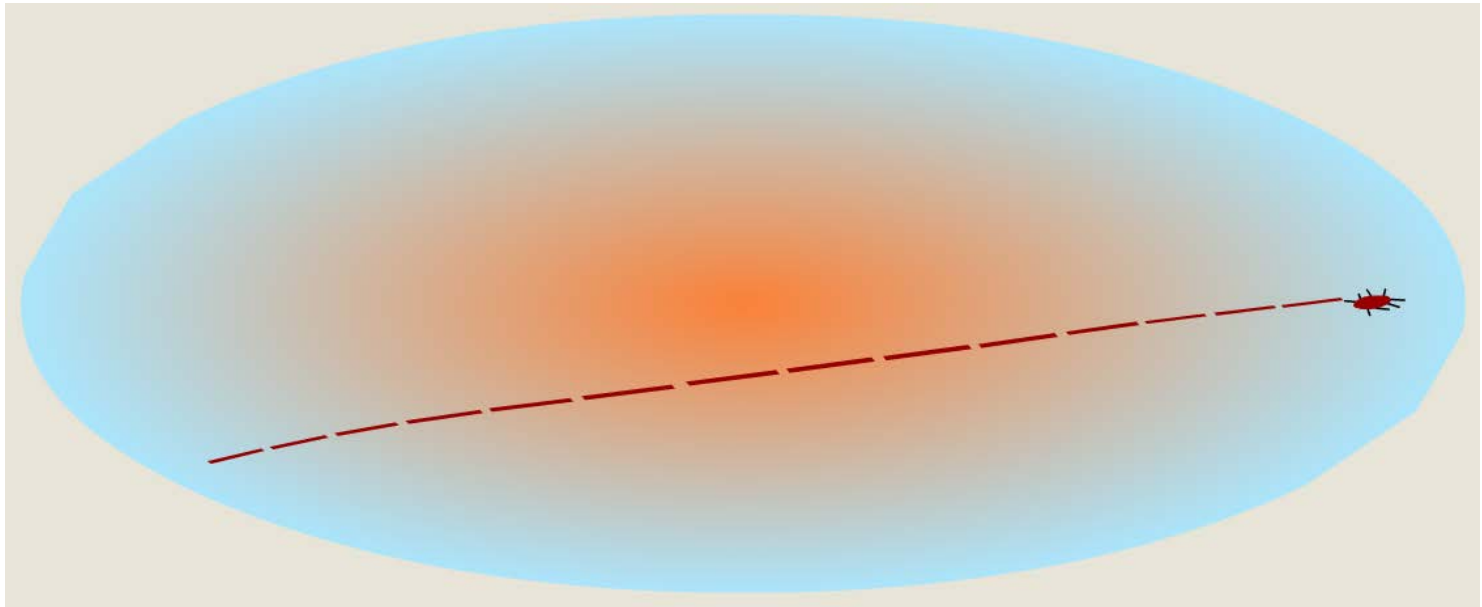
(Nicht-)Euklidische Geometrie



Sphärische Geometrie

Krümmung \approx Maß für die Abweichung von den Regeln
und Aussagen der Euklidischen Geometrie

Die Wanze auf der heißen Ofenplatte



<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/EinsteinRechnet/Kruemmung.html>

(aus: F.E.: „Wer mit Einstein rechnete“, math.space, Wien, 2005)

Kausalstruktur und Lichtkegel

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)



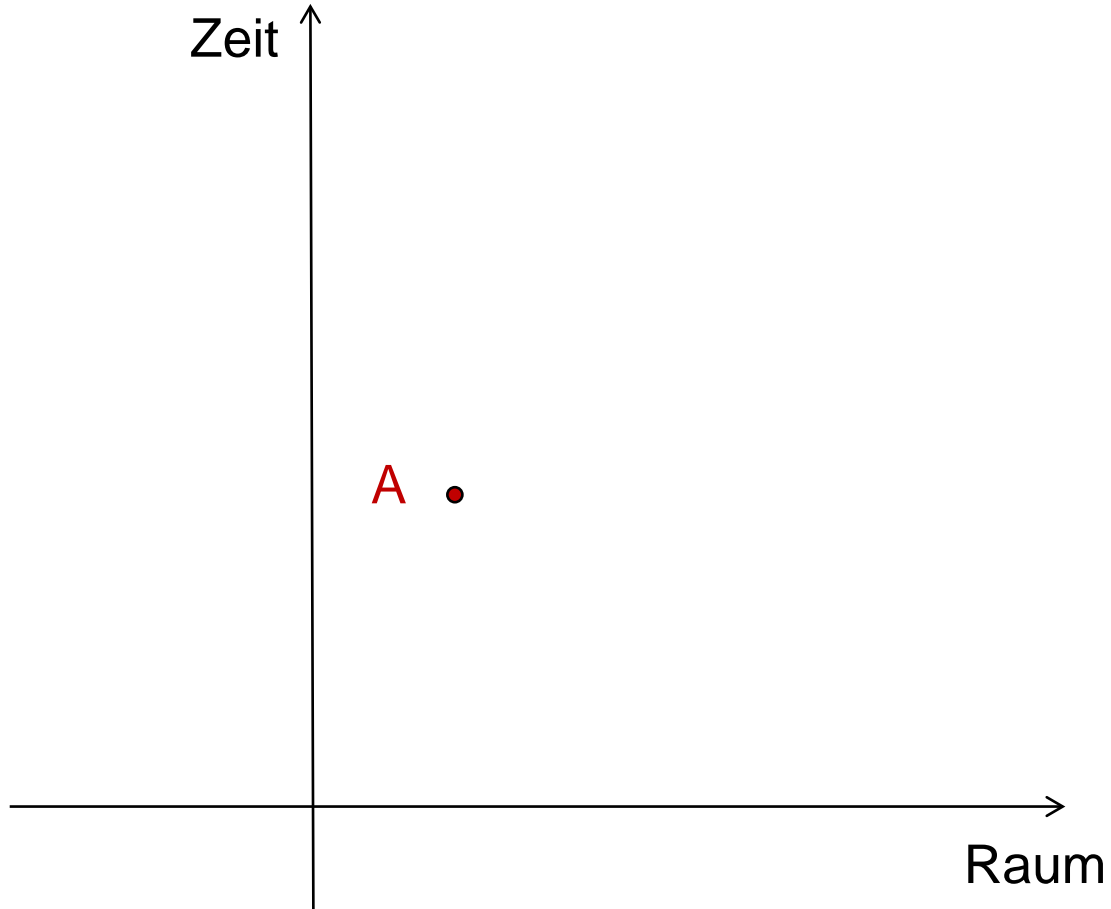
Kausalstruktur und Lichtkegel

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)



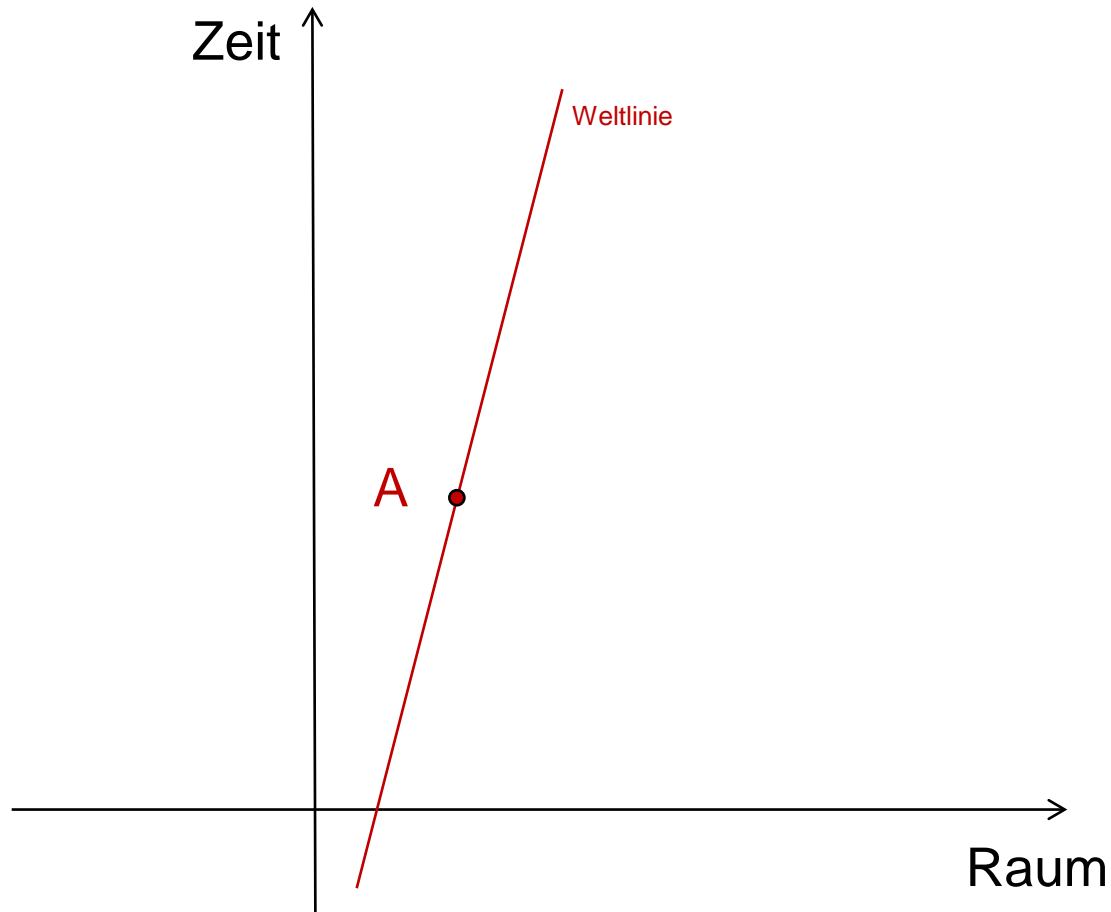
Kausalstruktur und Lichtkegel

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)



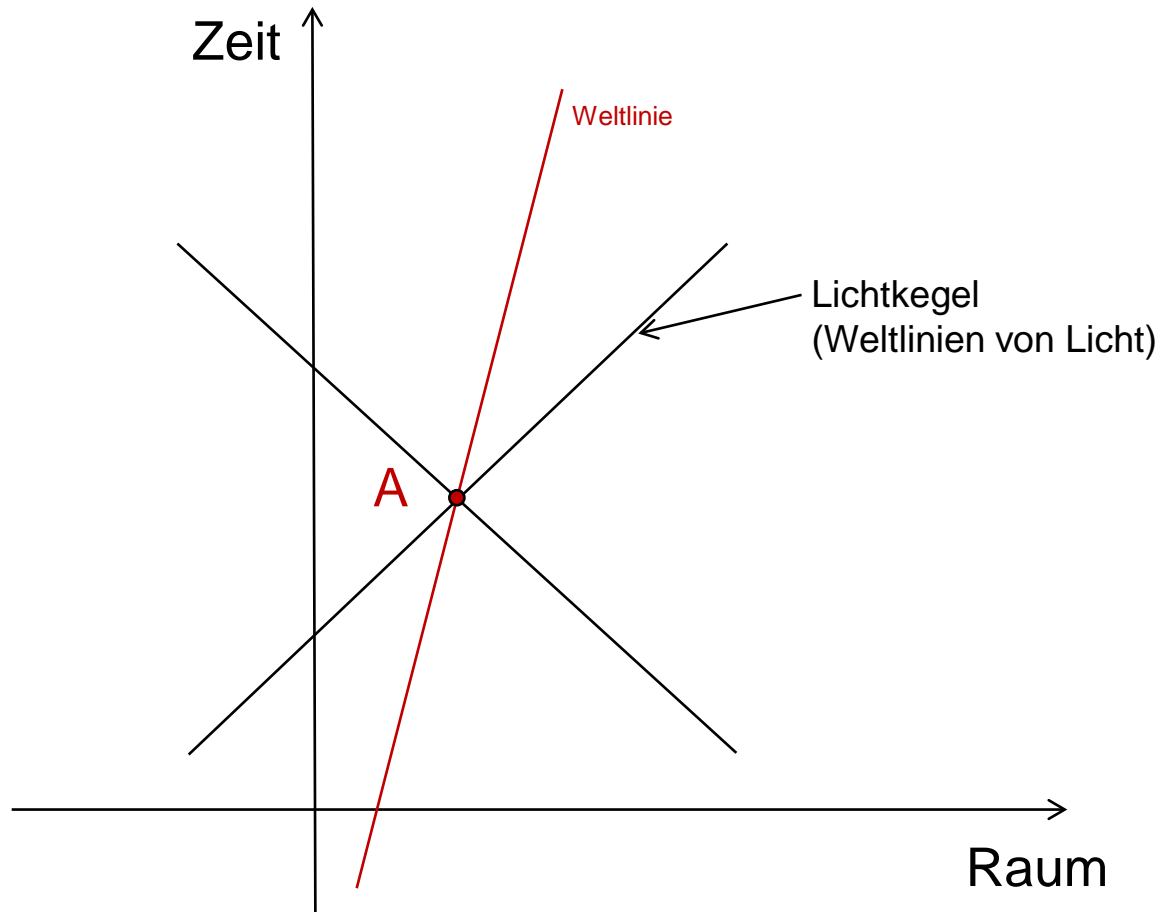
Kausalstruktur und Lichtkegel

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)



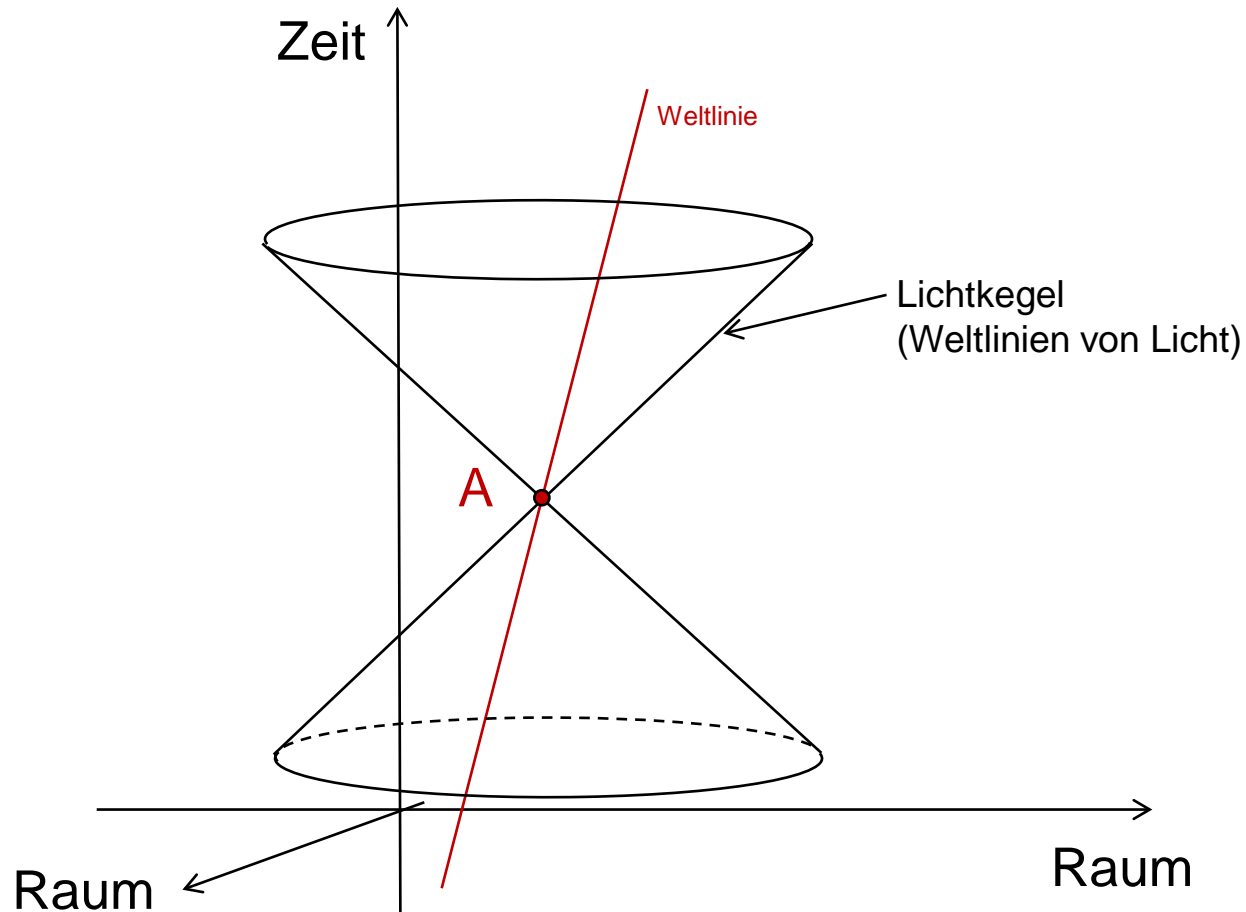
Kausalstruktur und Lichtkegel

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)



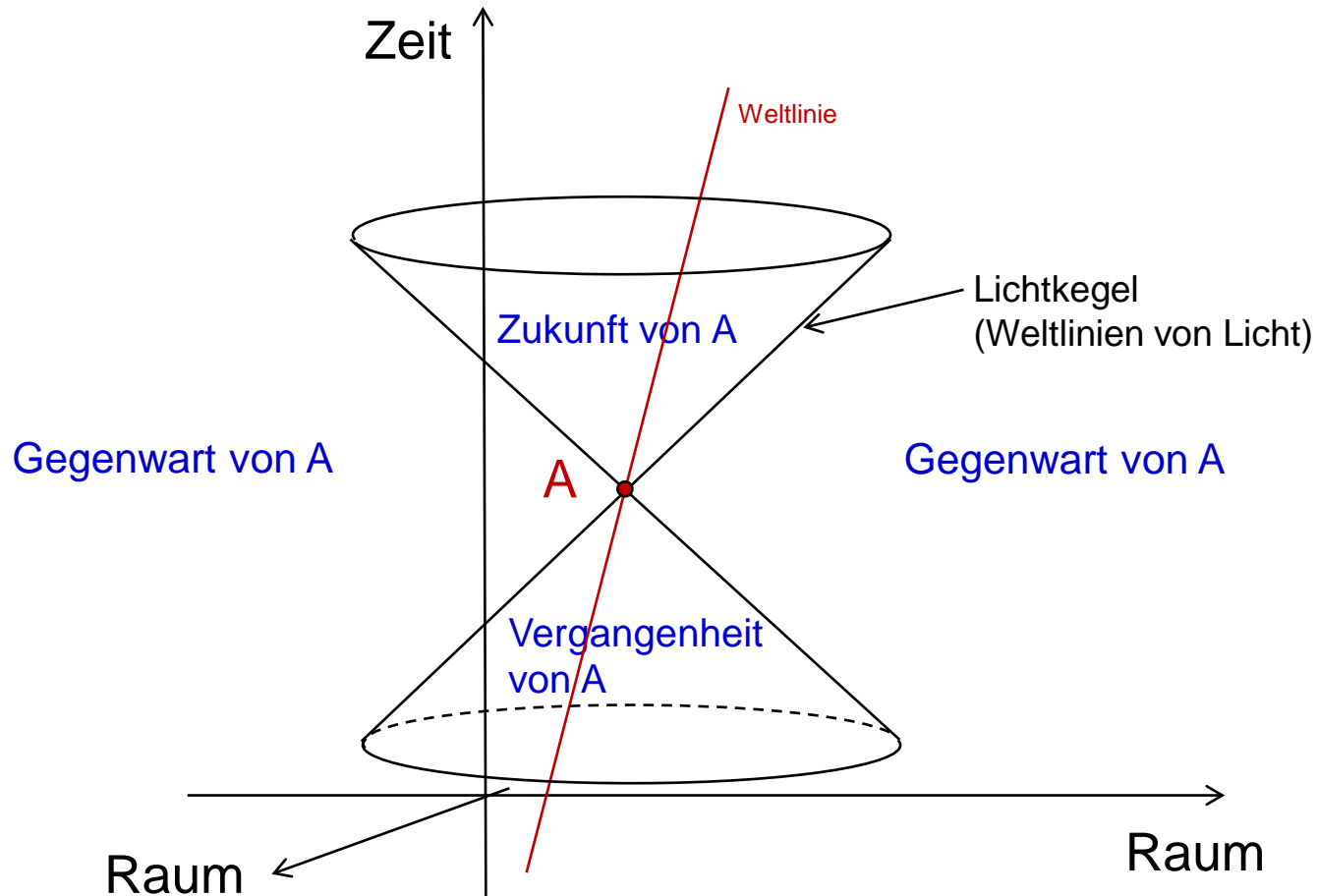
Kausalstruktur und Lichtkegel

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)

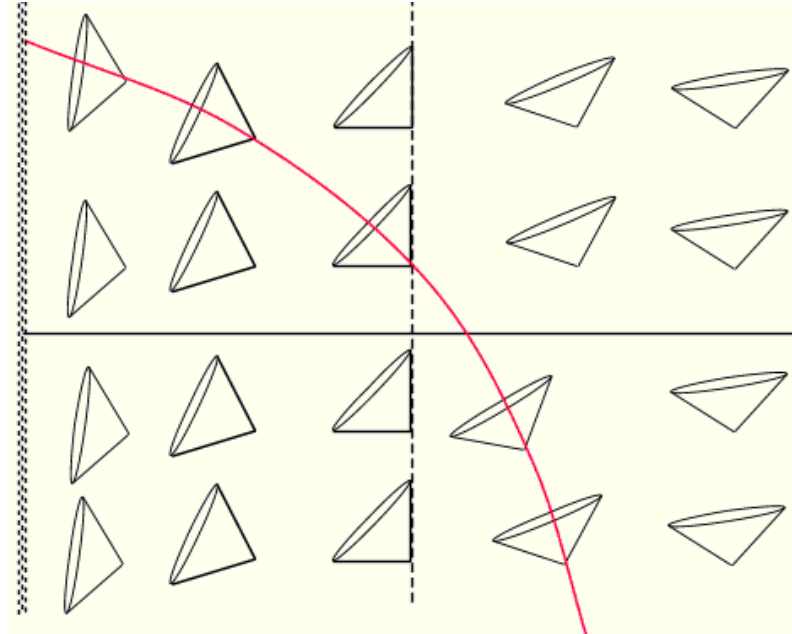


Kausalstruktur und Lichtkegel

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)

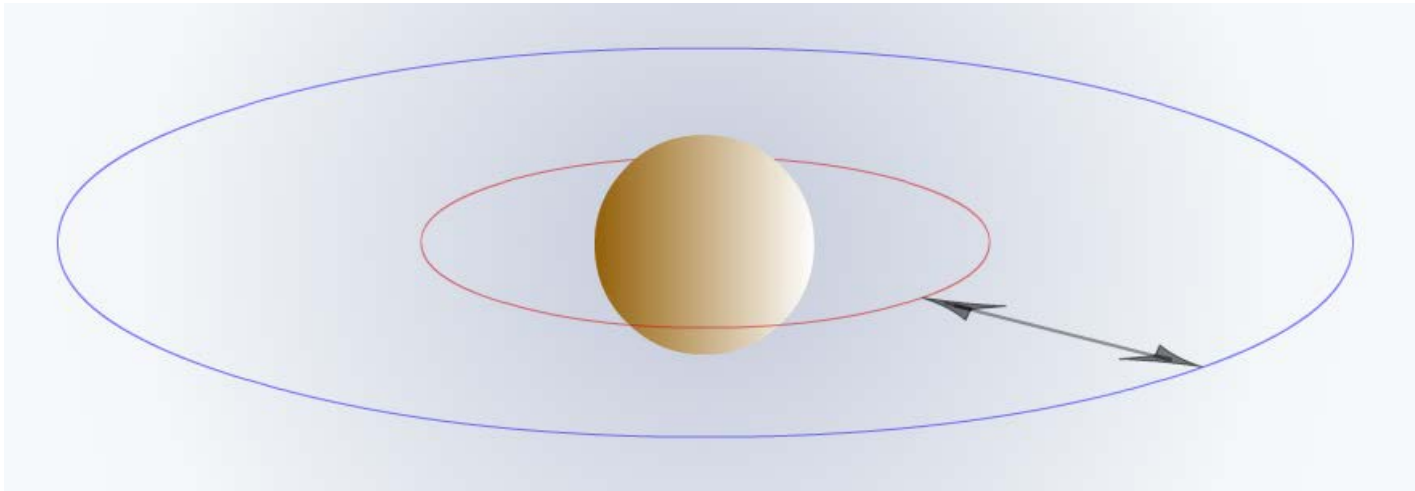


Kausalstruktur eines Schwarzen Lochs



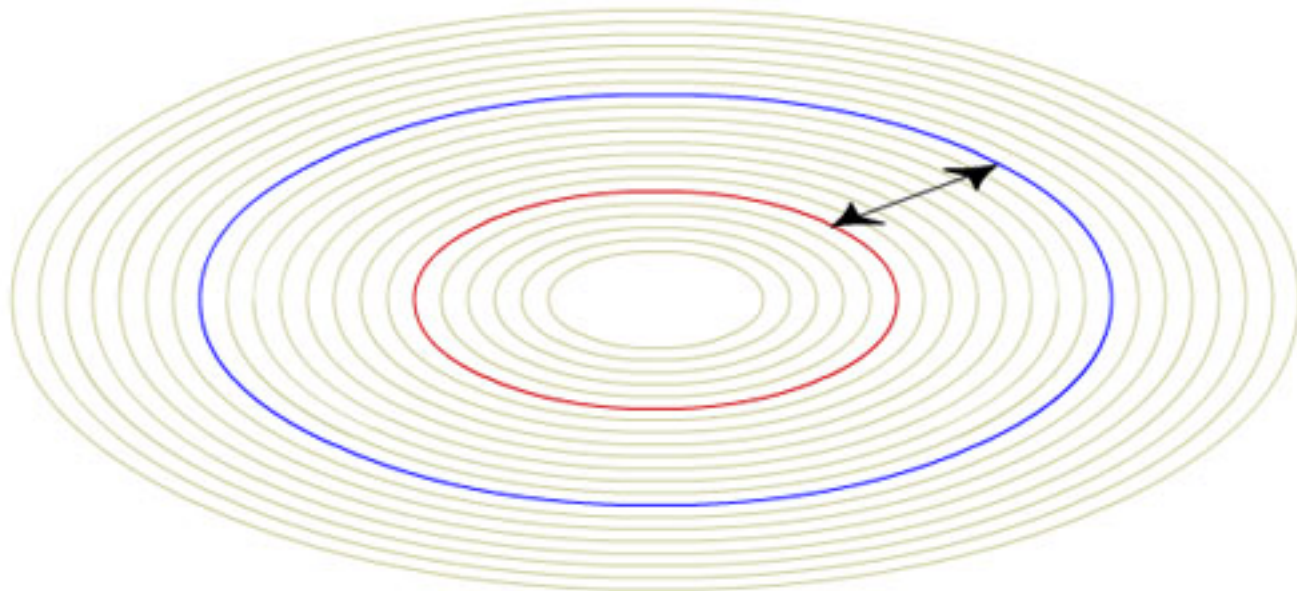
<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/Raumzeit/>

Raumkrümmung in der Nähe eines SL

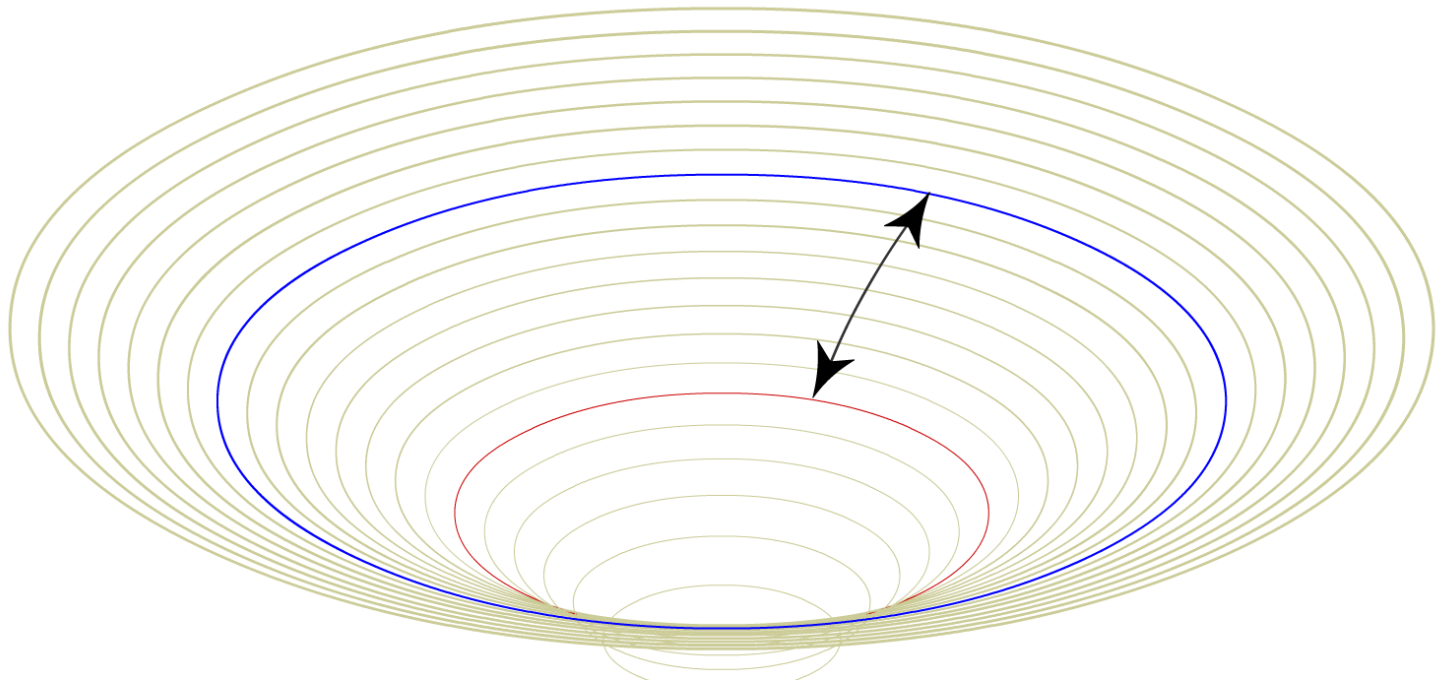


<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/Einstein/artMasstaebe/>

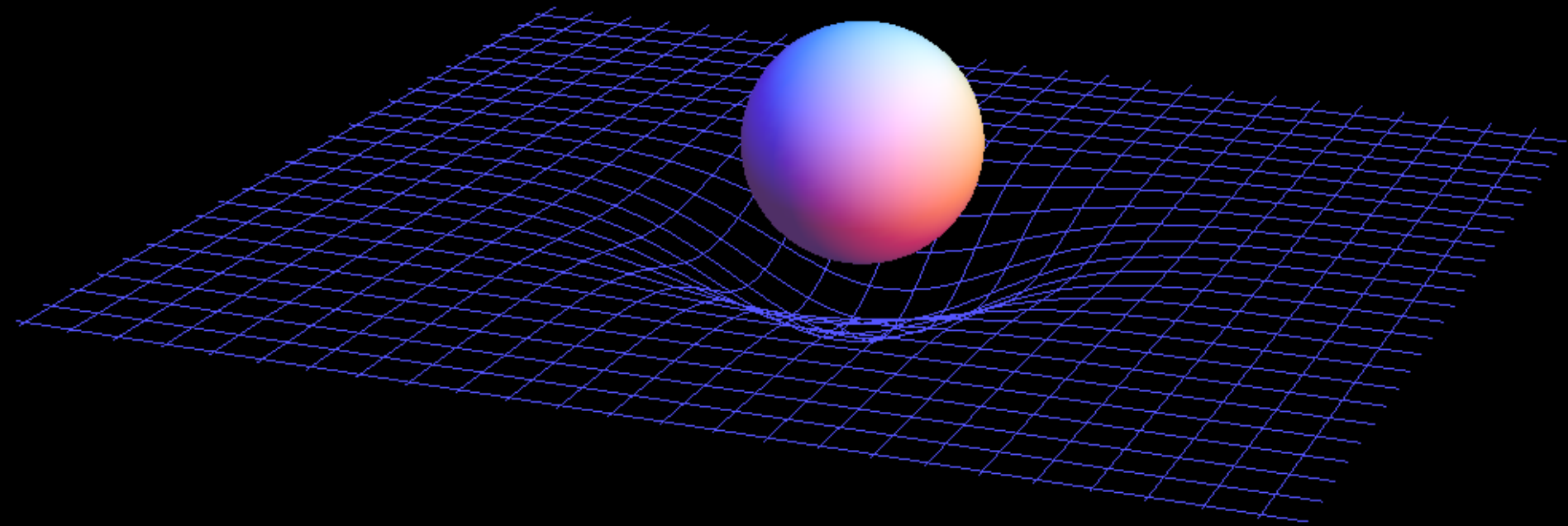
Trichtermodell



Trichtermodell



Trichtermodell



Zwischenbilanz

- Der **Raum** in der Nähe massiver Himmelskörper ist gekrümmt.
- Was bedeutet aber „**Raum-Zeit**-Krümmung“? Kann auch „die Zeit“ gekrümmt sein?
- Nein, aber ein „**Raum-Zeit-Schnitt**“ durch die Raumzeit kann gekrümmt sein!
- Dazu müssen **Bewegungen** betrachtet werden.
- Wie wird die freie („frei fallende“) Bewegung in der Allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben?

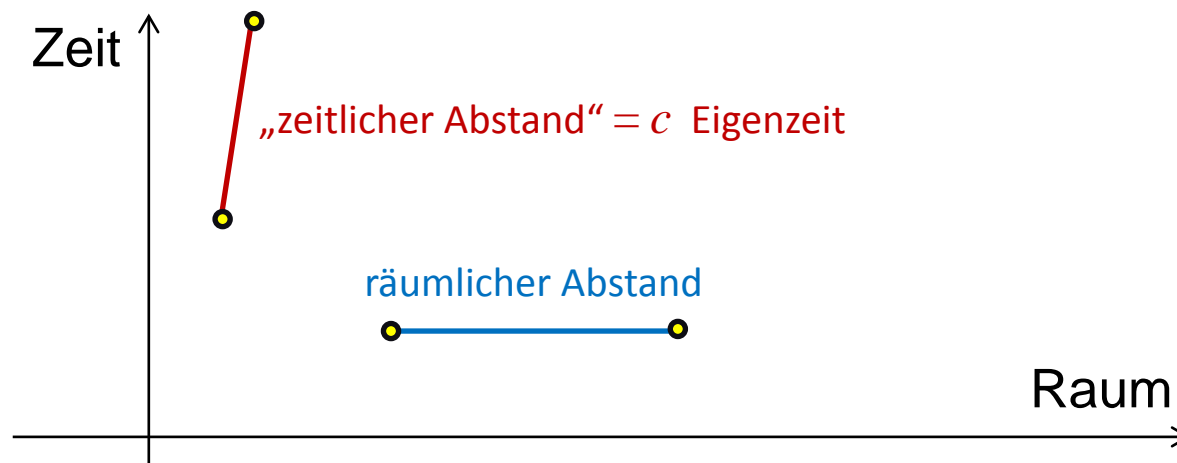
Äquivalenzprinzip



<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/Einstein/artAequivalenzprinzip/>

SRT, Metrik, Geraden, Geodäten und Sphären

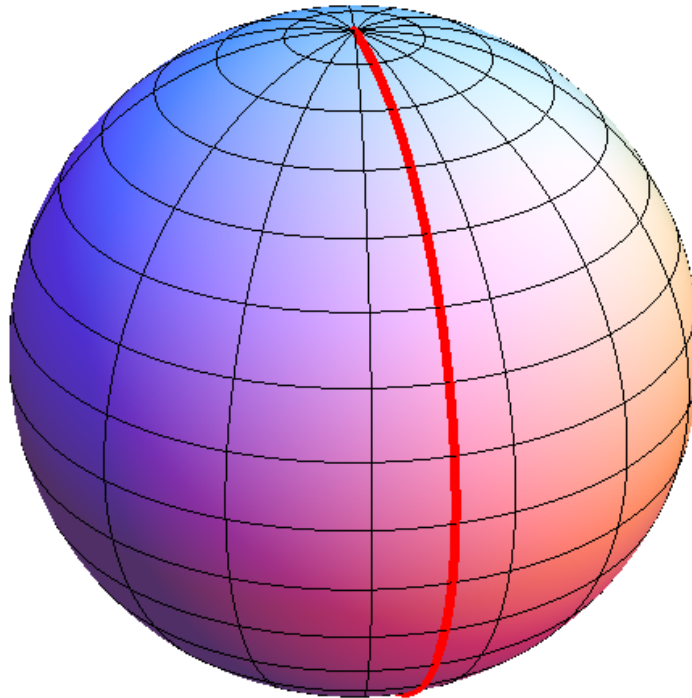
- Für einen frei fallenden Beobachter gelten **lokal** die Gesetze der **Speziellen Relativitätstheorie**.
- Zwillingsparadoxon: Für frei fallende Körper ist die **Eigenzeit maximal!**
- Abstandsbegriff in der Raumzeit (**Metrik**):



- Weltlinien frei fallender Körper sind **Geodäten** („geradeste Linien“).

SRT, Metrik, Geraden, Geodäten und Sphären

- Ein Beispiel für Geodäten („geradeste Linien“ in einem gekrümmten „Raum“ sind „Großkreise“ auf einer **Sphäre**:



Raum-Zeit-Krümmung in der Nähe von Himmelskörpern

Wir betrachten folgendes **Szenario**: Zwei Raketen werden gleichzeitig abgeschossen:

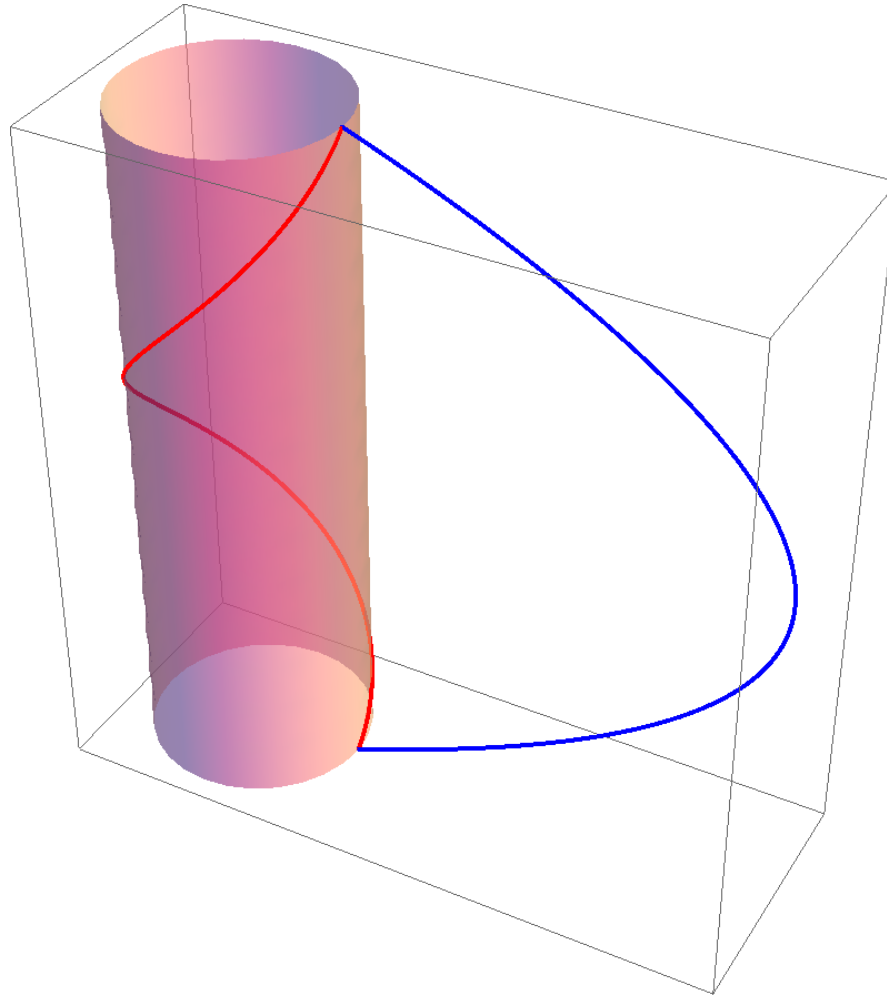
- Eine Rakete umkreist die Erde.
- Die andere Rakete bewegt sich senkrecht von der Erde weg und fällt schließlich wieder zurück.
- Danach treffen sie wieder aufeinander.

Die zwei Punkte der Raumzeit

- Ereignis des Abschusses **A**
- Ereignis des Wiedertreffens **B**

werden durch **zwei verschiedene** Geodäten („geradeste Linien“) miteinander verbunden!

Raum-Zeit-Krümmung in der Nähe von Himmelskörpern

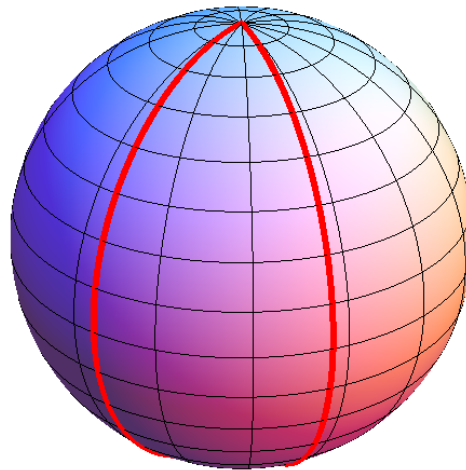


Das kann es in einer nicht-gekrümmten („flachen“) Raumzeit nicht geben!

Krümmungsradius und Lichtablenkung

Analogie:

- Auch auf einer **Sphäre** können zwei Punkte durch verschiedene Geodäten verbunden sein!



- Der „Krümmungsradius“ (= Radius der Sphäre) ist von der Größenordnung der **Länge dieser Geodäten**.

Krümmungsradius und Lichtablenkung

In der Raumzeit: „Länge der Geodäten“ = c Zeitspanne, die dieser Vorgang benötigt!

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (\text{Grundgesetz der Mechanik})$$

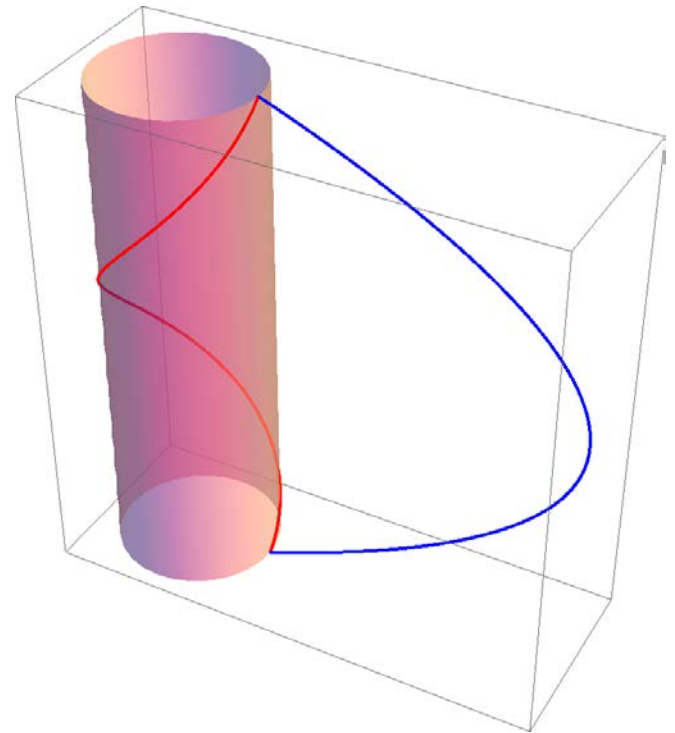
$$\frac{GM}{r} = v^2$$

$$v = \frac{2\pi r}{t_{\text{Umlauf}}}$$

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{t_{\text{Umlauf}}^2}$$

$$t_{\text{Umlauf}} = 2\pi \frac{r^{3/2}}{(GM)^{1/2}}$$

$$R_{\text{Krümmung}} \approx ct_{\text{Umlauf}} = 2\pi \frac{cr^{3/2}}{(GM)^{1/2}}$$



Krümmungsradius und Lichtablenkung

Daher größenordnungsmäßige Abschätzung des Krümmungsradius in der Nähe eines Himmelskörpers mit Masse M und Radius r :

$$R_{\text{Krümmung}} \approx \frac{c r^{3/2}}{(GM)^{1/2}} \approx \frac{r^{3/2}}{R_{\text{Schwarzschild}}^{1/2}}$$

$$R_{\text{Schwarzschild}} = \frac{2GM}{c^2}$$

Für die Erde: $R_{\text{Krümmung}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m}$

Für die Sonne: $R_{\text{Krümmung}} \approx 5 \cdot 10^8 \text{ m}$

Größenordnung des Radius der Umlaufbahn des Mars!

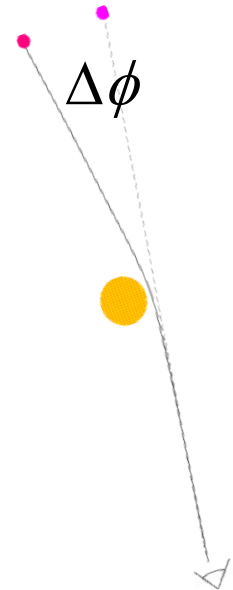
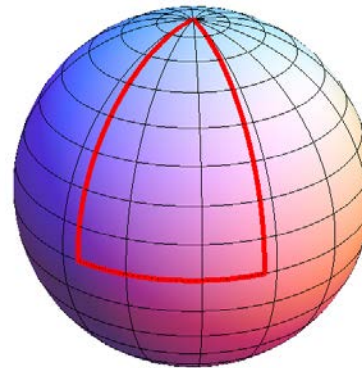
Krümmungsradius und Lichtablenkung

Ein Lichtstrahl wird abgelenkt, wenn er am Rand eines Himmelskörpers vorbeiläuft. Wie groß ist diese Ablenkung?

Analogie: Für die Winkelsumme eines „Dreiecks“ auf einer Sphäre gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\text{Fläche}}{R^2}$$

(„sphärischer Exzess“ ... misst die Abweichung von Winkeln im Vergleich mit der Euklidischen Geometrie)



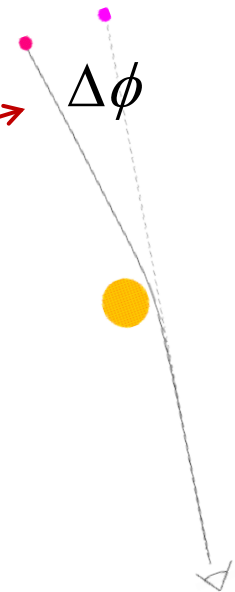
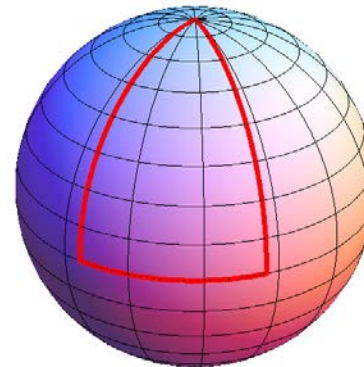
Krümmungsradius und Lichtablenkung

Ein Lichtstrahl wird abgelenkt, wenn er am Rand eines Himmelskörpers vorbeiläuft. Wie groß ist diese Ablenkung?

Analogie: Für die Winkelsumme eines „Dreiecks“ auf einer Sphäre gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\text{Fläche}}{R^2}$$

(„sphärischer Exzess“ ... misst die Abweichung von Winkeln im Vergleich mit der Euklidischen Geometrie)



Krümmungsradius und Lichtablenkung

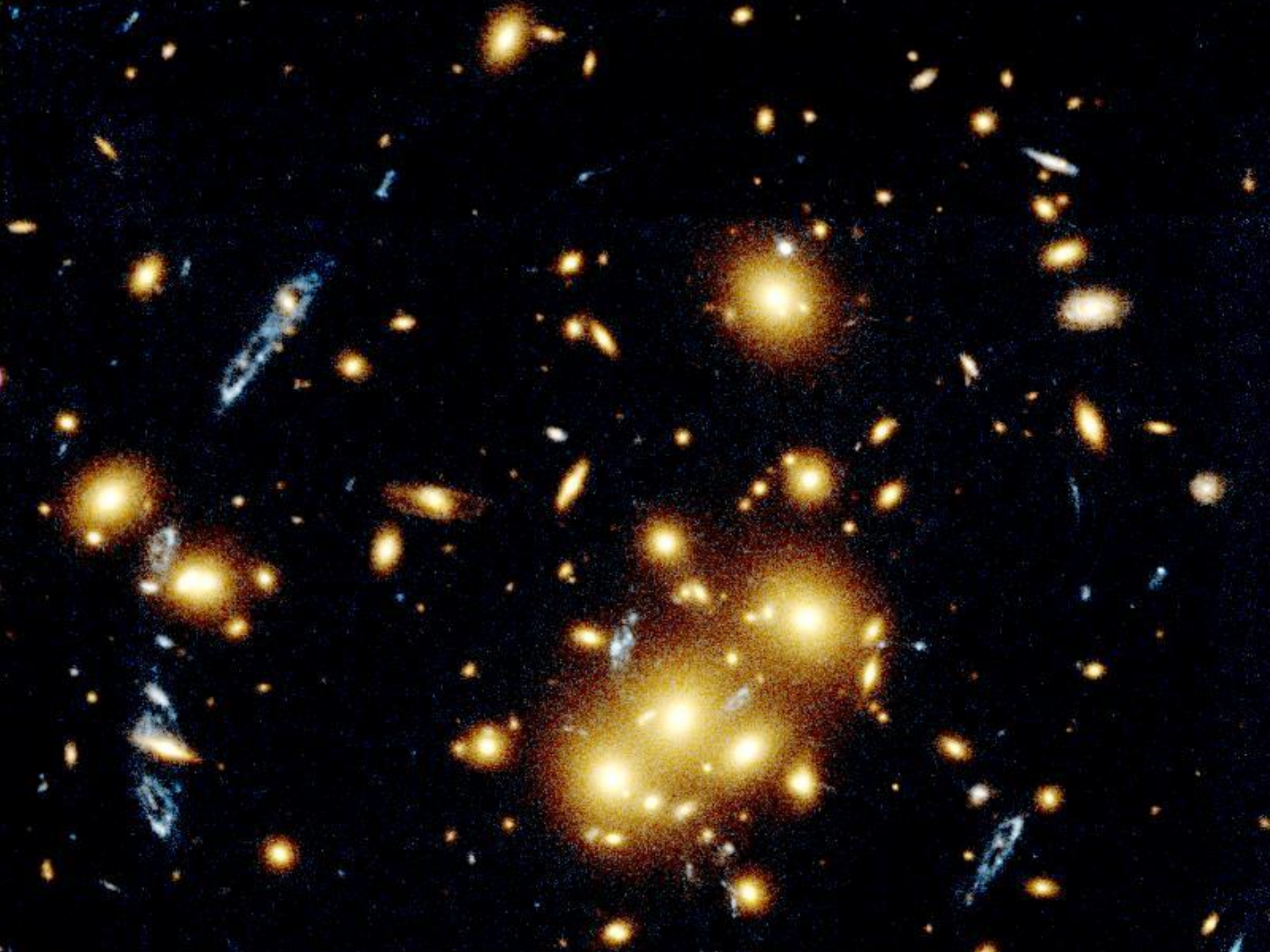
Daher Abschätzung des **Größenordnung der Lichtablenkung**:

$$\text{wirksame Raumzeit-Fläche} \approx r \cdot c \cdot \text{Lichtlaufzeit} \approx r \cdot c \cdot \frac{r}{c} = r^2$$

$$\Delta\phi \approx \frac{\text{wirksame Raumzeit-Fläche}}{R_{\text{Krümmung}}^2} \approx \frac{r^2}{R_{\text{Krümmung}}^2} \approx \frac{GM}{c^2 r} \approx \frac{R_{\text{Schwarzschild}}}{r}$$

→ Lichtablenkung am **Sonnenrand**: $\Delta\phi \approx 10^{-6} \approx 1''$

Genauere Vorhersage der ART: $\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2 r} = 1.75''$ (seit 1919 gemessen)



Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

Kosmologie:

- Theoretischer Ansatz (Einstein, 1917): „kosmologisches Prinzip“
- Beobachtung: Das Universum ist auf großen Strukturen **räumlich flach** und **expandiert** (derzeit sogar beschleunigt).

Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

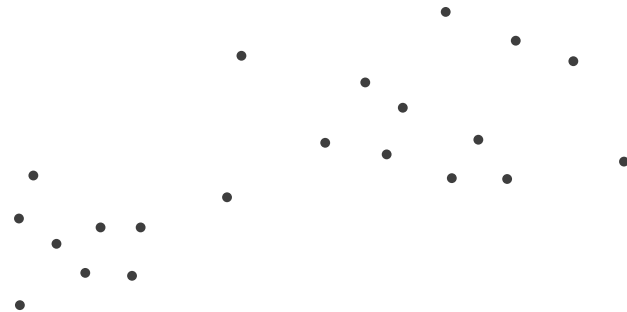
Kosmologie:

- Theoretischer Ansatz (Einstein, 1917): „kosmologisches Prinzip“
- Beobachtung: Das Universum ist auf großen Strukturen **räumlich flach** und **expandiert** (derzeit sogar beschleunigt).



früher

— Faktor 3 —>

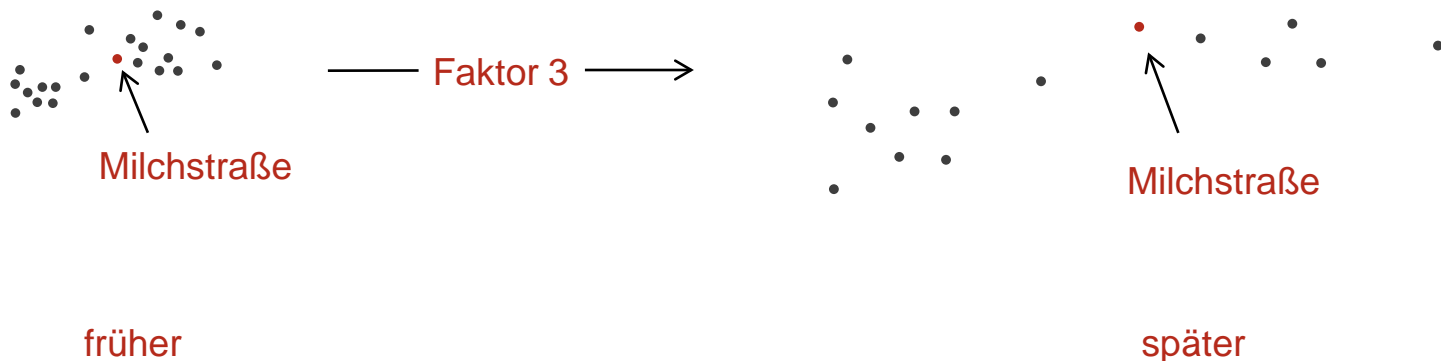


später

Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

Kosmologie:

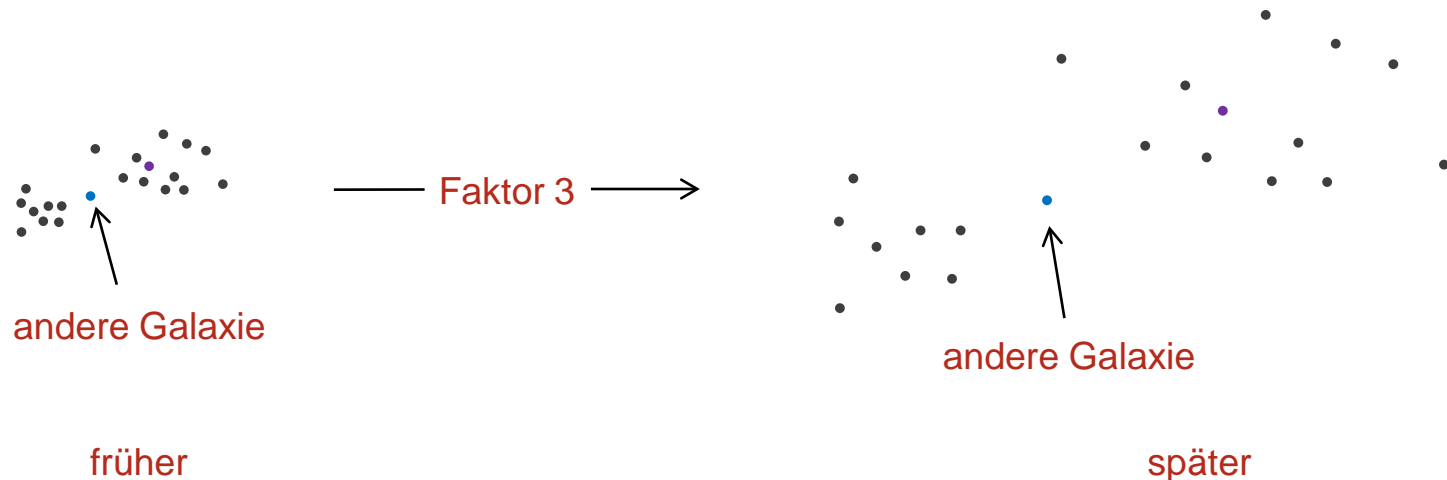
- Theoretischer Ansatz (Einstein, 1917): „kosmologisches Prinzip“
- Beobachtung: Das Universum ist auf großen Strukturen **räumlich flach** und **expandiert** (derzeit sogar beschleunigt).



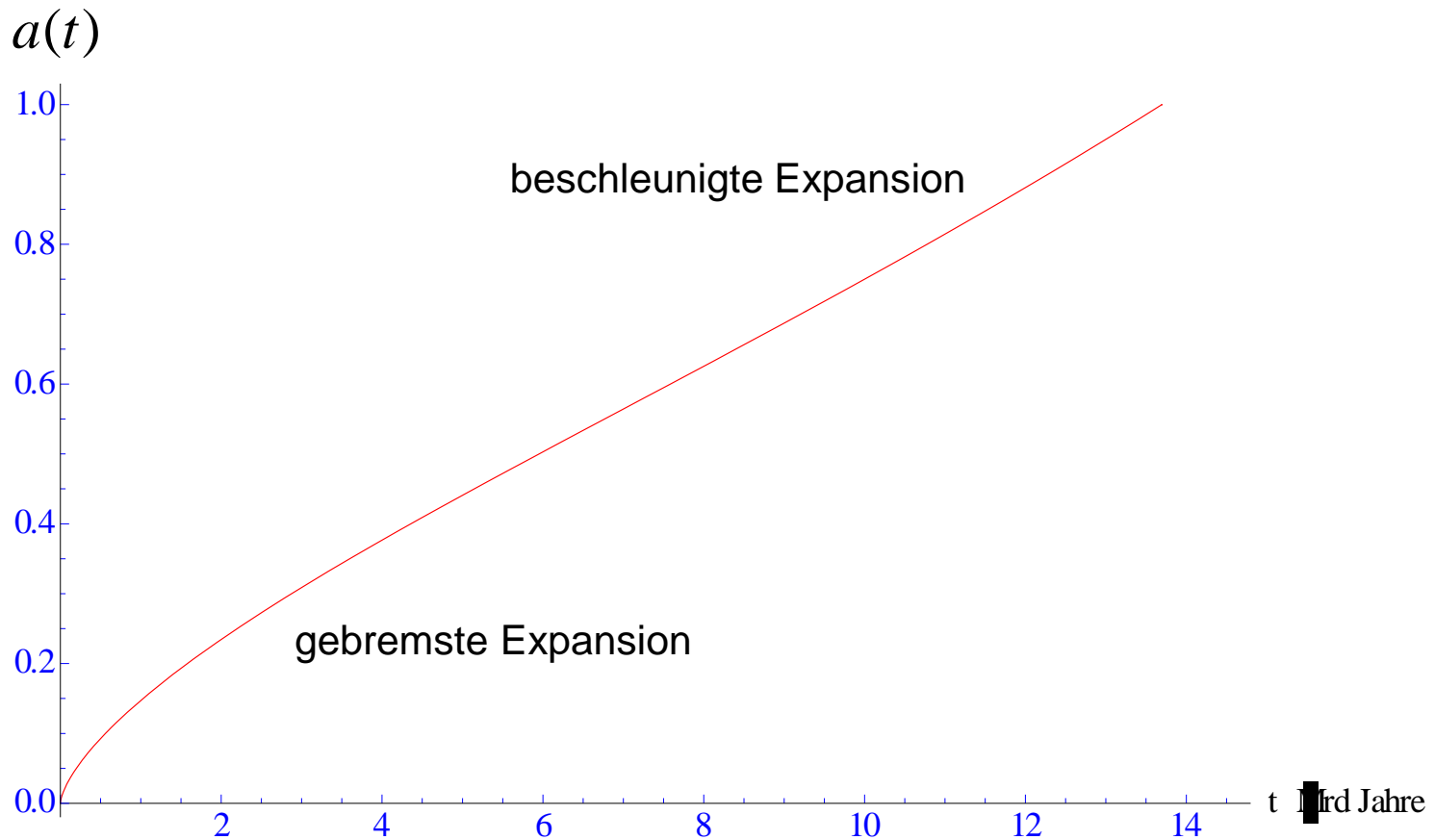
Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

Kosmologie:

- Theoretischer Ansatz (Einstein, 1917): „kosmologisches Prinzip“
- Beobachtung: Das Universum ist auf großen Strukturen **räumlich flach** und **expandiert** (derzeit sogar beschleunigt).

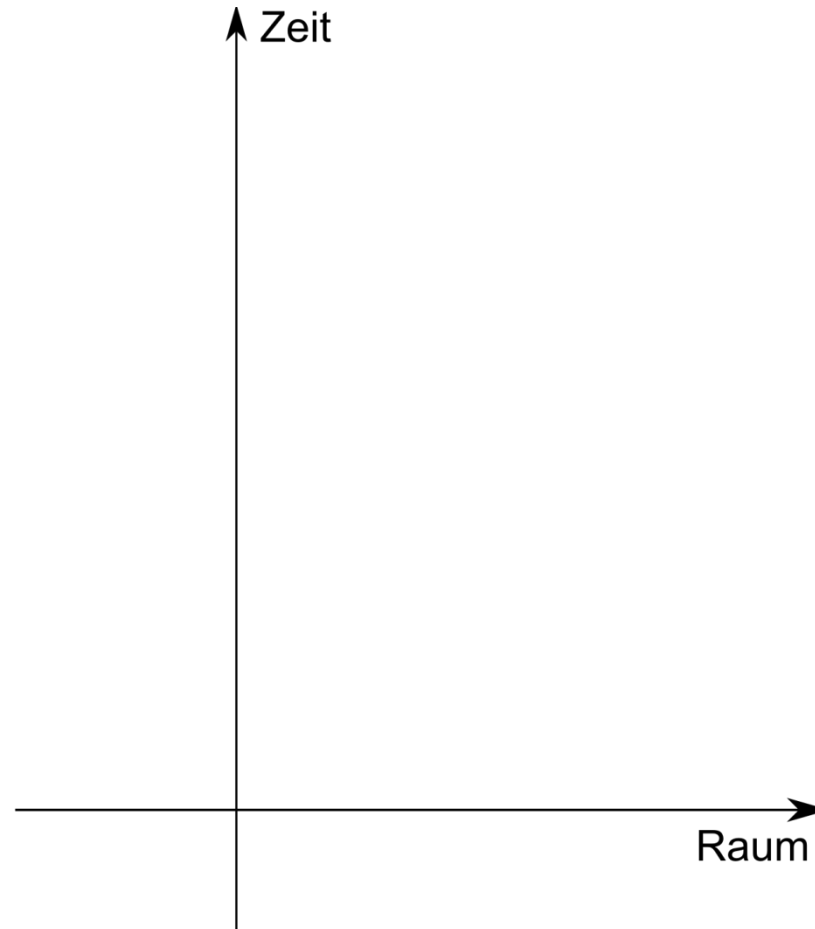


Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum



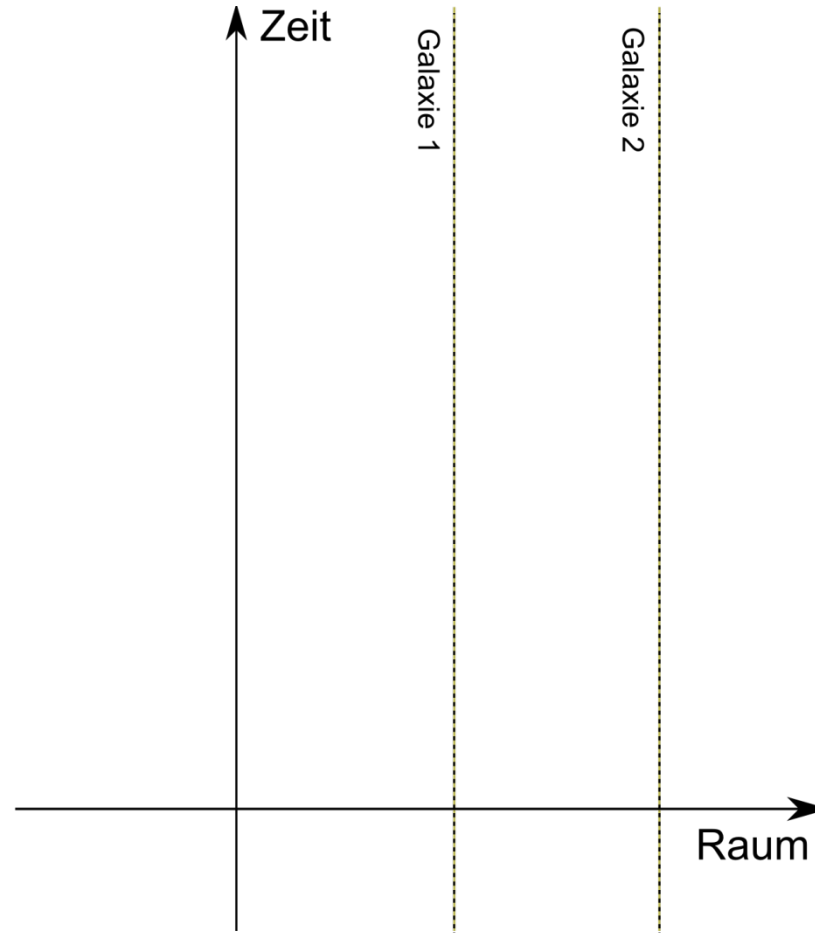
Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



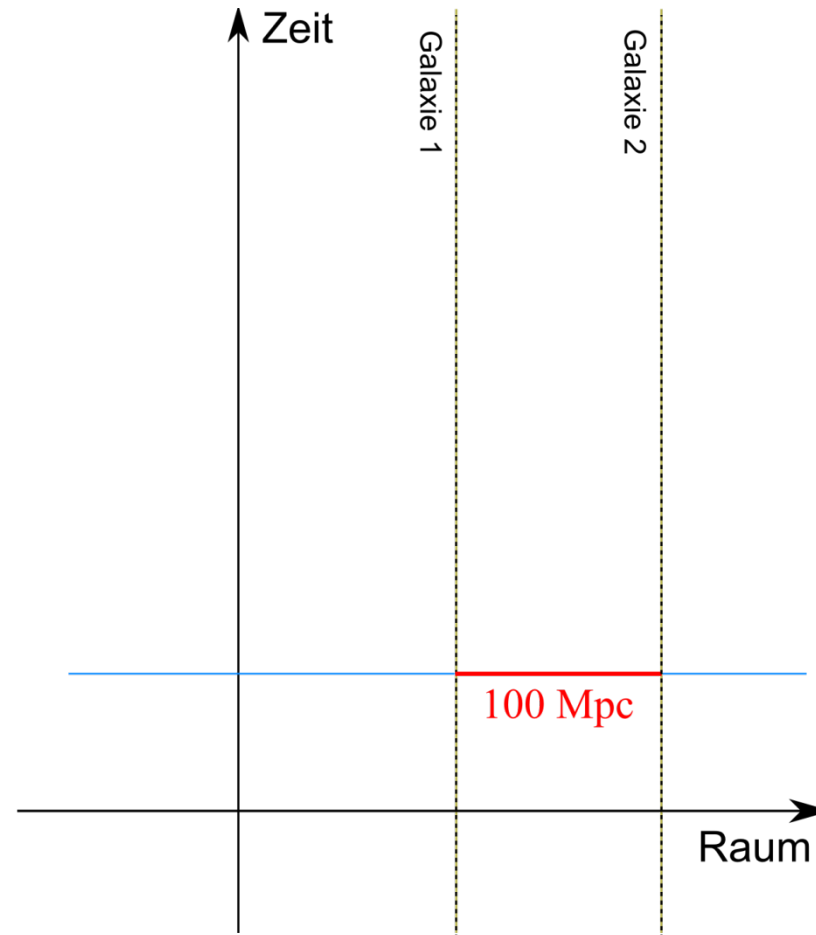
Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



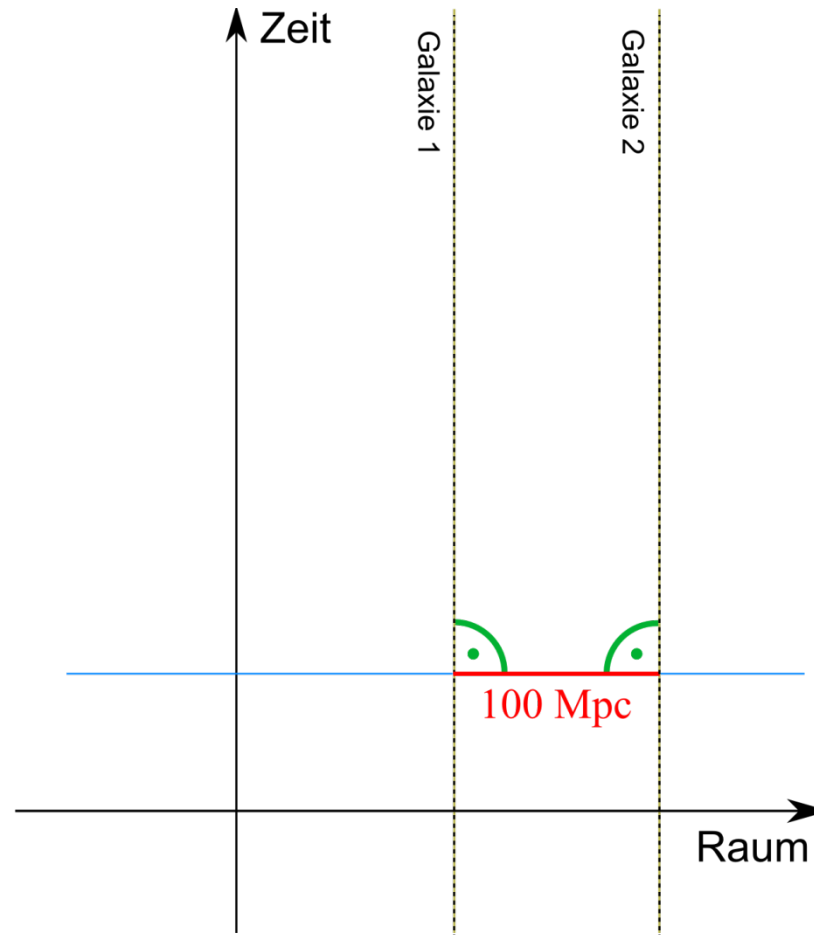
Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



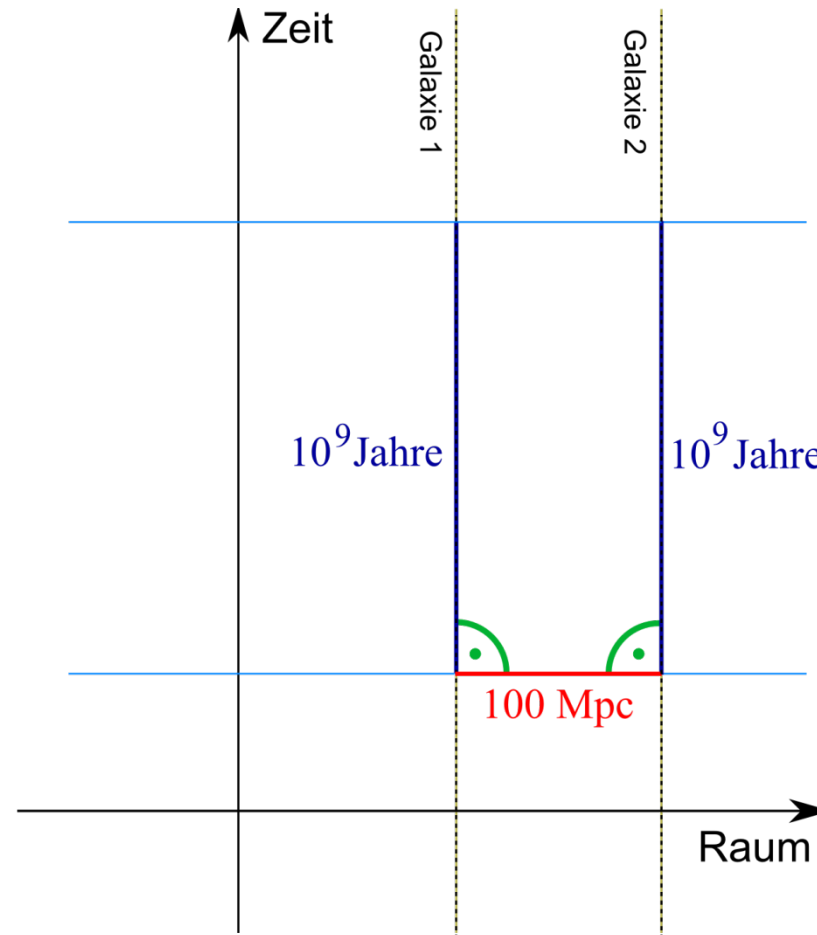
Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



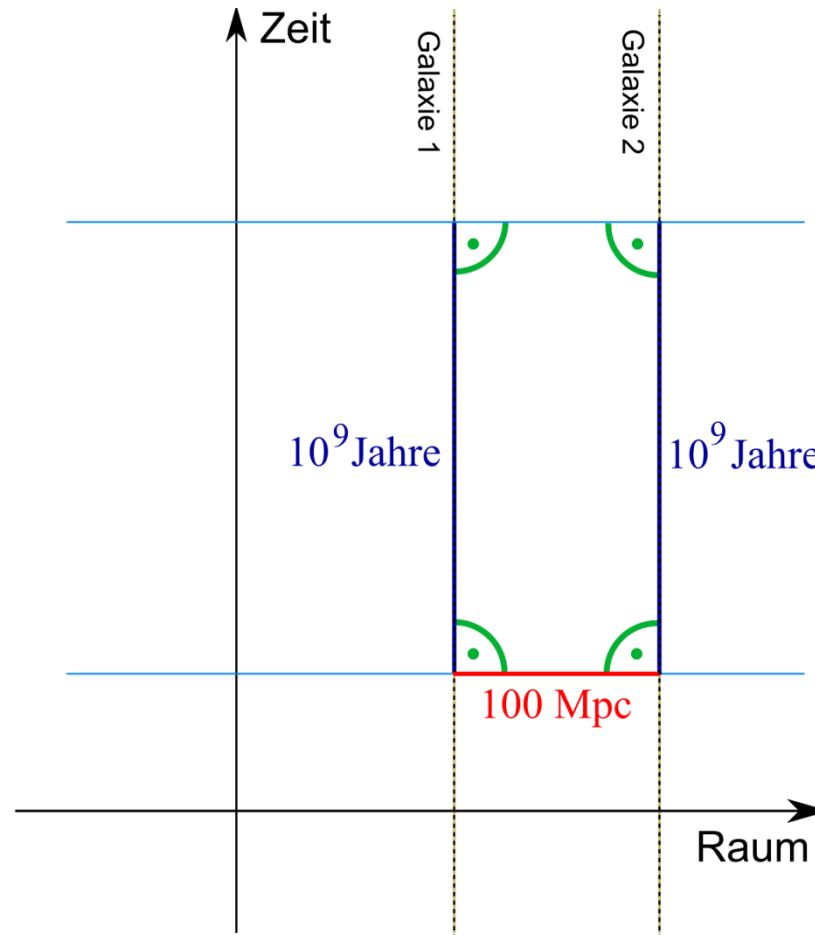
Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



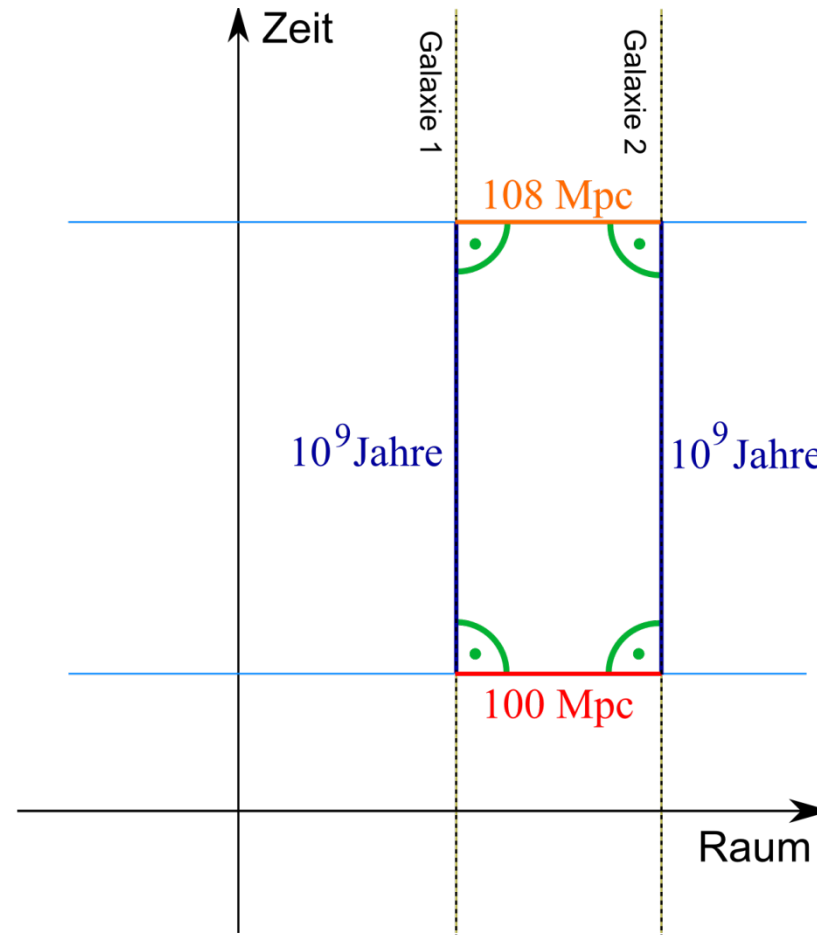
Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



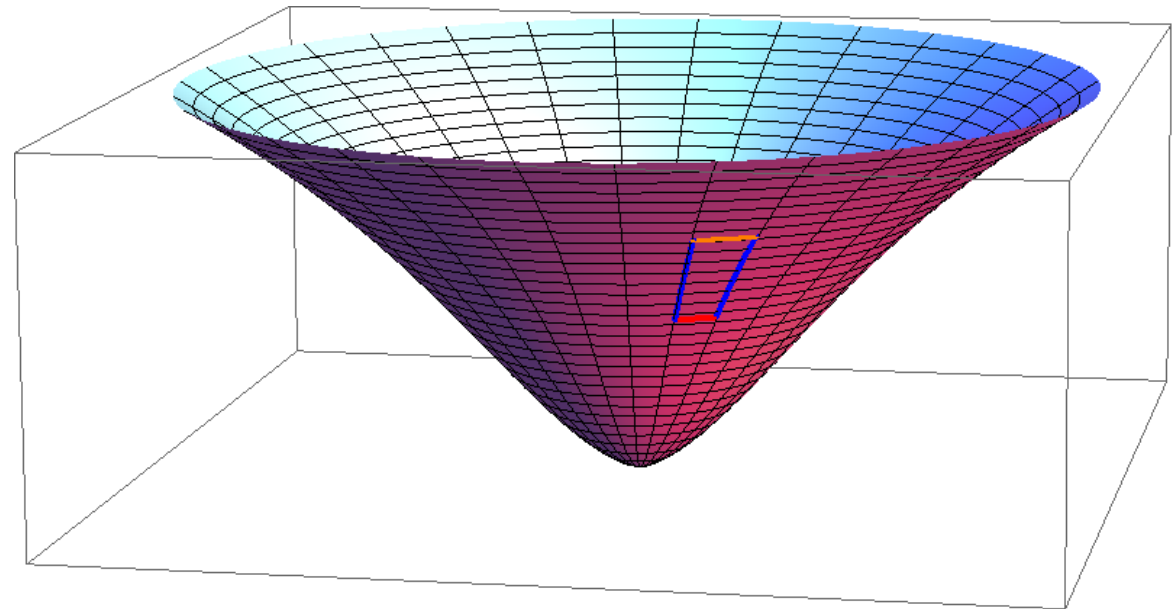
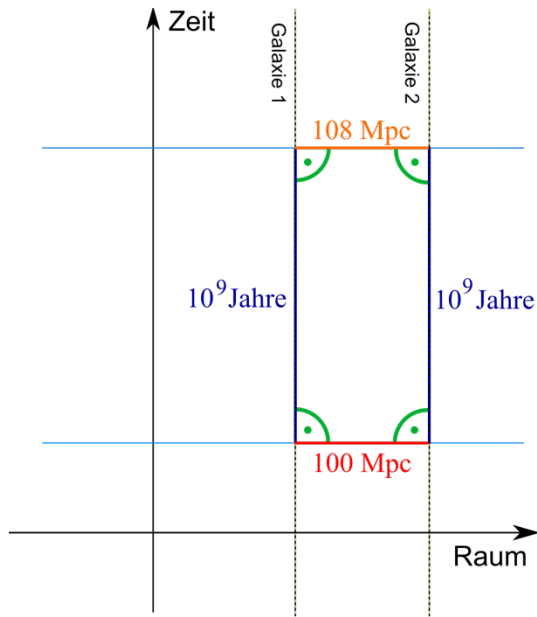
Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



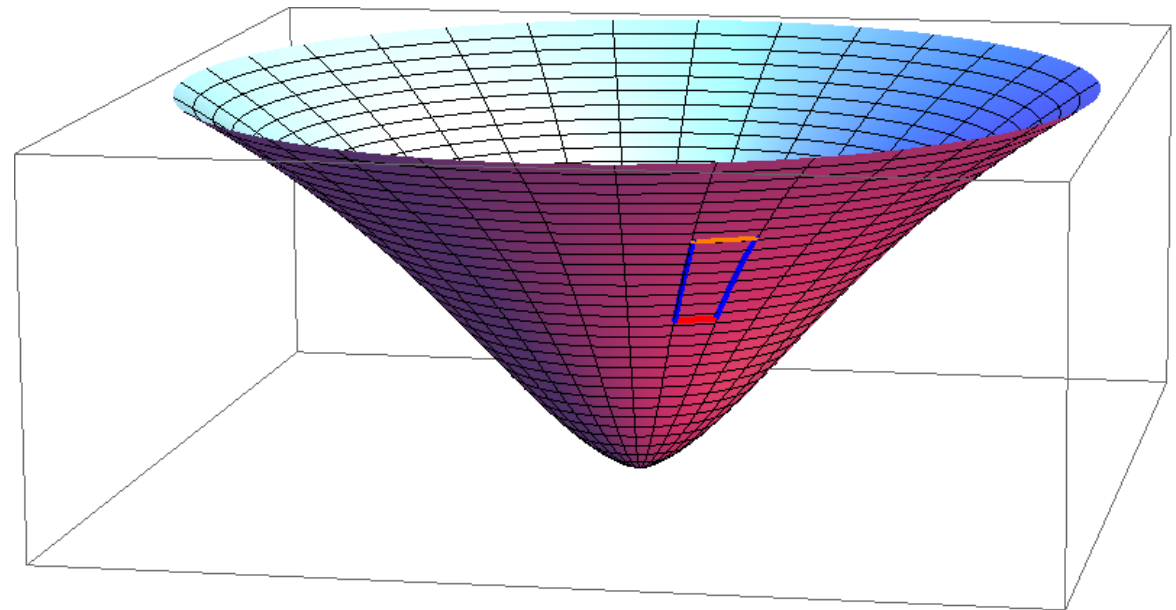
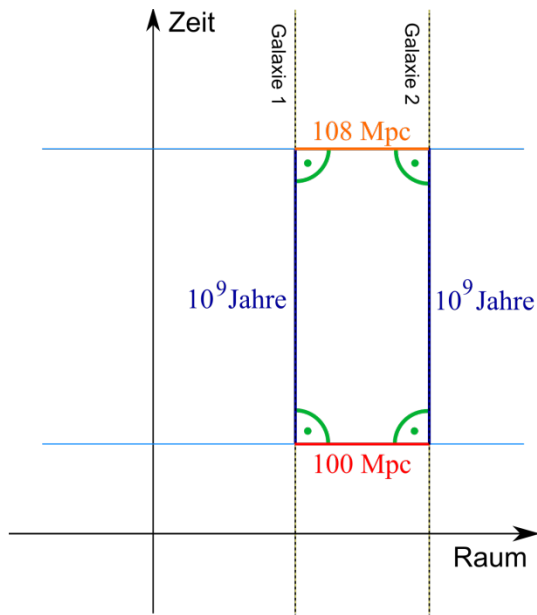
Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

2D-Modell



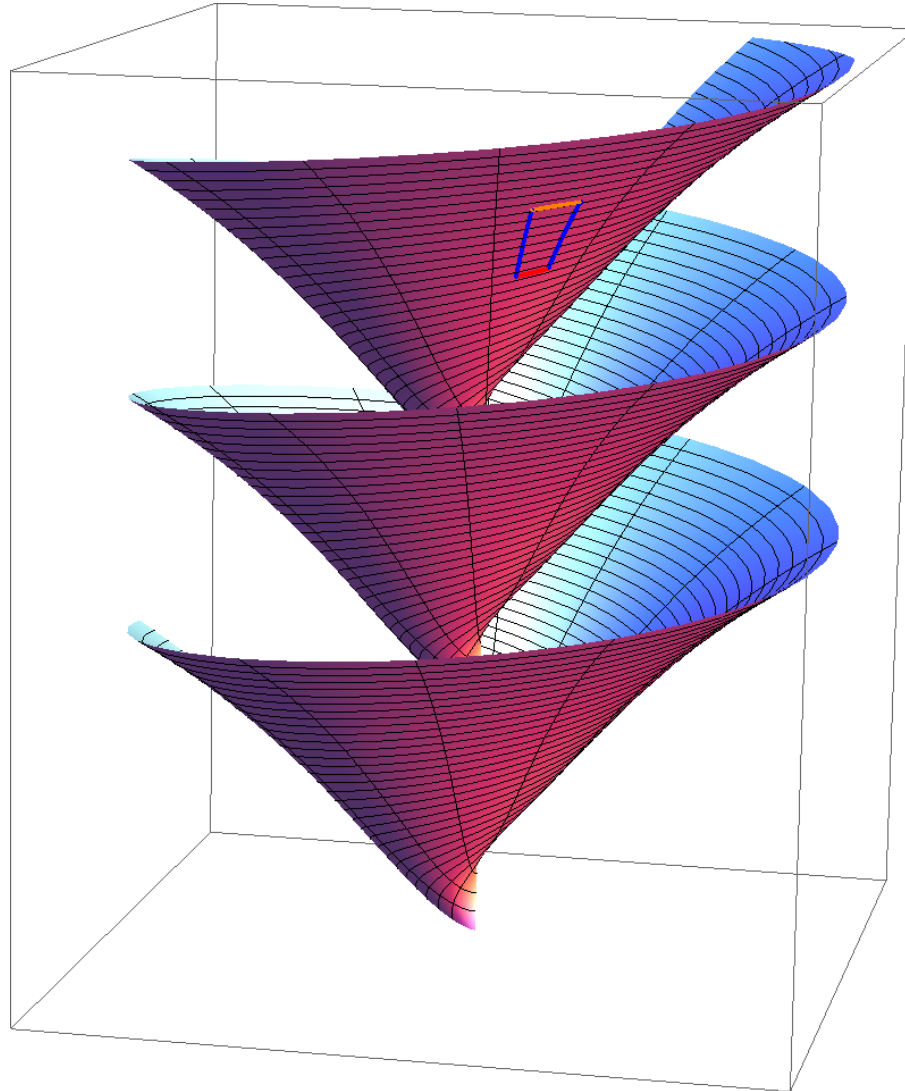
Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

2D-Modell



Problem: In diesem Modell wäre das Universum räumlich geschlossen!

Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum



Gravitationswellen

Gravitationswellen „kräuseln“ die Raumzeit

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Diese Präsentation gibt's im Web unter

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/Raumzeitkruemmung/>

