Weiße Zwerge und Neutronensterne

und wie es die Physik schafft, sie zu beschreiben[1]

Franz Embacher
Fakultät für Physik der Universität Wien
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at

Das Verständnis der letzten Stadien der Sternentwicklung zählt zu den großen Triumphen der modernen Naturwissenschaft. Ihm liegt die Physik der entarteten Materie zugrunde. Im Folgenden soll demonstriert werden, wie bemerkenswert einfach es ist, die dabei aufretenden Phänomene auf der Basis einiger weniger fundamentaler physikalischer Gesetze (nicht nur qualitativ, sondern näherungsweise auch quantitativ) zu verstehen und damit eine Brücke zwischen "mikroskopischen" und "astronomischen" Dimensionen zu schlagen. Da es dabei nur um Größenordnungen geht, werden einige – auch für die Unterrichtbarkeit notwendige – Vereinfachungen getroffen wie etwa eine simplifizierte Lesart der Quantentheorie und die Annahme, dass der Druck im Inneren eines Sterns homogen ist.

Vom Beginn eines Sternlebens an findet ein Tauziehen zwischen der kontrahierenden Wirkung der Schwerkraft und dem Druck, den ihm die Materie entgegensetzen kann, statt. Die Sternentwicklung beginnt typischerweise mit einer Wolke, die hauptsächlich aus Wasserstoff besteht und unter dem Einfuss ihrer Eigengravitation zu kollabieren beginnt. Im Verlauf einiger Millionen Jahren zerfällt die als Sternentstehungsgebiet zu beobachtende Wolke in kleinere Fragmente, in denen schließlich Kernfusionsreaktionen zünden: Bei etwa einer halben Million Kelvin setzt das Deuteriumbrennen ein, das aus zwei Protonen einen Deuteriumkern ${}^2_1\mathrm{H}$ schafft, und ab drei Millionen Kelvin das Wasserstoffbrennen, das aus zahlreichen Einzelreaktionen besteht und unter dem Strich Wasserstoff zu Helium ${}^4_2\mathrm{He}$ fusioniert. Die dabei freigesetzte Energie äußert sich nicht nur im Leuchten der Sterne, sondern erzeugt auch einen thermischen Druck, der typische Sterne an die zehn Milliarden Jahre lang stabil hält.

Ist der Wasserstoff aufgebraucht, so bekommt die Schwerkraft wieder ihre Chance. In der zentralen Region eines solchen Sterns, die nun hauptsächlich aus Helium besteht, erlischt das Wasserstoffbrennen. Mit dem Absinken der Temperatur bricht auch der Strahlungsdruck, der den Kern bisher stabil gehalten hat, zusammen. Der innere Kern kollabiert unter dem Einfluss der Eigengravitation des gesamten nachstürzenden Sterns. Dadurch steigen Druck und Temperatur wieder an. In Sternen, deren Masse M größer als etwa $0.3\,M_\odot$ ist ($M_\odot$ bezeichnet die Sonnenmasse), reicht die Temperatur aus, um weitere Kernreaktionen zu zünden (Heliumbrennen – das vor allem Kohlenstoff erzeugt – und, sofern $M \gtrsim 2.3\,M_\odot$ ist, Kohlenstoffbrennen, wodurch schwerere Elemente wie Sauerstoff, Magnesium, Natrium und Neon gebildet werden). Damit wird der Kollaps vorübergehend gestoppt, aber schließlich ist auch der Brennstoff für diese nachfolgenden Reaktionen aufgebraucht. Weder der stark absinkende Strahlungsdruck noch die elektromagnetischen Kräfte zwischen den Elementarteilchen können den nun einsetzenden Kollaps aufhalten. Die Sternmaterie geht in den **entarteten Zustand** über. Um diesen zu verstehen, sind zwei Ingredienzien nötig:

[1] Vortrag im Rahmen der Lehrerfortbildung ASTRONOMIE, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 11. – 13. 7. 2011, erscheint im Tagungsband.

1. Das **Pauli-Prinzip**: Es besagt – etwas salopp formuliert –, dass **Fermionen** (d.h. Teilchen mit halbzahligem Spin, wie Elektronen, Protonen und Neutronen) Eigenbrötler sind. Jedes beansprucht seinen eigenen (Quanten-)Zustand. In dem hier benötigten Zusammenhang kann es zur Aussage vereinfacht werden, dass jedes Fermion ein kleines Raumgebiet besetzt, das es nicht mit einem anderen Fermion der gleichen Sorte teilt. **Bosonen** (d.h. Teilchen mit ganzzahligem Spin) hingegen können sich durchaus den gleichen Zustand solidarisch teilen (was sie etwa im Fall des Bose-Einstein-Kondensats auch machen).

2. Die **Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation**. Im Zusammenhang mit dem Pauli-Prinzip interpretieren wir sie dahingehend, dass ein Fermion, dem ein Raumgebiet der Ausdehnung Δx zur Verfügung steht (in dem es nach quantenmechanischer Art "ausgeschmiert" ist), einen Impuls besitzt, dessen Betrag zumindest von der Größenordnung $\hbar/\Delta x$ ist.

Wird Materie sehr stark komprimiert, so entarten zunächst die Elektronen. Steht für jedes Elektron ein Raumgebiet der Ausdehnung Δx (also ein Volumsinhalt $\approx (\Delta x)^3$) zur Verfügung, so besitzt jedes dieser Elektronen (nichtrelativistisch betrachtet) eine Energie, die zumindest von der Größenordnung der Fermi-Energie

$$E_F \approx \frac{\text{Minimalimpuls}^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{m_e(\Delta x)^2} \tag{1}$$

ist (m_e = Masse des Elektrons). Um die Elektronen noch näher aneinander zu drücken (d.h. Δx zu verkleinern), ist demnach ein Energieaufwand erforderlich, was sich als so genannter **Entartungsdruck** oder **Fermi-Druck**

$$p_F \approx \frac{E_F}{(\Delta x)^3} \approx \frac{\hbar^2}{m_e(\Delta x)^5} \tag{2}$$

äußert. Je kleiner Δx ist (d.h. je größer die Dichte der Materie ist), umso größer ist er.

> Anmerkung zur Begründung von (2): Interessanterweise ist diese harmlos anmutende Umformung der formal schwierigste Teil unserer Betrachtungen. Genau genommen müsste der Druck entsprechend dem ersten Hauptsatz der Theomodynamik als $p_F = -\,dE_F/dV$ berechnet werden, wobei $V = (\Delta x)^3$ den Volumsinhalt angibt. Dieser Verweis auf die Thermodynamik und die Differentiation einer Potenzfunktion mit Exponent $-\frac{2}{3}$ lassen sich umgehen, indem das betreffende Raumgebiet als Würfel mit Kantenlänge Δx angenommen und die Kraft abgeschätzt wird, die das Elektron einer Komprimierung des ihm zur Verfügung stehenden Raumes entgegensetzt. Um dieses Gebiet auf einen kleineren Würfel mit Kantenlänge $\Delta x - \varepsilon$ zusammenzudrücken, ist mit (1) ein Arbeitsaufwand von
>
> $$W = \frac{\hbar^2}{m_e(\Delta x - \varepsilon)^2} - \frac{\hbar^2}{m_e(\Delta x)^2} = \frac{\hbar^2(2\,\varepsilon\,\Delta x - \varepsilon^2)}{m_e(\Delta x)^2(\Delta x - \varepsilon)^2} \approx \frac{2\,\hbar^2\,\varepsilon}{m_e(\Delta x)^3} \tag{3}$$
>
> nötig. In jede der drei Raumrichtungen ist daher gemäß "Arbeit $W/3$ = Kraft F mal Weg ε" die Kraft
>
> $$F = \frac{W}{3\,\varepsilon} \tag{4}$$

> nötig. Der Druck ist dann durch $F/(\Delta x)^2$ gegeben, was bis auf einen Faktor $\frac{2}{3}$ auf (2) führt. Insgesamt ergibt sich auf diese Weise die Faustregel "Druck $\approx$ Energie/Volumsinhalt" (die für eine Abhängigkeit der Form $E = cV^{-\alpha}$ das – durch Differenzieren zu erhaltende – korrekte Ergebnis bis auf einen Faktor α wiedergibt).

Während die Materie eines kollabierenden Sterninneren nun immer dichter (und Δx daher immer kleiner) wird, wächst der Entartungsdruck (2) der Elektronen. Im Fall eines Sterns mit einer Gesamtmasse von weniger als $8\,M_\odot$ wird er schließlich groß genug, um der Gravitation standzuhalten. Das Endstadium dieses Prozesses ist ein **Weißer Zwerg**. Das dramatische Ringen der Materie im Kern wird von weithin sichtbaren Erscheinungen in den äußeren Sternbereichen (das Rote-Riesen-Stadium und das Abstoßen der äußeren Hülle als planetarischer Nebel) begleitet.

Ein Weißer Zwerg ist ein Stern, der durch den Entartungsdruck der Elektronen stabilisiert wird. Die Dichte Weißer Zwerge ist von der Größenordnung $10^9\,\mathrm{kg/m^3}$. Die (nach Erlöschen der Kernfusion stark abgesunkene) Temperatur kann vernachlässigt werden, so dass der im Inneren herrschende Druck durch den Minimalwert (2) abgeschätzt wird. Wir betreiben nun noch ein bisschen Theorie, um zu berechnen, wann der Kollaps zum Stillstand kommt, d.h. unter welchen Bedingungen ein **Gleichgewicht** zwischen Schweredruck und Entartungsdruck möglich ist: Im Inneren eines Stern mit Masse M und Radius R herrscht ein Schweredruck der Größenordnung

$$p \approx \frac{GM^2}{R^4}\,, \tag{5}$$

wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante ist. Gleichgewicht kann bestehen, wenn dieser Druck gleich (2) ist.

> Anmerkung zur Begründung von (5): Diese Beziehung kann überschlagsmäßig aus der Formel $p = \rho g h$ für den Druck in einer Flüssigkeit in der Tiefe h gewonnen werden, indem für die Dichte $\rho \approx M/R^3$, für die Gravitationsbeschleunigung $g \approx GM/R^2$ (ihr Wert an der Oberfläche) und für die Tiefe $h \approx R$ gesetzt wird.

Wir setzen (2) und (5) gleich, und erhalten

$$\frac{\hbar^2}{m_e(\Delta x)^5} \approx \frac{GM^2}{R^4}\,. \tag{6}$$

Da jedem Elektron ein Raumgebiet der Ausdehnung Δx zur Verfügung steht, ist das Gesamtvolumen des Sterns (also R^3) gleich $(\Delta x)^3$ mal der Zahl der Elektronen. Letztere ist ungefähr gleich der Zahl der Nukleonen und daher gleich dem Verhältnis M/m_p (wobei m_p die Masse des Protons – bzw. Nukleons – ist und die Masse des Elektrons unter den Teppich gekehrt wurde, da sie zur Masse des Sterns kaum beiträgt). Aus $R^3 \approx (\Delta x)^3 M/m_p$ berechnen wir Δx, setzen in (6) ein und erhalten nach einem kleinen Umformungsschritt

$$M^{1/3}R \approx \frac{\hbar^2}{G\,{m_p}^{5/3} m_e}\,. \tag{7}$$

Das ist die **Gleichgewichtsbedingung für Weiße Zwerge**. Der numerische Wert der rechten Seite (in die nur Naturkonstanten und Elementarteilchen-Massen eingehen) ist ungefähr

$10^{17}\,\mathrm{kg}^{1/3}\mathrm{m}$. Durch die Masse und den Radius der Sonne ausgedrückt, können wir (7) auch in der Form

$$\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/3}\frac{R}{R_\odot}\approx 10^{-2} \tag{8}$$

schreiben. Damit ist eine Beziehung zwischen dem Radius und der Masse eines Weißen Zwergs gefunden. Besitzt der Weiße Zwerg die gleiche Masse wie die Sonne (was größenordnungsmäßig für die meisten Weißen Zwerge der Fall ist), so ergibt sich für ihn ein Radius von

$$\frac{R_\odot}{100}\approx 7\cdot 10^6\,\mathrm{m}\approx R_{\textsf{Erde}}\,. \tag{9}$$

Ein Weißer Zwerg von Sonnenmasse hat ungefähr die Größe der Erde. Beachten Sie, dass kein allzu großer theoretischer Aufwand nötig war, um dieses (durch astronomische Beobachtungen untermauerte) Resultat zu erzielen!

Zum Verständnis Weißer Zwerge fehlt uns noch ein Aspekt. Wir haben den Fermi-Druck (2) unter der Voraussetzung abgeleitet, dass die Energie durch die nichtrelativistische Formel (1) gegeben ist. Bei sehr dichten Sternen wird aber Δx so klein (und daher der Minimalimpuls $\hbar/\Delta x$ so groß), dass die Elektronen relativistisch werden. (Das ist der Fall, wenn die Geschwindigkeit, die wir dem Minimalimpuls zuordnen, von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit c ist oder, anders ausgedrückt, wenn (1) in die Größenordnung der Ruheenergie $m_e c^2$ kommt). Daher betrachten wir noch den (extrem) relativistischen Fall, in dem die Beziehung zwischen Energie und Impuls einfach

$$E=\mathrm{Impuls}\cdot c \tag{10}$$

lautet.

> Anmerkung zur Begründung von (10): Für Photonen führen die Einsteinsche Beziehung $E=hf$ und die de Broglie-Beziehung $p=h/\lambda$ zusammen mit $f\lambda=c$ unmittelbar auf (10). Für Teilchen mit nichtverschwindender Ruhemasse ist die Beziehung zwischen Energie und Impuls zwar etwas komplizierter, nimmt aber im extrem relativistischen Fall ebenfalls die Form (10) an.

Im relativistischen Fall ergibt sich daher ein Entartungsdruck von

$$p_F\approx\frac{E}{(\Delta x)^3}\approx\frac{\mathrm{Impuls}\cdot c}{(\Delta x)^3}\approx\frac{\hbar\,c}{(\Delta x)^4}\,. \tag{11}$$

Gleichgewicht kann bestehen, wenn dies gleich (5) ist, was (wieder mit $R^3\approx(\Delta x)^3M/m_p$) auf die Bedingung

$$\frac{\hbar\,c}{{m_p}^{4/3}}\frac{M^{4/3}}{R^4}\approx\frac{GM^2}{R^4} \tag{12}$$

führt. Hier tritt nun eine bemerkenswerte Überraschung auf: Der Radius R des Weißen Zwergs fällt heraus! Neben Naturkonstanten und Elementarteilchen-Massen tritt nur mehr die Masse auf. Wir lösen nach M auf und erhalten die so genannte **Chandrasekhar-Masse**

$$M_C\approx\frac{1}{{m_p}^2}\left(\frac{\hbar\,c}{G}\right)^{3/2}\,. \tag{13}$$

Ein (extrem) relativistischer Weißer Zwerg kann nur diese Masse besitzen! Eine etwas genauere Berechnung ergibt den numerischen Wert $M_C\approx 1.46\,M_\odot$, und zwar ziemlich unabhängig von der chemischen Zusammensetzung. Die besondere Bedeutung der Chandrasekhar-Masse besteht darin, dass sie eine allgemeine **Massen-Obergrenze für Weiße Zwerge** darstellt. Ein Weißer Zwerg mit $M \ll M_C$ kann nichtrelativistisch beschrieben werden, in einem Weißen Zwerg mit $M \lesssim M_C$ sind die Elektronen relativistisch, und im Fall $M > M_C$ ist überhaupt kein Gleichgewicht möglich. Ist also die Masse des kollabierenden Kerns größer als M_C, so kann der Entartungsdruck der Elektronen den Kollaps nicht aufhalten.

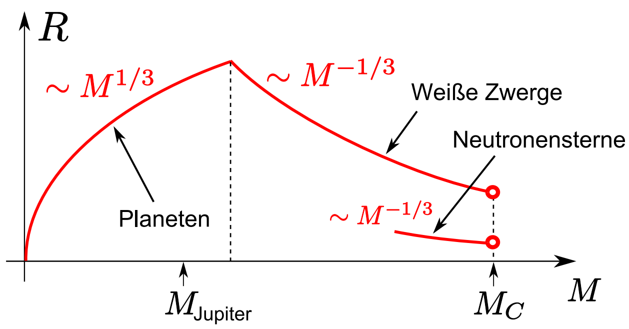
Die bisher gefundenen Beziehungen beinhalten eine weitere Überraschung: Stellen wir uns vor, Materie nach und nach anzuhäufen (d.h. langsam immer mehr Materie hinzuzufügen, sodass stets Gleichgewicht herrscht)! Bei Abwesenheit von Kernfusion (was astrophysikalisch gesehen als "kalt" bezeichnet werden kann) wird zunächst der Radius des entstehenden Materieklumpens wachsen. Da wir nur an Größenordnungen interessiert sind, bemerken wir, dass alle flüssigen und festen Zustandsformen der Materie ungefähr die gleiche Dichte aufweisen, nämlich $\rho \approx 10^4\,\mathrm{kg/m^3}$. Das gilt etwa für ein Staubkorn, einen Kühlschrank und für die Erde als Ganzes. Mit $\rho = M/V \approx M/R^3$ wächst R daher proportional zu $M^{1/3}$ an, und zwar ungeachtet der Gravitationskräfte (die zwar den Druck im Inneren, nicht aber die Dichte stark erhöhen können). Diese Eigenschaft verdankt die Materie der recht rigiden Atomstruktur, d.h. den Eigenschaften der elektromagnetischen Kräfte. Bei weiterer Massenzunahme beginnt sich das Bild aber (irgendwo bei einigen Jupitermassen) zu ändern. Ist der Schweredruck zu groß, so wird die Atomstruktur aufgebrochen. Wächst der Druck weiter, so werden die elektromagnetischen Kräfte unbedeutend, und die Materie setzt ihm den Entartungsdruck der Elektronen entgegen. Dieser ist aber vergleichsweise flexibel: Wie die Formeln (1) und (2) zeigen, beharren die Elektronen nicht auf einem bestimmten Wert von Δx, sondern reagieren auf eine Komprimierung einfach durch eine entsprechende Erhöhung des Impulses und damit des Drucks. Dieses Verhalten wird näherungsweise durch (7) beschrieben – eine Beziehung, die zwar auf den ersten Blick unscheinbar aussehen mag, aber doch etwas Unerwartetes impliziert: Der Radius des Objekts, das wir mittlerweile aufgehäuft haben, nimmt mit steigender Masse (proportional zu $M^{-1/3}$) ab! Der Übergang findet bei Dichten von etwa $10^7\,\mathrm{kg/m^3}$ statt und markiert die Grenze zwischen Planeten (stabilisiert durch die Atomstruktur) und Weißen Zwergen (stabilisiert durch den Entartungsdruck der Elektronen). Unser Objekt ist also von nun an ein Weißer Zwerg und wird mit zunehmender Masse immer kleiner, bis schließlich ab M_C (bei Dichten jenseits von $10^{10}\,\mathrm{kg/m^3}$) überhaupt keine stabile Konfiguration mehr möglich ist.

Wir gehen nun noch einen Schritt weiter und betrachten kollabierende Sterne mit $M \gtrsim 8\,M_\odot$. Nach dem Zünden und Erlöschen weiterer Fusionsprozesse (Neon-, Sauerstoff- und Siliziumbrennen, wodurch mittelschwere Elemente bis zum Eisen und Nickel gebildet werden) ist für sie der Schweredruck der nachstürzenden Materie so groß, dass der Entartungsdruck der Elektronen nichts gehen ihn ausrichten kann. Die letzte Hoffnung kommt von zwei nun einsetzenden Elementarteilchenreaktion, dem inversen Beta-Zerfall $p + e^- \to n + \nu_e$, bei dem gewissermaßen die Elektronen in die Protonen hineindrückt und Neutronen produziert werden, und dem Kernphotoeffekt, bei dem ein Photon von einem Atomkern absorbiert und ein Neutron emittiert wird. Am Ende besteht der Kern des Sterns nur mehr aus Neutronen. Wir sprechen auch von "Neutronenmaterie", für die der Begriff der chemischen Zusammensetzung keinen Sinn mehr macht. Da Neutronen – ebenso wie Elektronen – Fermionen sind, üben sie nun ihrerseits einen Entartungsdruck aus. Die jetzt einsetzenden Prozesse sind noch nicht im Detail verstanden, aber grundsätzlich bestehen nach unserem heutigen Wissen zwei Möglichkeiten: Kann der Entartungsdruck der Neutronen den Kollaps aufhalten, so entsteht ein **Neutronenstern**, der ungefähr die Dichte von Atomkernen (um $10^{18}\,\mathrm{kg/m^3}$) besitzt und dessen Radius um die $10\,\mathrm{km}$ beträgt. Kann der Entartungsdruck der Neutronen den Kollaps nicht aufhalten, so kollabiert der Kern weiter und wird – in einem Prozess, den die Newtonsche Gravitationstheorie nicht mehr beschreiben kann – zu einem **Schwarzen Loch**. Während dieser Vorgänge explodiert die äußere Hülle des Sterns in einer **Supernova**, die nicht aus Kernfusion, sondern aus der gravitativen Bindungsenergie gespeist wird. Diese wird durch die Emission von Neutrinos freigesetzt, und es werden schwerste Elemente bis hin zum Uran gebildet. (Dabei sei am Rande erwähnt, dass es Spekulationen über eine dritte Möglichkeit gibt, nämlich die Existenz von "Quarksternen", also von Sternen, die durch den Entartungsdruck von Quarks im Gleichgewicht gehalten werden).

Die Stabilität von Neutronensternen kann mit Hilfe einer einfachen Überlegung analsiert werden: Da die Neutronen nun die Rolle übernehmen, die in Weißen Zwergen von Elektronen gespielt wird, muss in den obigen Beziehungen, insbesondere in der Gleichgewichtsbedingung (7), die Elektronenmasse m_e lediglich durch die Neutronenmasse (die wir nicht von der Protonenmasse m_p unterscheiden) ersetzt werden. Damit erhalten wir die **Gleichgewichtsbedingung für Neutronensterne** in der Form

$$M^{1/3}R \approx \frac{\hbar^2}{G\,{m_p}^{8/3}}\,. \tag{14}$$

Auch für Neutronensterne gilt daher $R \sim M^{-1/3}$. Wie Weiße Zwerge sind sie umso kleiner, je größer ihre Masse ist. Auch die relativistische Behandlung erfolgt wie zuvor. Da die Formel (13) für die Chandrasekhar-Masse die Elektronenmasse gar nicht enthält, ist M_C nicht nur die Massenobergrenze für Weiße Zwerge, sondern auch – mit der gleichen Begründung, wobei nur das Wort "Elektronen" durch "Neutronen" zu ersetzen ist – jene für Neutronensterne: Kein Neutronenstern kann schwerer als M_C sein!



Nun vervollständigt sich das Bild: Das oben wiedergegebene Diagramm fasst in schematischer (nicht maßstabsgetreuer) Weise unsere Erkenntnisse zusammen. Es zeigt (zwar vereinfacht, aber im Großen und Ganzen doch korrekt), welche kalten Objekte es geben kann, die vermöge der Atomstruktur, der Entartung der Elektronen oder der Entartung der Neutronen mit ihrer Eigengravitation im Gleichgewicht sind. Nach unserem gegenwärtigen Verständnis kann kein kaltes und stabiles Objekt im Universum größer sein als einige Jupiterradien oder schwerer als die Chandrasekhar-Masse. Was die Dichte betrifft, so klafft zwischen den Weißen Zwergen und den Neutronensternen eine Lücke, in der kein stabiler Stern existieren kann.

Zuletzt begründen wir, warum ein Weißer Zwerg ungefähr um einen Faktor 10^3 größer ist als ein Neutronenstern: Setzen wir für beide Sterntypen die gleiche Masse an und verwenden die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen (7) und (14), die sich ja nur dadurch unterscheiden, dass in der zweiten m_e durch m_p ersetzt wurde, so ergibt sich unmittelbar, dass das Verhältnis der typischen Radien von der Größenordnung m_p/m_e ist. Ein Weißer Zweig ist deshalb ungefähr um einen Faktor 10^3 größer als ein Neutronenstern, weil das Proton (oder Neutron) ungefähr um einen Faktor 10^3 schwerer ist als das Elektron!