

# Die Endstadien der Sterne – und wie es die Physik schafft, sie zu beschreiben

Franz Embacher

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/>  
[franz.embacher@univie.ac.at](mailto:franz.embacher@univie.ac.at)

Fakultät für Physik  
Universität Wien

Vortrag auf der Lehrerfortbildungstagung ASTRONOMIE  
Friedrich-Schiller-Universität Jena, 12. 7. 2011

# Ziele

---

- Endstadien der Sterne
- Anknüpfungspunkte an den Physikunterricht
- Größenordnungen

≈

- Wenig bekannte Verhaltensweisen von Materie
- Einheit (Universalität) der (heute bekannten) physikalischen Grundgesetze: Zusammenspiel von „mikroskopischen“ und „astronomischen“ Dimensionen
- Faszination des „Verstehens“

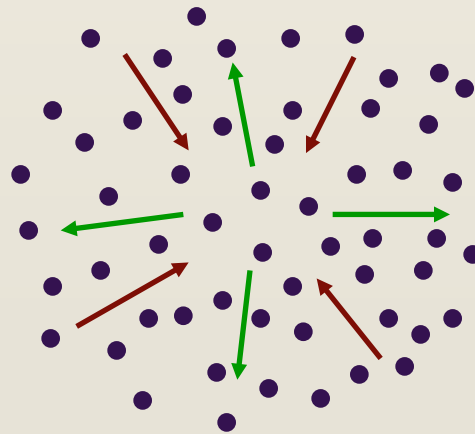
# Sterne entstehen...

---

...aus einer Gaswolke:

- Hauptbestandteil: Wasserstoff
- Dichte: ungefähr 100 Atome pro Kubikzentimeter
- Temperatur: ungefähr 100  $K$  ( $= -170^{\circ}C$ )

Kräftespiel:



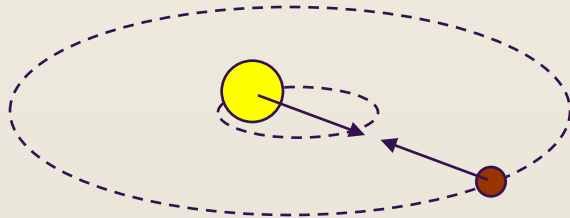
Gravitation  
thermischer Druck

# Gravitation (Newton)

---



$$\text{Gravitationskraft} = \frac{G M m}{r^2}$$

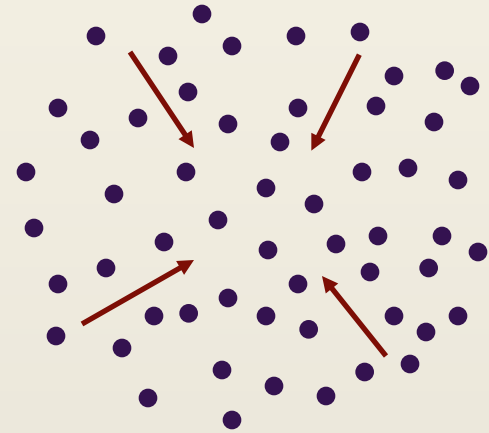
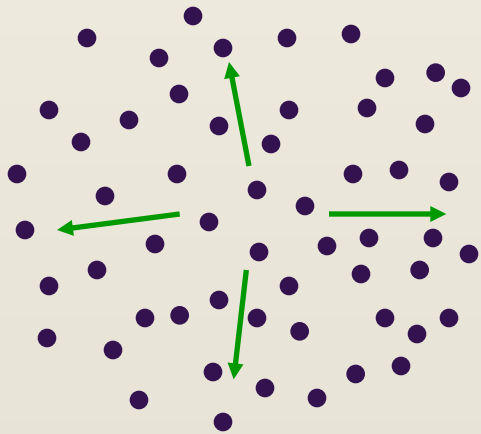


Die Gravitation wirkt immer **anziehend**. Sie ist über große Distanzen die **dominierende Kraft** im Universum!

# Gravitation (Newton)

---

Die Gravitation versucht, alle Objekte – also auch die Himmelskörper – zusammenzuziehen (zu **kontrahieren**).

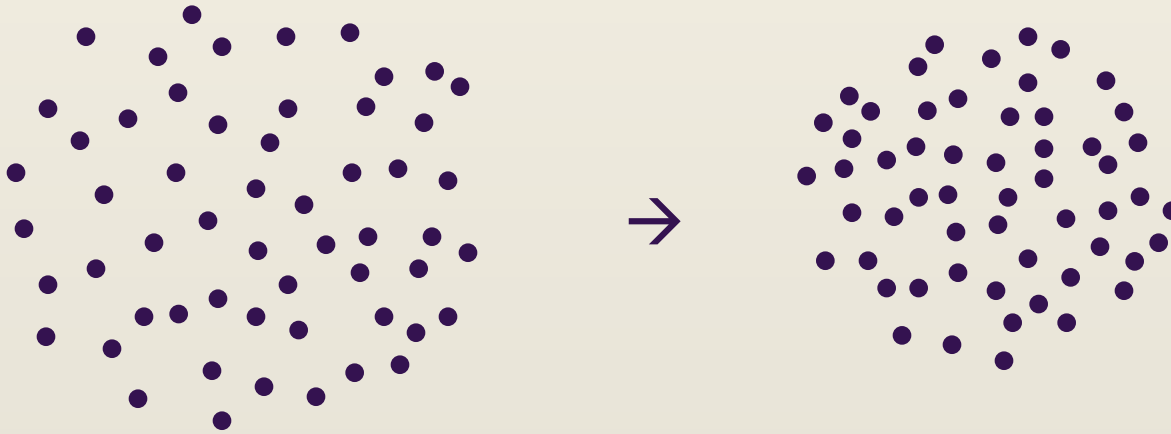


Wenn die Materie der Gravitation einen **Druck** entgegensetzen kann, entstehen **stabile** Objekte (→ **Gleichgewicht**).

# Sterne entstehen...

---

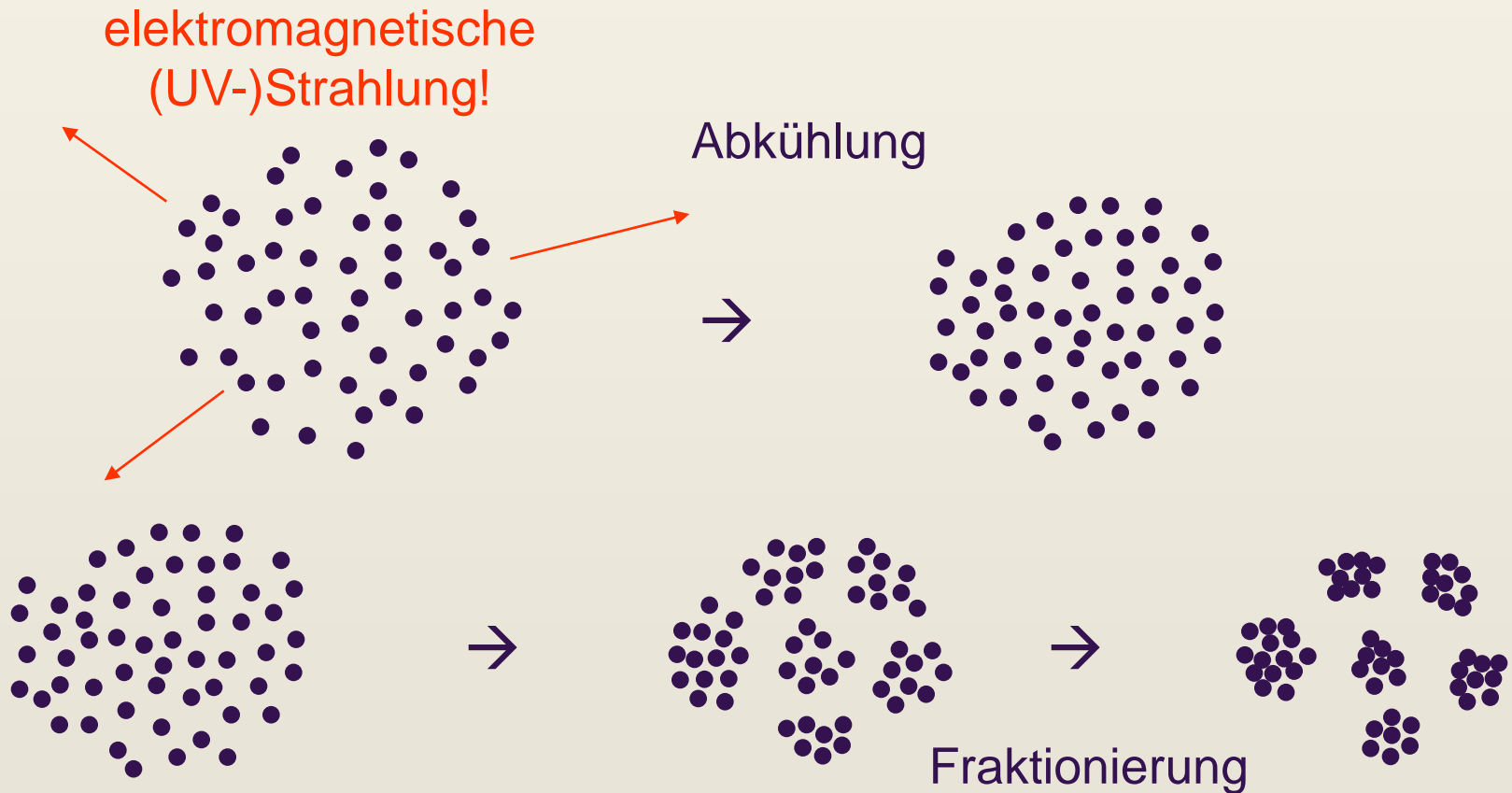
Kommt die Gaswolke (z.B. durch Druck- oder Dichtewellen) aus dem Gleichgewicht, so **kontrahiert** sie:



Erwärmung ...  
der thermische Druck steigt

# Sterne entstehen...

---



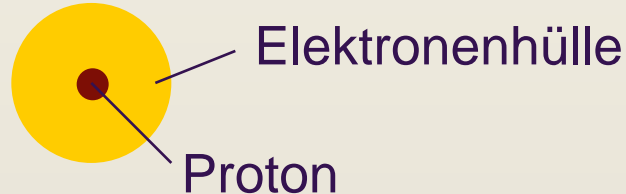
Was kann den Kollaps aufhalten?

# Materie unter extremen Bedingungen

---

Wie verhält sich Materie bei hohen Temperaturen und hohen Drücken?

- Ein Wasserstoffatom besteht aus einem Proton und einer Elektronenhülle

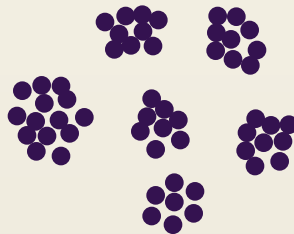


- Bei hohen Temperaturen und Drücken treffen Protonen aufeinander und reagieren miteinander  
→ **Kernfusion!**



# Sterne entstehen...

---



Kontraktion der Teilwolken, bis (nach einigen Millionen Jahren) **Kernfusion** einsetzt („zündet“):

- ab  $T = 600\,000\text{ K}$  ... Deuteriumbrennen
- ab  $T = 3\text{ Millionen K}$  ... Wasserstoffbrennen

Die bei der Kernfusion frei werdende **Energie** erzeugt den Druck, der nötig ist, um der Gravitation entgegen zu wirken → aus jeder Teilwolke ist ein **stabiler Stern** (Hauptreihenstern) entstanden.

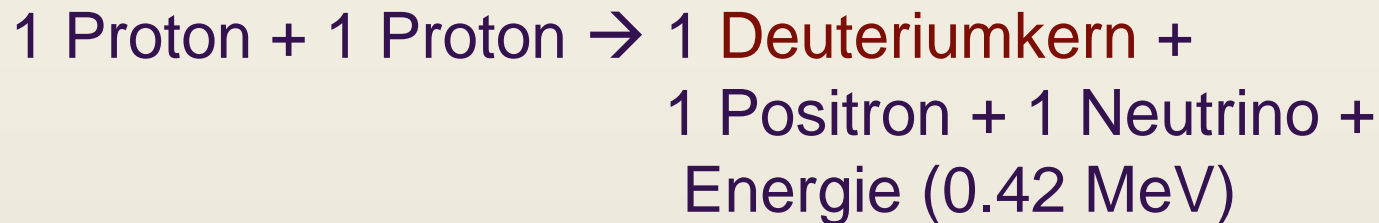
# Kernfusion in Hauptreihensternen

---

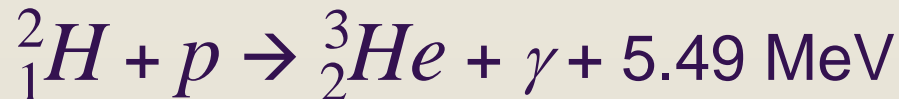
## Kernreaktionen



- „Deuteriumbrennen“:



- „Wasserstoffbrennen“:



---

Wasserstoff  $\rightarrow$  Helium + Energie

# Sterne

---

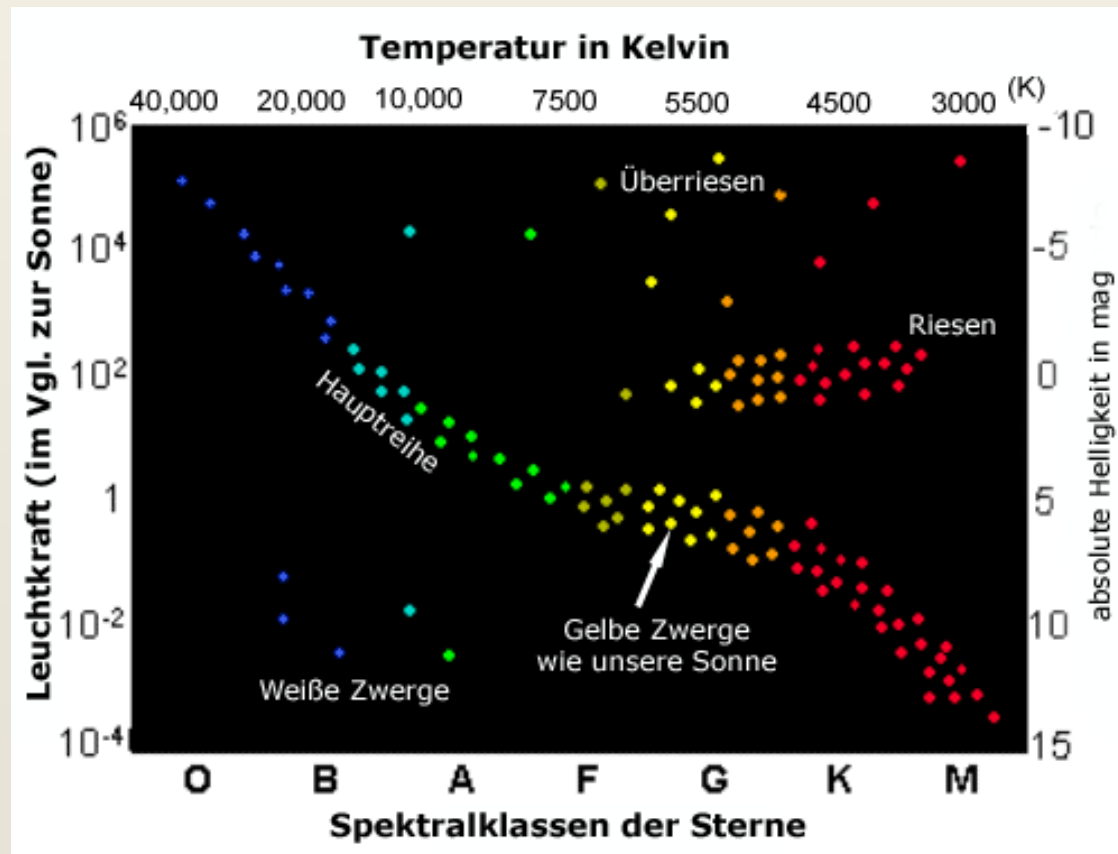
## Steckbrief:

- **Masse:** zwischen 0.08 und 120 Sonnenmassen
- **Radius:** zwischen 0.1 und 100 Sonnenradien
- **Temperatur an der Oberfläche** („effektive Temperatur“): einige 1000 K
- **Temperatur im Kern:** einige (bis viele) Millionen K
- **Hauptsächliche Tätigkeit:** Wasserstoffbrennen (d.h. sie wandeln Wasserstoff in Helium um und gewinnen dadurch Energie)
- **Lebensdauer:** einige zehntausend bis einige hundert Milliarden Jahre

Aber – was heißt eigentlich „Lebensdauer“?  
Kann ein Stern „sterben“?

# Das Leben der Sterne auf der „Hauptreihe“

Die meiste Zeit seines Lebens verbringt ein Stern auf der „Hauptreihe“ im Hertzsprung-Russell-Diagramm:



## Das Leben der Sterne auf der „Hauptreihe“

---

Die **Gravitation** und der aus der Kernfusion resultierende **Druck** („Wasserstoffbombe“) – im Kern – halten einander die Waage. Hauptreihensterne befinden sich im **thermischen und hydrostatischen Gleichgewicht**. Im Laufe der Zeit

- werden sie heißer
- und größer.

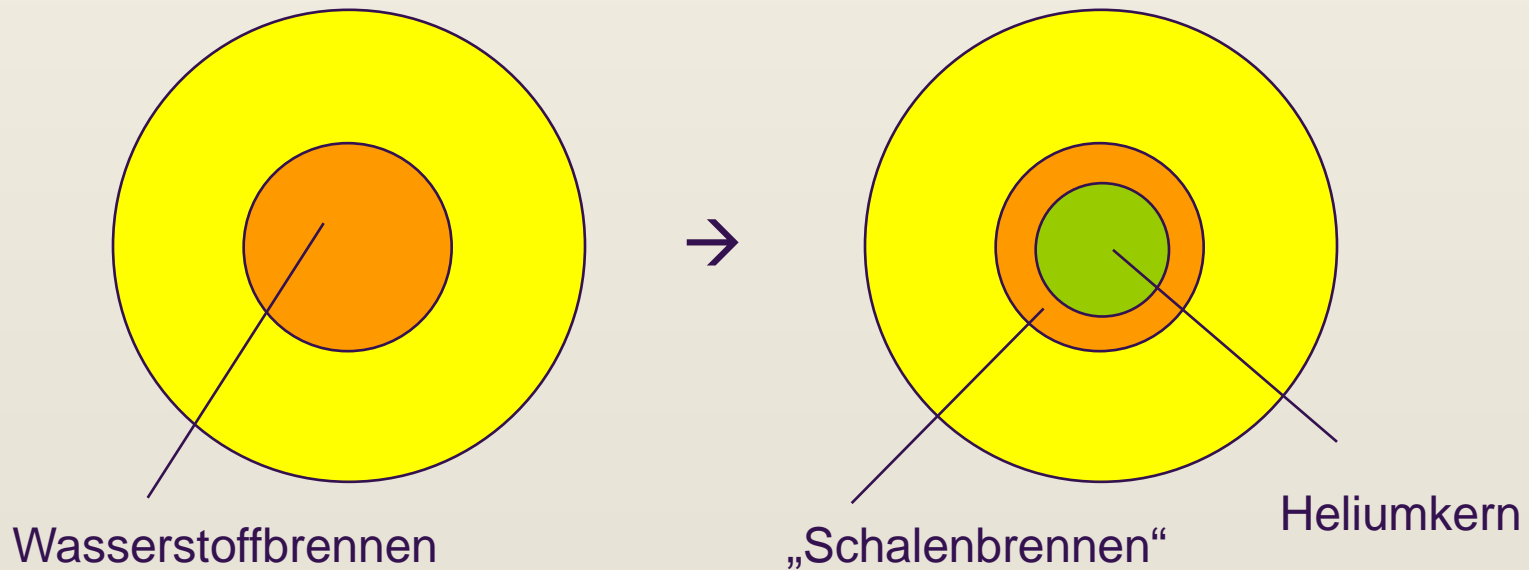
$$\frac{GM}{R} \approx \frac{kT}{m_p}$$

Im Kern reichert sich Helium an, und der Brennstoff (Wasserstoff) wird immer weniger. Bis er schließlich **aufgebraucht** ist! Was passiert dann?

## Wenn der Wasserstoff aufgebraucht ist...

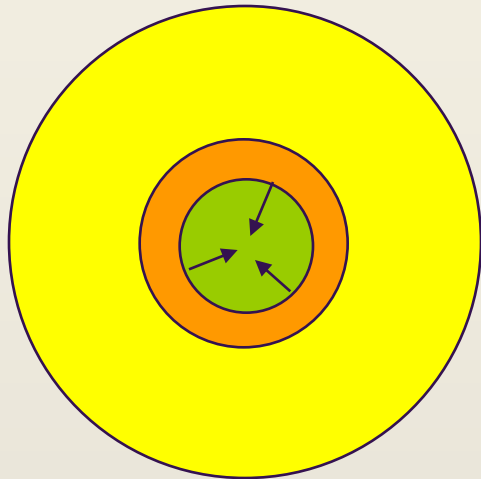
---

...erlischt das Wasserstoffbrennen! Die Gravitation überwindet den Druck – der Stern (bzw. sein innerer Kern) wird **instabil**:

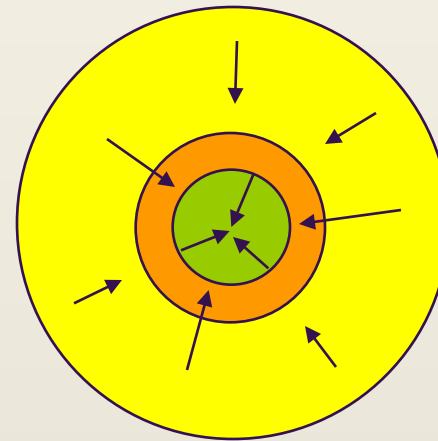


## Wenn der Wasserstoff aufgebraucht ist...

---



Der Kern kollabiert!



Die darüber liegende  
Sternmaterie stürzt nach!  
Der Druck im Kern wird  
immer größer!

## Was passiert danach?

---

Kann die Materie den Kollaps des Kerns aufhalten?

Und **wenn** – dann wie?

Und **wenn nicht**?

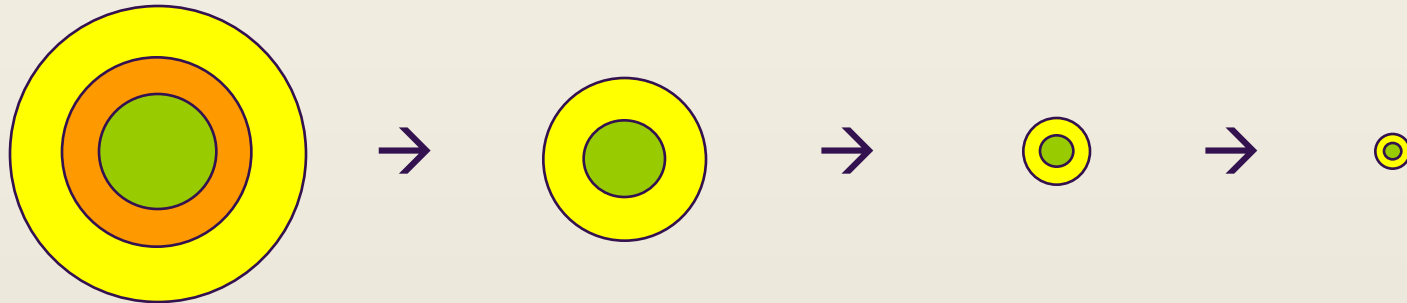
Was nach dem Ende des Wasserstoffbrennens passiert, hängt vor allem von der **Masse** des Sterns ab!



# Das Ende der Sterne

---

Sterne bis zu 0.3 Sonnenmassen:



Das Schalenbrennen  
erlischt

Kollaps, bis eine **neue**  
Zustandsform der  
Materie auftritt!

# Neue Zustandsform der Materie!

---

Welche Aggregatzustände gibt es?

1. Gase
2. Flüssigkeiten
3. Festkörper
4. Plasma
5. Entartung!

# Entartung

---

Um Entartung zu verstehen, sind zwei Dinge nötig:

- **Pauli-Prinzip:** **Fermionen** (= Teilchen mit halbzahligen Spin, wie Elektronen, Neutronen,...) sind „asoziale“ Teilchen. Jedes „beansprucht ein Raumgebiet für sich selbst“. **Bosonen** (= Teilchen mit ganzzahligen Spin) hingegen können sich „Raumgebiete teilen“ („Bose-Einstein-Kondensat“).
- **Heisenbergsche Unschärferelation** (genauer: Unbestimmtheitsrelation)

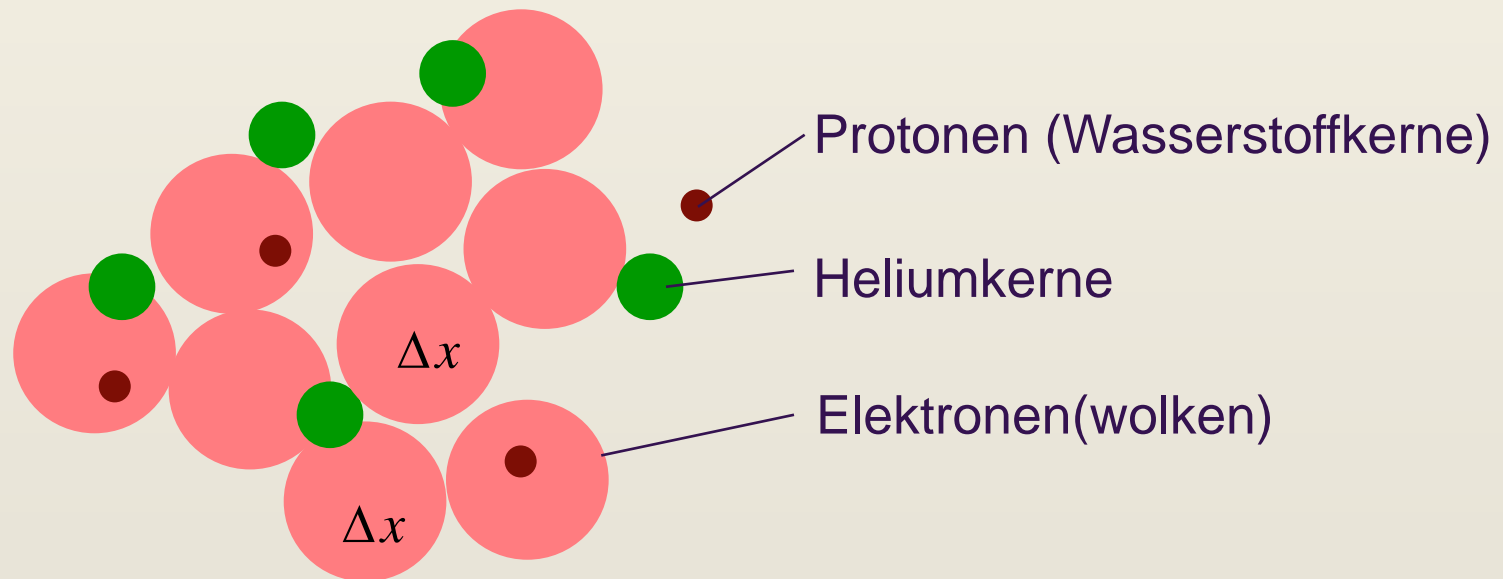
$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$$

# Ein bisschen Quantentheorie

---

Sternmaterie beim Kollaps:



## Ein bisschen Quantentheorie

---

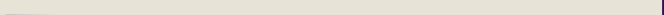
Wenn jedes Elektron ein Raumgebiet der Größe  $\Delta x$  beansprucht, so ist sein **Impuls** mindestens  $\approx \hbar / \Delta x$ , seine **Energie** daher mindestens gleich

$$E_F \approx \frac{\text{Impuls}^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{m_e (\Delta x)^2} \quad (\text{Fermi-Energie}).$$

Damit ist eine „Abstoßungskraft“ verbunden, die sich als **„Fermi-Druck“** („**Entartungsdruck**“) zeigt:

$$p \approx \frac{E_F}{(\Delta x)^3} \approx \frac{\hbar^2}{m_e (\Delta x)^5} \approx \frac{\hbar^2}{m_p^{5/3} m_e} \rho^{5/3}$$

Die Dichte der Sternmaterie ist

$$\rho \approx \frac{m_p}{(\Delta x)^3}$$


# Ein bisschen Theorie der entarteten Materie

---

Also:

$$p \approx \frac{\hbar^2}{m_p^{5/3} m_e} \rho^{5/3}$$

Zustandsgleichung für  
vollständig entartete Materie

(genauer: „Elektronen-Entartung“, nichtrelativistisch)

Bemerkung 1: **Coulomb-Kräfte?**

$$p_{\text{Coulomb}} \approx \frac{E_{\text{Coulomb}}}{(\Delta x)^3} \approx \frac{e^2}{\epsilon_0 (\Delta x)^4} \approx \frac{e^2}{\epsilon_0 m_p^{4/3}} \rho^{4/3}$$

$$\Rightarrow \frac{p_{\text{Coulomb}}}{p} \approx \frac{e^2 m_p^{1/3} m_e}{\epsilon_0 \hbar^2} \rho^{-1/3} \approx \left( \frac{10^7 \text{ kg/m}^3}{\rho} \right)^{1/3}$$

Daher spielen elektromagnetische Kräfte für  $\rho \gg 10^7 \text{ kg/m}^3$   
keine wesentliche Rolle!

Vergleiche:

$$\rho_{\text{Zentrum der Sonne}} \approx 10^4 \text{ kg/m}^3$$

# Ein bisschen Theorie der entarteten Materie

---

$$p \approx \frac{\hbar^2}{m_p^{5/3} m_e} \rho^{5/3}$$

Zustandsgleichung für  
vollständig entartete Materie

(genauer: „Elektronen-Entartung“, nichtrelativistisch)

Bemerkung 2: Welche Rolle spielt der **thermische Druck**?

Vergleiche:

$$p_{\text{thermisch}} \approx \frac{kT}{m_p} \rho$$

(Sternmaterie als ideales Gas)

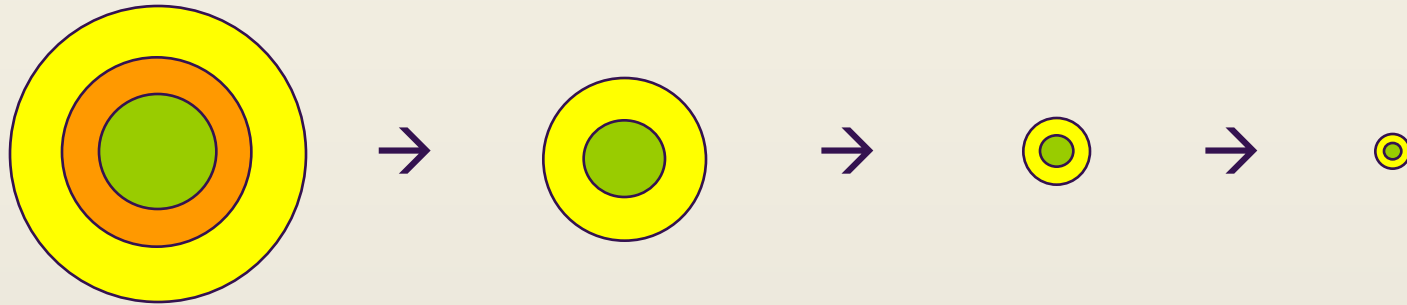
$$\Rightarrow \frac{p_{\text{thermisch}}}{p} \approx \frac{m_p^{2/3} m_e}{\hbar^2} kT \rho^{-2/3} \approx \frac{T}{10^9 \text{ K}} \left( \frac{10^9 \text{ kg/m}^3}{\rho} \right)^{2/3}$$

Kernreaktionen in Sternen finden bei Temperaturen zwischen  $10^7 \text{ K}$  und  $10^9 \text{ K}$  statt. Für Dichten  $\rho \gtrsim 10^9 \text{ kg/m}^3$  kann der thermische Druck (und daher die Temperatur) vernachlässigt werden.

# Das Ende der Sterne

---

Sterne bis zu 0.3 Sonnenmassen:



Der **Entartungsdruck der Elektronen** kann den Gravitationskollaps aufhalten!

→ Es entsteht ein (vorwiegend aus Helium bestehender) **Weißer Zwerg**.

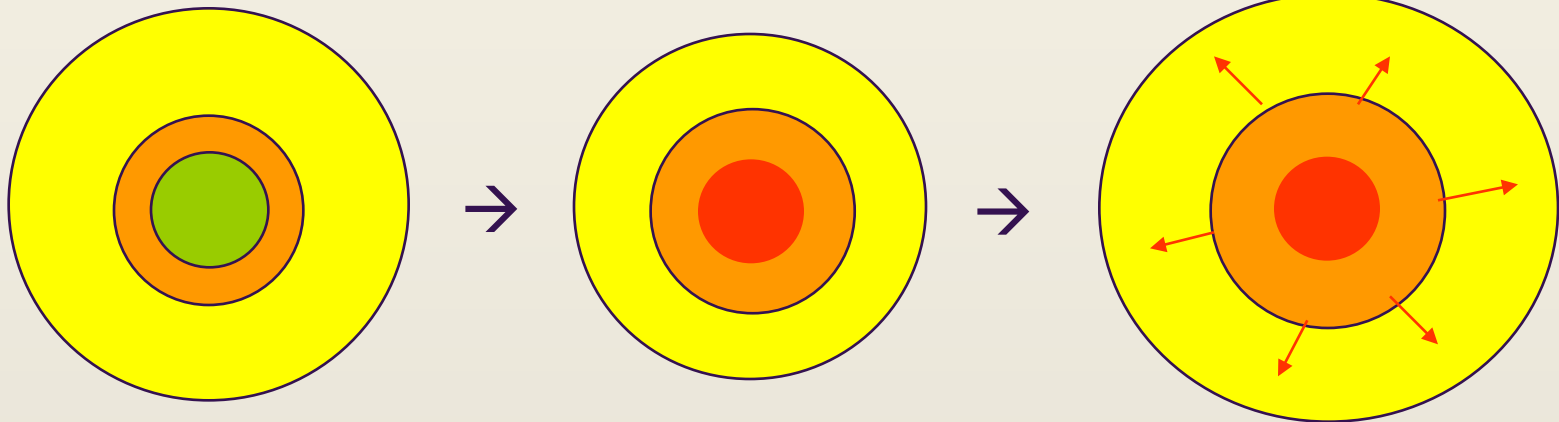
Ein **Weißer Zwerg** ist ein Stern, der durch den **Entartungsdruck der Elektronen** im Gleichgewicht gehalten wird.



# Das Ende der Sterne

---

Sterne zwischen 0.3 und 2.3 Sonnenmassen:



Druck- und  
Temperaturanstieg!  
Ab 200 Millionen  $K$  zündet  
im Kern das  
„Heliumbrennen“:

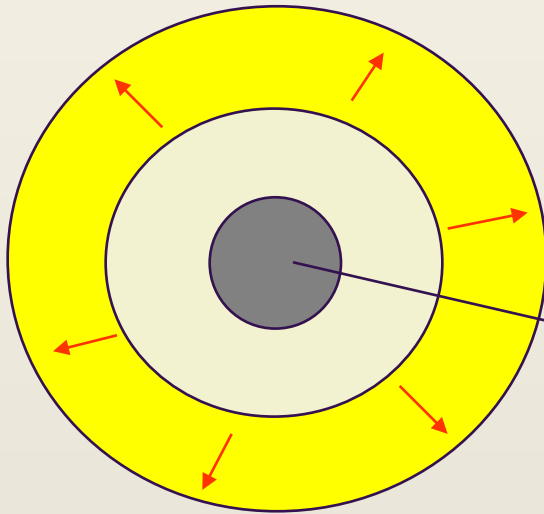


Hülle dehnt sich aus  
→ Roter Riese!  
Wird bis zu 100 mal so  
groß wie die heutige  
Sonne!

# Das Ende der Sterne

---

Sterne zwischen 0.3 und 2.3 Sonnenmassen:

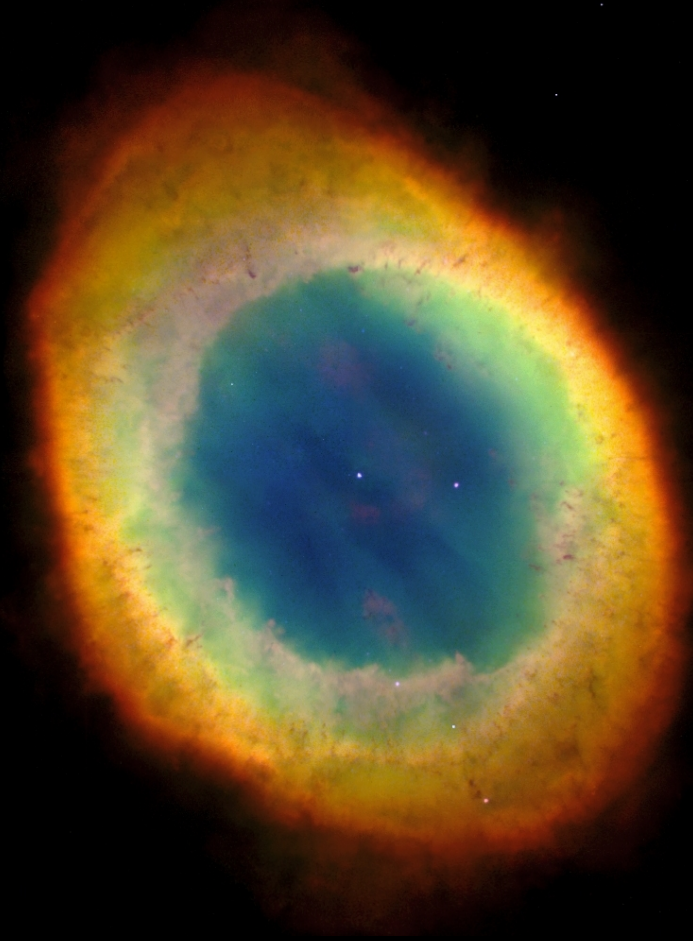


Hülle wird abgestoßen  
→ **Planetarischer Nebel!**

Helium aufgebraucht (nach  
einigen Millionen Jahren)  
→ Kollaps des Kerns bis zur  
Entartung der Elektronen  
→ **Weißer Zwerg** (vorwiegend  
aus Kohlenstoff)

# Planetarischer Nebel Messier M 57

---

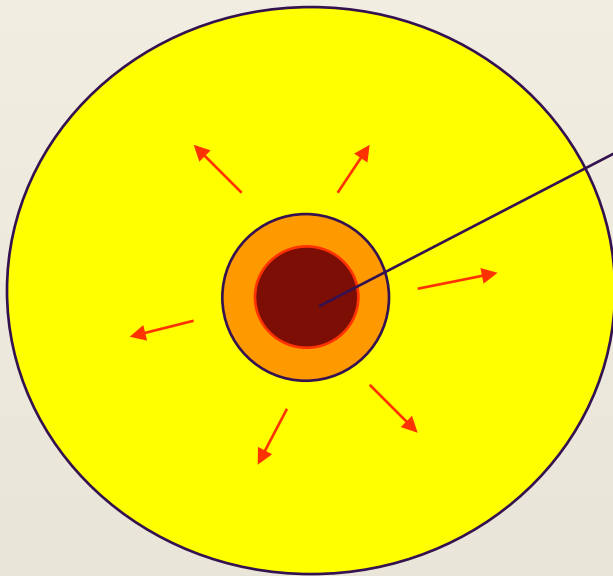


Quelle: [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1a/Ring\\_Nebula.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1a/Ring_Nebula.jpg)  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Ringnebel>

# Das Ende der Sterne

---

Sterne zwischen 2.3 und 8 Sonnenmassen:



- Heliumbrennen
- wenn Helium aufgebraucht:  
ab 800 Millionen  $K$   
„Kohlenstoffbrennen“  
( $C \rightarrow O, Mg, Na, Ne$ )
- wenn  $C$  aufgebraucht:  
Kollaps des Kerns bis zur  
Entartung der Elektronen
- **Weißer Zwerg** (vorwiegend  
aus  $O, Mg$  und  $Ne$ )

Hülle wird abgestoßen  
→ **Planetarischer Nebel!**

# Gleichgewichtsbedingung für Weiße Zwerge

---

$$p \approx \frac{\hbar^2}{m_p^{5/3} m_e} \rho^{5/3}$$

Zustandsgleichung für  
vollständig entartete Materie

(genauer: „Elektronen-Entartung“, nichtrelativistisch)

Gravitationsdruck:

$$p \approx \frac{GM^2}{R^4}$$

(heuristische Begründung:  $p \approx \rho g h$  mit  $\rho \approx M / R^3$ ,  $g \approx GM / R^2$   
und  $h \approx R$ )

Gleichgewicht besteht, wenn

$$M^{1/3} R \approx \frac{\hbar^2}{G m_p^{5/3} m_e}$$

gilt.

# Gleichgewichtsbedingung für Weiße Zwerge

---

Die Beziehung  $M^{1/3} R \approx \frac{\hbar^2}{G m_p^{5/3} m_e}$  besagt, numerisch,

$$M^{1/3} R \approx 10^{17} \text{ kg}^{1/3} \text{ m} \quad \text{oder} \quad \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1/3} \frac{R}{R_{\odot}} \approx 10^{-2} .$$

Daraus folgt: Ein Weißer Zwerg mit der Masse der Sonne ist ungefähr ein Hundertstel so groß wie die Sonne...

$$\frac{R_{\odot}}{100} \approx 7 \cdot 10^6 \text{ m} \approx R_{\text{Erde}}$$

... also ungefähr so groß wie die Erde!

# Ein bisschen Relativitätstheorie...

---

Bisher wurde nichtrelativistisch gerechnet:

$$E_F \approx \frac{\text{Impuls}^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{m_e (\Delta x)^2} \quad (\text{Fermi-Energie}).$$

(Ultra-)Relativistische Rechnung:

$$E_F \approx \text{Impuls} \cdot c \approx \frac{\hbar c}{\Delta x}$$

(heuristisch: 1.) für Photonen gilt  $E = h f$  und  $p = h / \lambda$

2.) ultrarelativistische Teilchen verhalten sich wie Photonen)

Entartungsdruck:

$$p \approx \frac{E_F}{(\Delta x)^3} \approx \frac{\hbar c}{(\Delta x)^4} \approx \frac{\hbar c}{m_p^{4/3}} \rho^{4/3} \approx \frac{GM^2}{R^4} \quad \text{Gleichgewicht}$$

## Ein bisschen Relativitätstheorie...

---

In die Beziehung

$$\frac{\hbar c}{m_p^{4/3}} \rho^{4/3} \approx \frac{GM^2}{R^4}$$

wird  $\rho \approx M / R^3$  eingesetzt, wodurch sich ergibt:

$$\frac{\hbar c}{m_p^{4/3}} \frac{M^{4/3}}{R^4} \approx \frac{GM^2}{R^4}$$

Der Radius fällt heraus! Es bleibt, nach der Masse aufgelöst:

$$M \approx m_p^{-2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \quad \text{(Chandrasekhar-Masse)}$$

Eine genauere Berechnung liefert den Wert  $M_C \approx 1.4 M_\odot$ .



## Was bedeutet das?

---

Kein Weißer Zwerg kann **eine größere Masse** als  $M_C \approx 1.4 M_\odot$  besitzen!

Kollabiert ein Stern (oder Kern) mit  $M > M_C$ , so vollzieht sich der Kollaps zuerst nichtrelativistisch. Da  $\Delta x$  immer kleiner wird, wächst der aufgrund der Unschärferelation bestehende Minimalimpuls, bis die Elektronen schließlich relativistisch werden. Dass dann für  $M > M_C$  kein Gleichgewicht zustande kommen kann, bedeutet, dass **der Entartungsdruck der Elektronen den Kollaps nicht aufhalten kann!**

(Was passiert dann? → später)

## Weißer Zwerge...

---

...halten der Gravitation durch den **Entartungsdruck der Elektronen** stand.

Steckbrief:

- **Masse:** ungefähr Sonnenmasse
- **Größe:** ungefähr Erdgröße!
- **Maximale Masse:** Chandrasekhar-Masse

$$M_C \approx m_p^{-2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \quad (\text{durch Naturkonstanten ausgedrückt!!!})$$

- **Häufigkeit:** bis zu 10% aller Sterne könnten Weiße Zwerge sein!

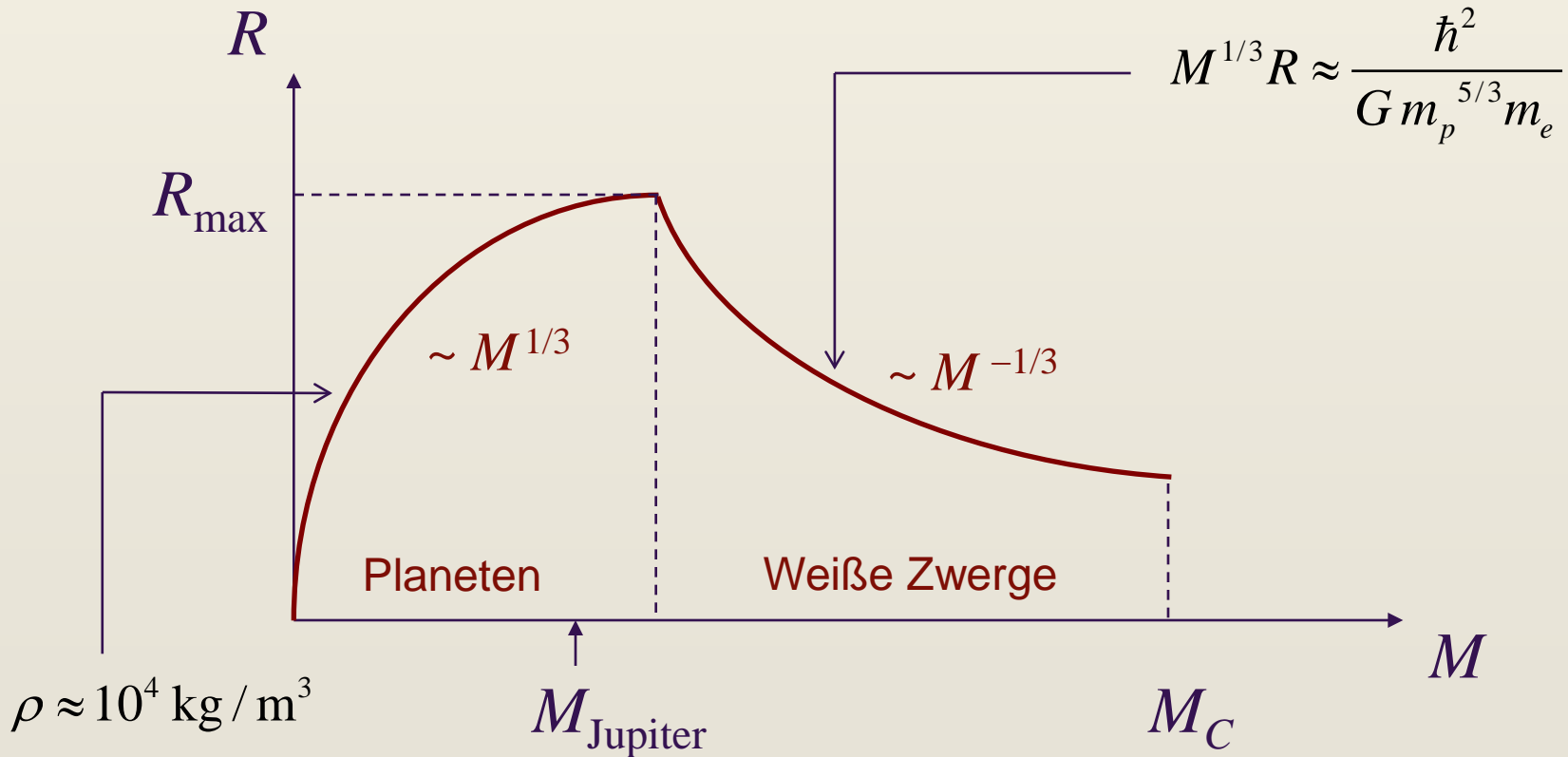
## Weißer Zwerge...

---

- **Dichte:** einige Milliarden  $\text{kg/m}^3$   
(= einige Tonnen/ $\text{cm}^3$ )!
- **Schwerebeschleunigung:** Um 1 Meter zu durchfallen, braucht ein Körper **1 Millisekunde** und hat danach eine Geschwindigkeit von **5000 km/h!**

# Eine Überraschung...

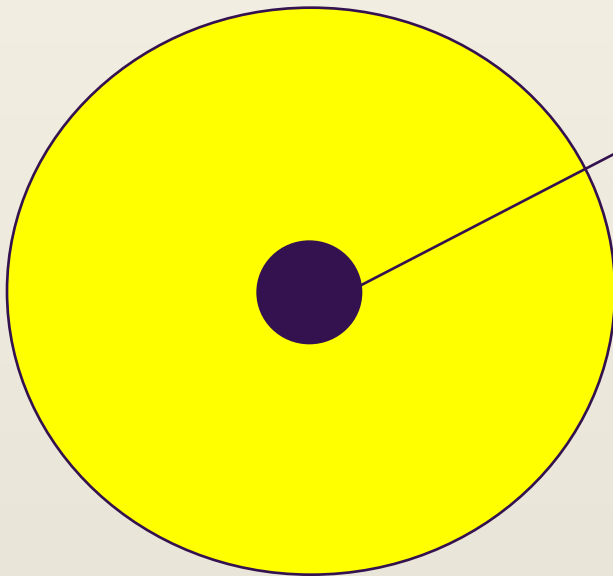
Verhalten von „kalter“ Materie (bei Abwesenheit von Kernfusion):



# Das Ende der Sterne

---

Sterne mit mehr als 8 Sonnenmassen:



- Heliumbrennen
- Kohlenstoffbrennen
- „Neonbrennen“
- „Sauerstoffbrennen“
- „Siliziumbrennen“
- Fusion schwerer Elemente bis zum Eisen

Wenn alle Kernfusionsprozesse erlöschen → Kollaps des Eisenkerns  
→ Die Gravitation überwindet den Entartungsdruck der Elektronen!

# Das Ende der Sterne

---

Sterne mit mehr als 8 Sonnenmassen:

„Inverser Beta-Zerfall“:



Anreicherung von Neutronen!

→ Neutronenmaterie, Dichte von Atomkernen  
(1 Milliarde Milliarden kg/m<sup>3</sup>)!

→ Entartung der Neutronen

# Das Ende der Sterne

---

## Sterne mit mehr als 8 Sonnenmassen:

- Entweder:

Der Entartungsdruck der Neutronen hält der Gravitation stand → **Supernova-Explosion** und Entstehung eines **Neutronensterns**.

In der Supernova werden **schwerste Elemente** gebildet. Ein Teil davon wird abgestoßen → Ausgangsmaterial für zukünftige Sterne (und Planeten)!

- Oder:

Der Entartungsdruck der Neutronen hält der Gravitation **nicht** stand → Kollaps zu einem **Schwarzen Loch** (→ ART).

# Entartung der Neutronen

---

Berechnungen analog zu den bisherigen! Neutronen übernehmen die Rolle, die bisher die Elektronen gespielt haben, d.h. in allen Formeln kann

$$m_e \rightarrow m_n \approx m_p$$

ersetzt werden!

$$M^{1/3} R \approx \frac{\hbar^2}{G m_p^{8/3}}$$

Gleichgewichtsbedingung für  
Neutronen-Entartung  
(nichtrelativistisch)

$$M \approx m_p^{-2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2}$$

Gleichgewichtsbedingung für  
Neutronen-Entartung  
(relativistisch)

→ Wieder die **Chandrasekhar-Masse** als Obergrenze!



## Neutronensterne...

---

...halten der Gravitation durch den Entartungsdruck der Neutronen stand.

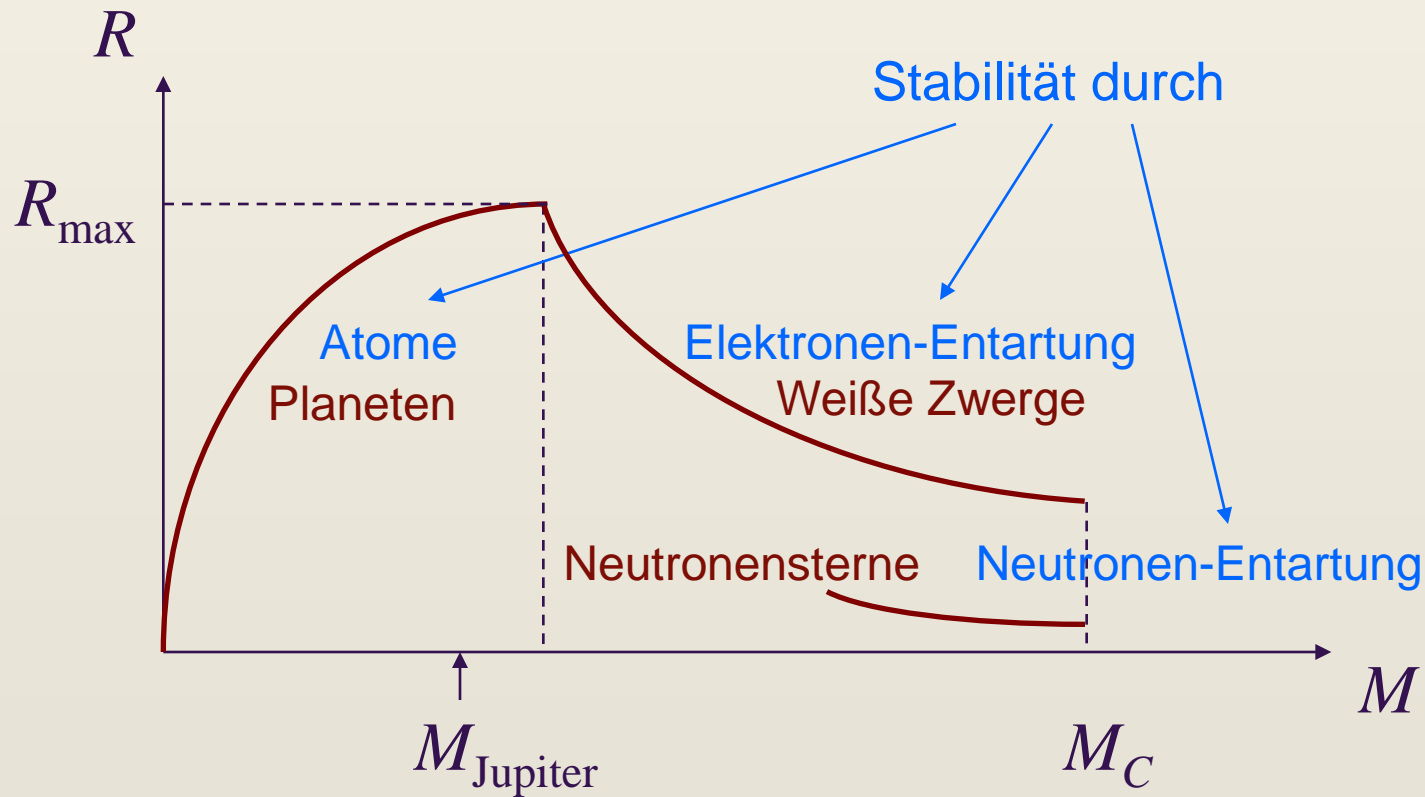
Steckbrief:

- **Masse:** ungefähr 1.4 \* Sonnenmasse
- **Größe:** einige Kilometer!
- **Maximale Masse:** Chandrasekhar-Masse

$$M_C \approx m_p^{-2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \quad !!!!!$$

# Planeten, Weiße Zwerge und Neutronensterne

„Kalte“ Objekte im Universum (ohne Kernfusion):



# Neutronensterne und Weiße Zwerge

---

Größenunterschied zwischen Weißen Zwergen und Neutronensterne:

- Weiße Zwerge sind etwa **2000** mal so groß wie Neutronensterne. Warum?

Die **theoretische Erklärung** (über den Entartungsdruck) liefert:

$$\frac{R_{WZ}}{R_{NS}} \approx \frac{m_p}{m_e} \quad !!!!!$$

# Neutronensterne und Weiße Zwerge

---

Beweis:

$$M_{\text{WZ}}^{1/3} R_{\text{WZ}} \approx \frac{\hbar^2}{G m_p^{5/3} m_e}$$

$$M_{\text{NS}}^{1/3} R_{\text{NS}} \approx \frac{\hbar^2}{G m_p^{8/3}}$$

$$M_{\text{WZ}} \approx M_{\text{NS}}$$

daher:

$$\frac{R_{\text{WZ}}}{R_{\text{NS}}} \approx \frac{m_p}{m_e}$$

# Chandrasekhar-Masse

---

Die Chandrasekhar-Masse

$$M_C \approx m_p^{-2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2}$$

kann auch in der Form

$$M_C \approx \frac{m_{\text{Planck}}^3}{m_p^2}$$

geschrieben werden. Ein Neutronenstern ist um den Faktor

$$\left( \frac{m_{\text{Planck}}}{m_p} \right)^3$$

schwerer als ein Proton.

## Eine reizvolle Idee..

---

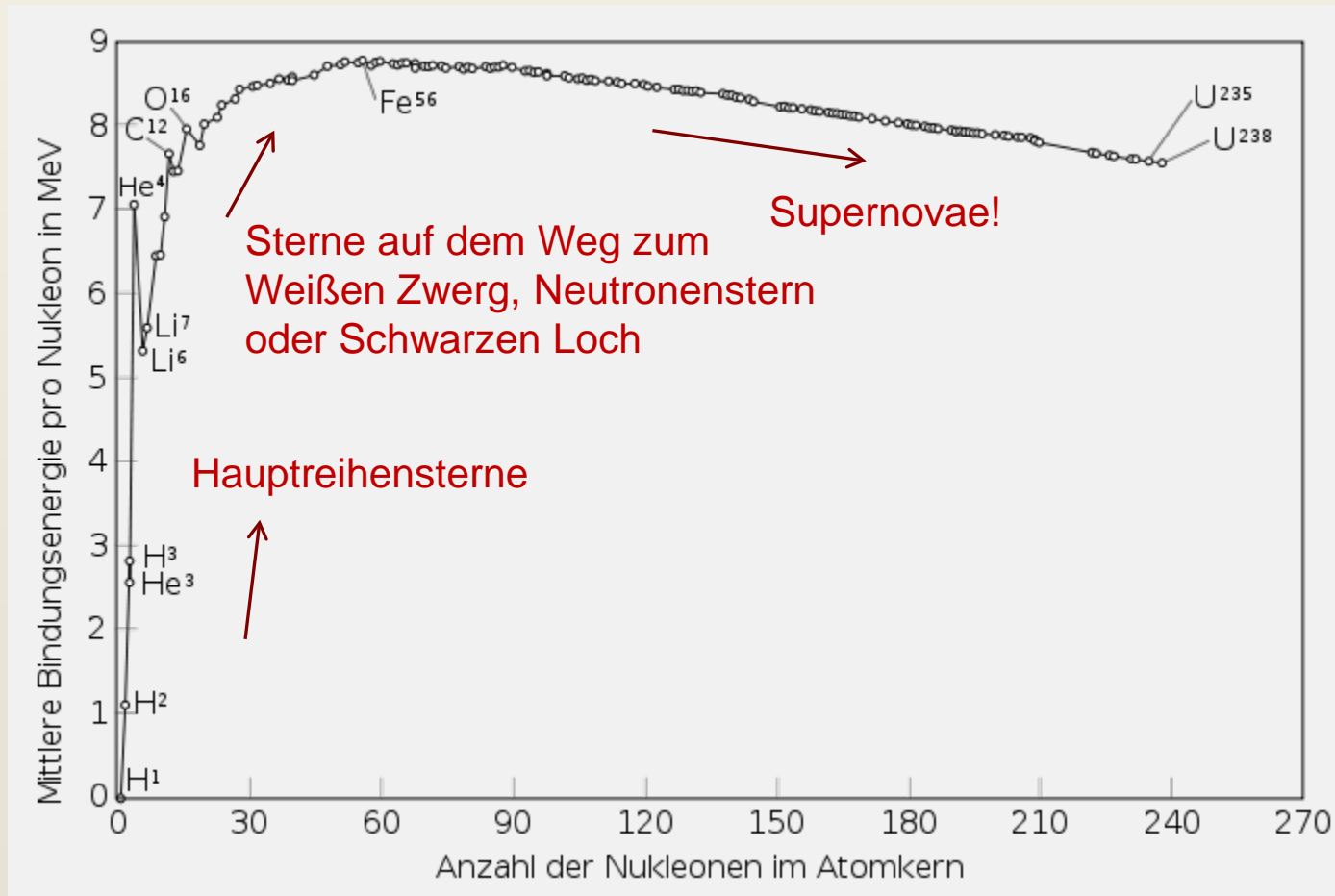
Unter der Annahme (Beobachtung), dass die Massen der Endstadien der Sterne (Weiße Zwerge und Neutronensterne) in etwa in der Größenordnung der Sonnenmasse liegen, lässt sich aus der Beziehung

$$M_{\odot} \approx m_p^{-2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2}$$

(sofern  $M_{\odot}$ ,  $m_p$ ,  $G$  und  $c$  bekannt sind) die **Plancksche Konstante  $\hbar$**  größenordnungsmäßig **bestimmen!**

# Supernova

Massendefekt pro Kernbaustein:

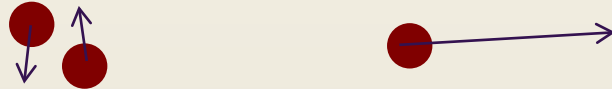


# Supernova

---

Woher kommt die **Energie einer Supernova**?

- Gravitatives Mehrkörperproblem:



- Gravitationsenergie eines Sterns:

$$E \approx -\frac{GM^2}{R}$$

Welche Energie wird freigesetzt, wenn ein Stern mit 20 Sonnenmassen und etlichen Sonnenradien auf einen Radius von wenigen Kilometern kollabiert?



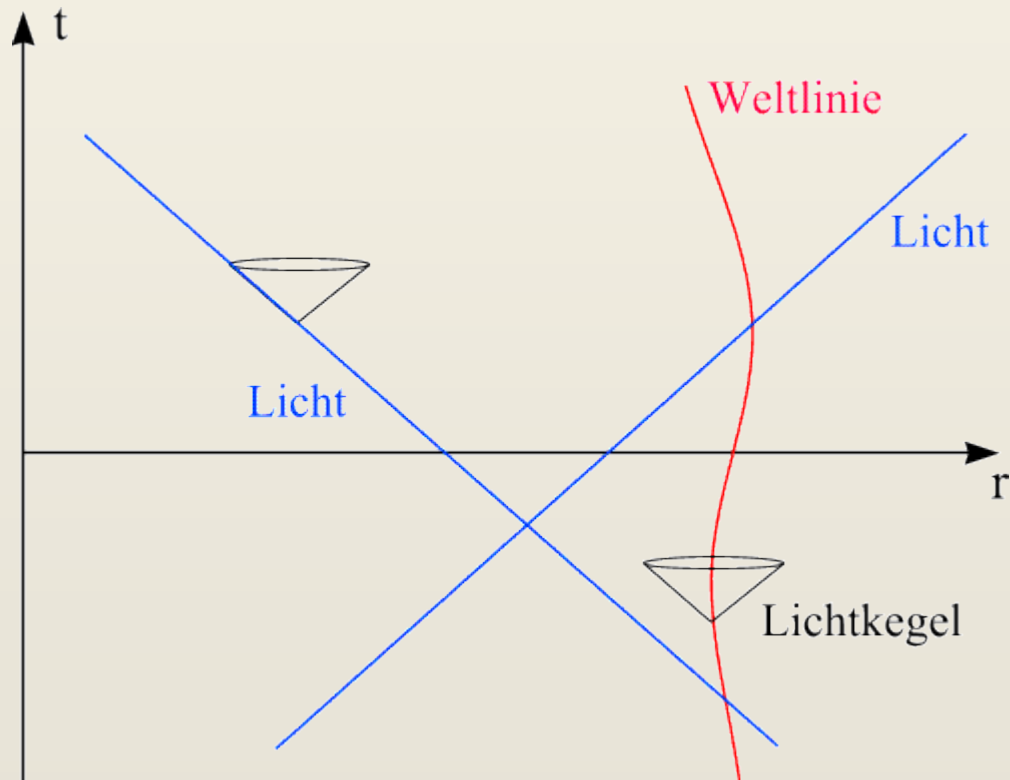
# Zusammenfassung des Bisherigen

---

- Die Gravitation bewirkt eine **ständige Tendenz zum Kollaps**.
- Die Materie wehrt sich
  - durch die **Stabilität von Atomen** (Planeten, kleine Objekte)
  - durch **thermischen Druck** (Gaswolken)
  - durch **Kernfusion** (→ normale Sterne)
  - durch den **Entartungsdruck der Elektronen** (→ Weiße Zwerge)
  - durch den **Entartungsdruck der Neutronen** (→ Neutronensterne)
- Die wichtigsten Eigenschaften der Endstadien der Sterne, ihre Dimensionen und Größenverhältnisse können auf der Basis fundamentaler physikalischer Gesetze verstanden werden. Sie können ohne allzu großen theoretischen Aufwand durch Naturkonstanten und Eigenschaften von Elementarteilchen ausgedrückt werden.

# Zum Abschluss in aller Kürze: Schwarze Löcher

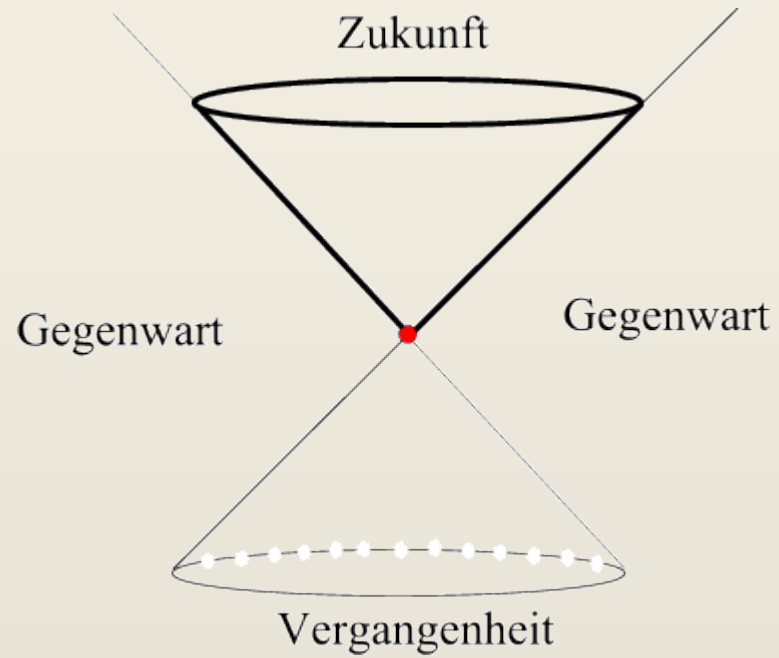
---



„Flache Raumzeit“

# Lichtkegel

---



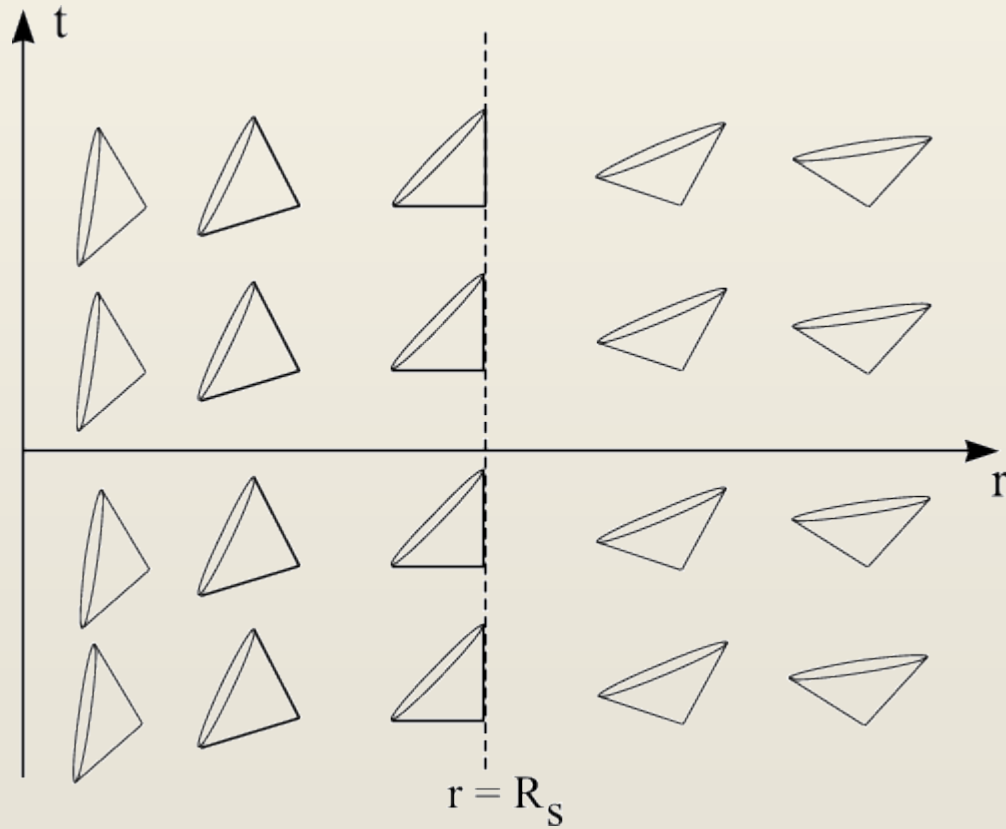
# Kausalstruktur der flachen Raumzeit

---



# Kausalstruktur eines Schwarzen Lochs

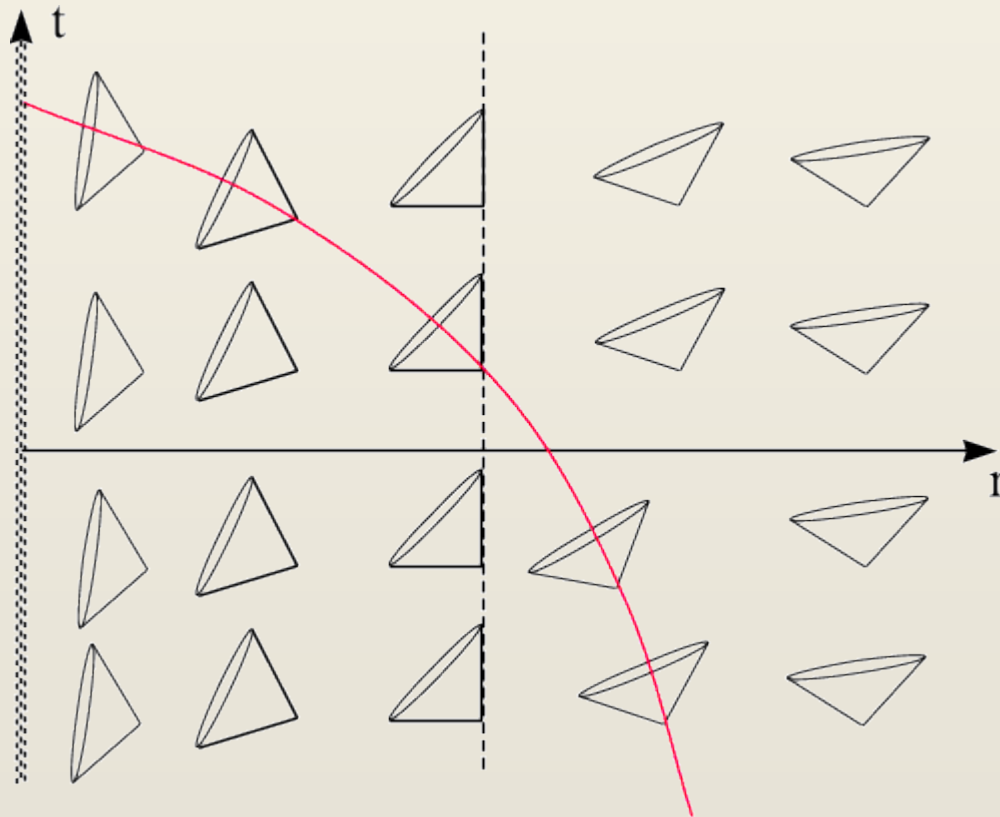
---



# In aller Kürze: Schwarze Löcher

---

Wieso ist ein schwarzes Loch schwarz?



Weil die Außenwelt nicht in der Zukunft des inneren Bereichs liegt!

Danke...

---

... für Ihr Aufmerksamkeit!

Diese Präsentation finden Sie im Web unter

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/EndstadienDerSterne/>

Weitere Informationen zum Thema finden Sie im **Stichwortsriptum** zur Vorlesung „**Weltbild der modernen Physik: Relativistische Astrophysik und Kosmologie**“ (Universität Wien, Sommersemester 2010) ebenfalls unter der obigen Adresse.