

# Einstein und wie sich Raum und Zeit krümmen

A 3D visualization of a curved spacetime grid. The grid is composed of blue lines forming a mesh that curves downwards in the center, creating a well-like shape. A sphere with a blue-to-orange gradient is positioned in the center of this well. The text 'Franz Embacher' is written on the sphere.

Franz  
Embacher

Fakultät für Physik  
der Universität Wien

Vortrag im Rahmen von TU FOR MATH,  
TU Wien (online), 5. November 2020

# Das Konzept der Raumzeit-Krümmung

---

1. Allgemeine Relativitätstheorie
2. (Nicht-)Euklidische Geometrie
3. Die Wanze auf der heißen Ofenplatte
4. Kausalstruktur und Lichtkegel
5. Kausalstruktur eines Schwarzen Lochs
6. Raumkrümmung in der Nähe eines Schwarzen Lochs
7. Trichtermodell
8. Äquivalenzprinzip
9. SRT, Metrik, Geraden, Geodäten und Sphären
10. Raum-Zeit-Krümmung in der Nähe von Himmelskörpern
11. Krümmungsradius und Lichtablenkung
12. Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum
13. Gravitationswellen

# Allgemeine Relativitätstheorie

---

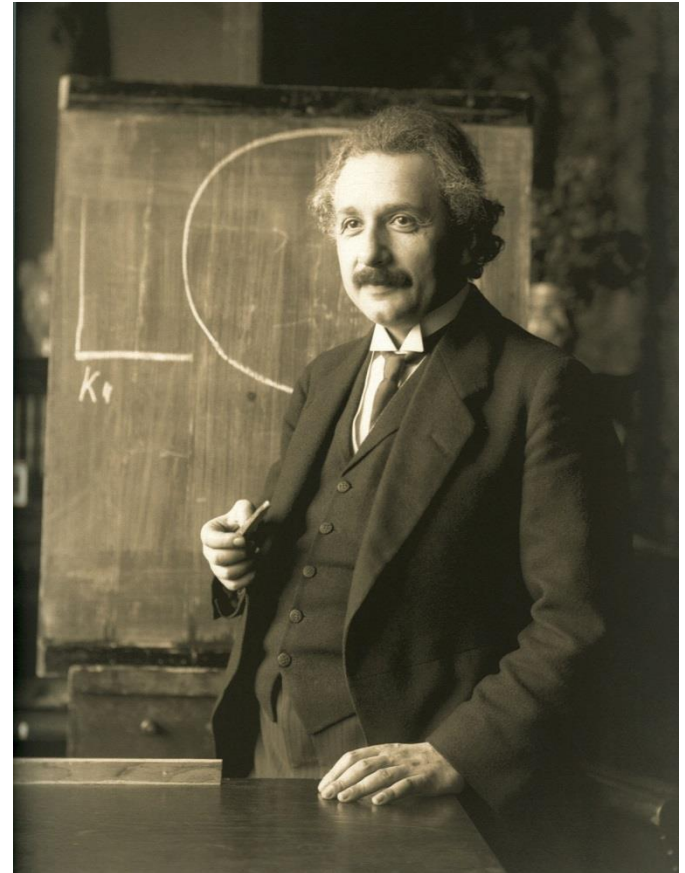
Albert Einstein, 1915:

- Materie krümmt die Raumzeit.
- Die gekrümmte Raumzeit sagt der Materie, wie sie sich bewegen soll.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

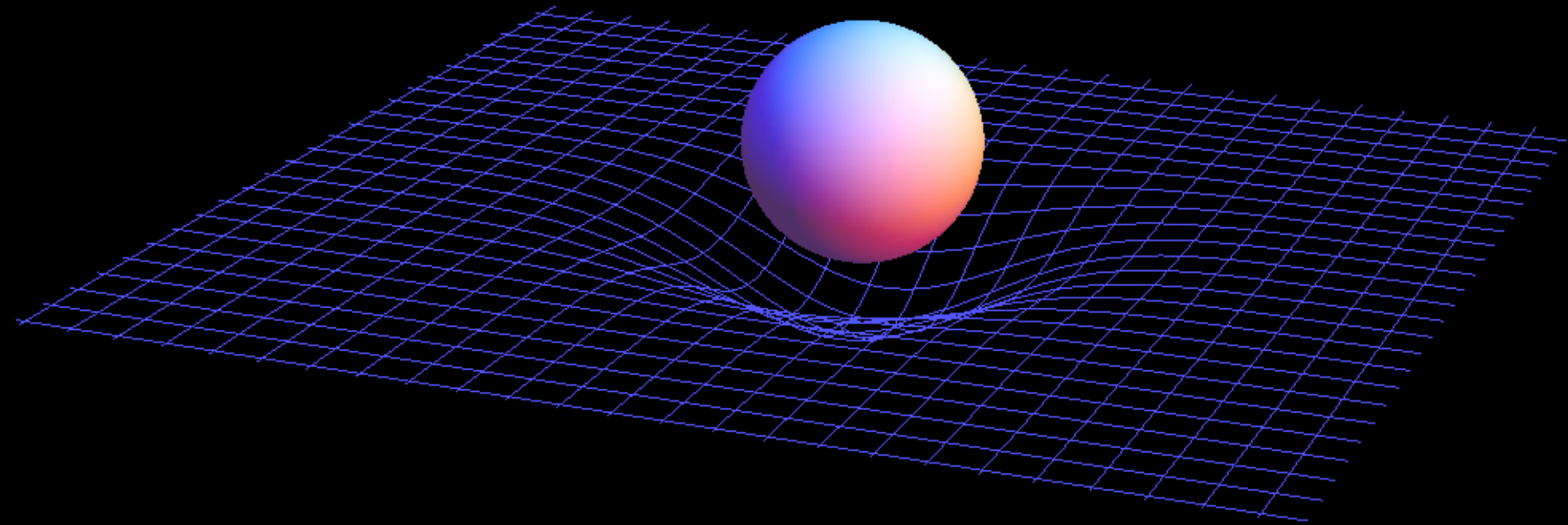
Was bedeutet das?

Was ist überhaupt „Krümmung“?



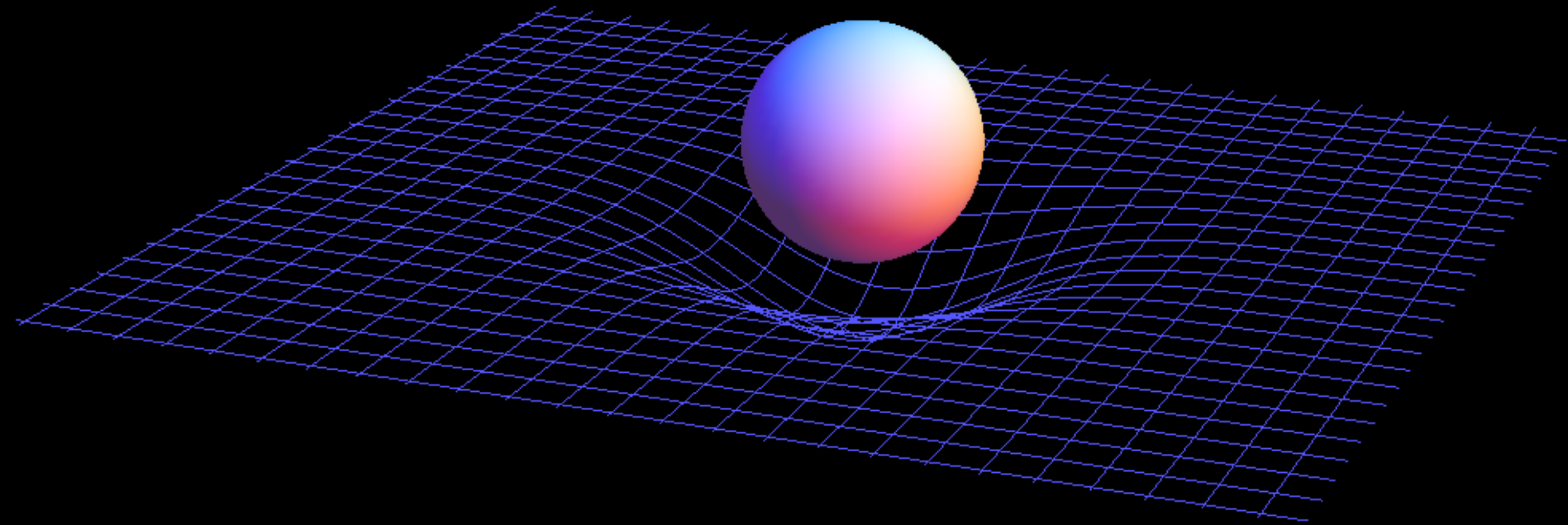
# Allgemeine Relativitätstheorie

---



# Allgemeine Relativitätstheorie

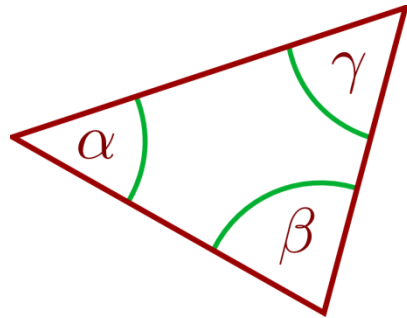
---



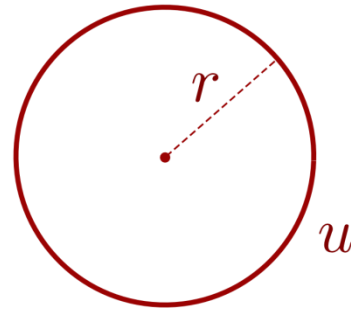
Wie soll man Bilder wie dieses interpretieren?

# (Nicht-)Euklidische Geometrie

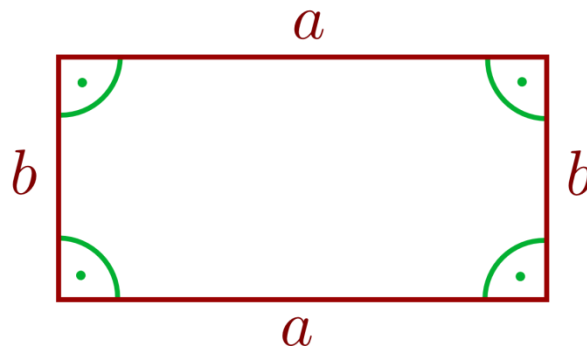
---



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$



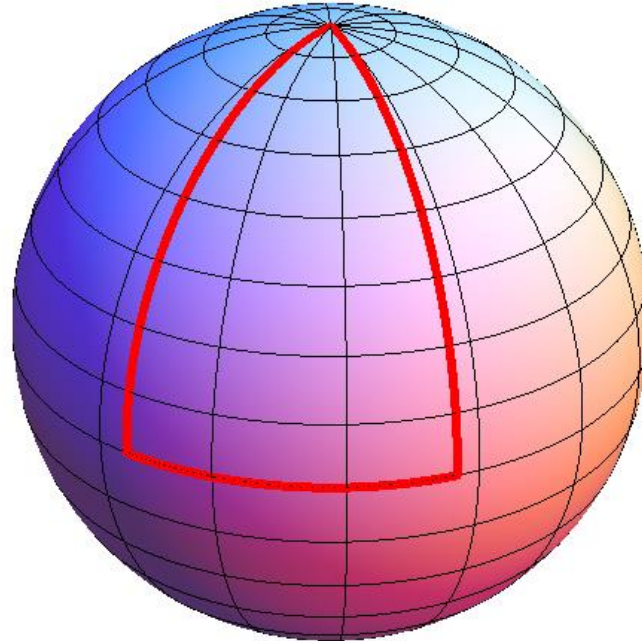
$$u = 2\pi r$$



Euklidische Geometrie der Ebene

# (Nicht-)Euklidische Geometrie

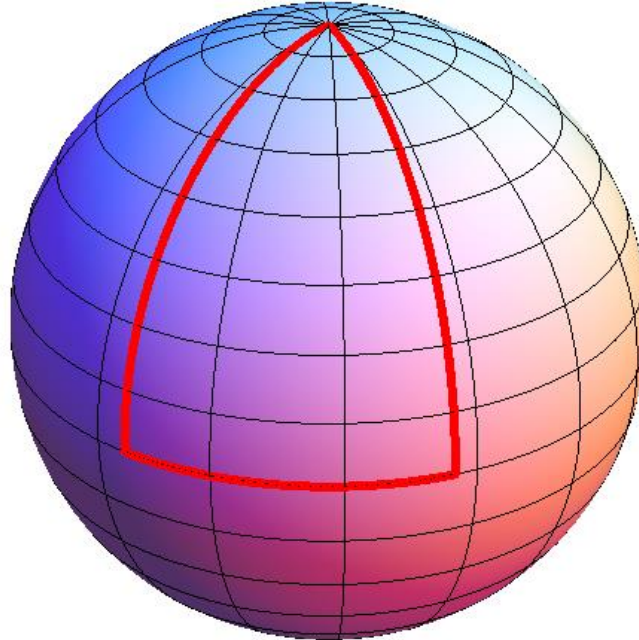
---



Sphärische Geometrie

# (Nicht-)Euklidische Geometrie

---



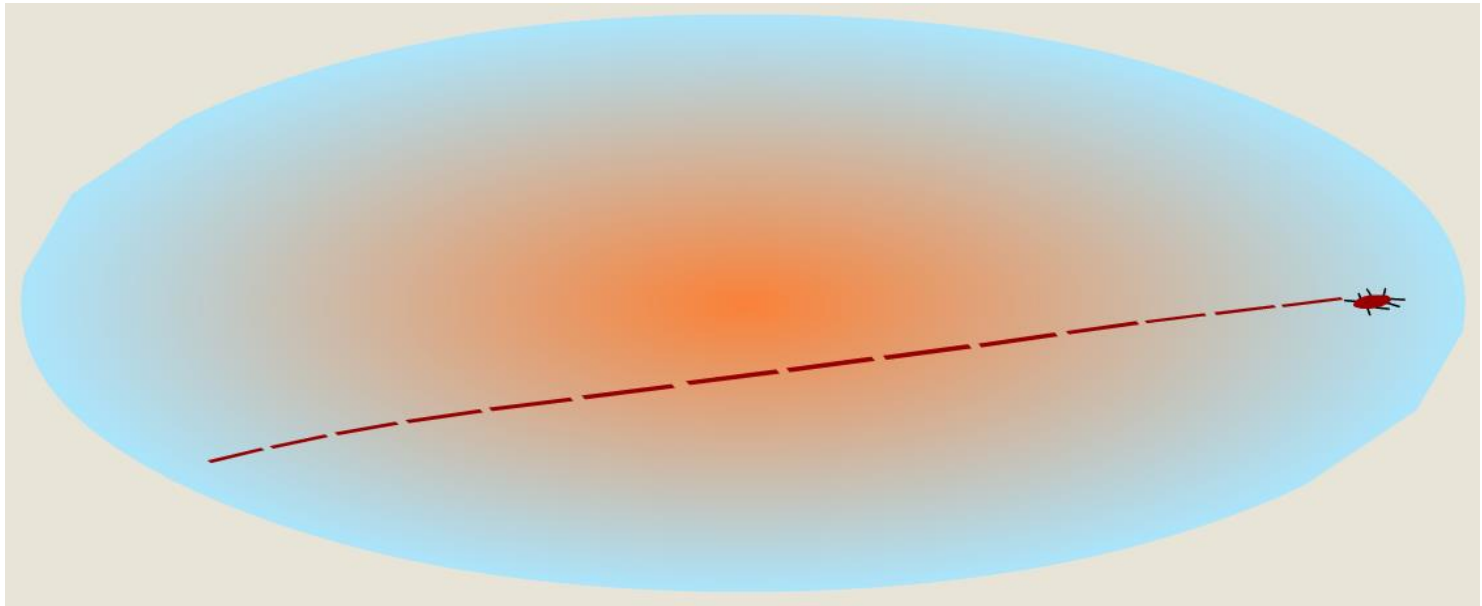
Sphärische Geometrie

Krümmung  $\approx$  Maß für die Abweichung von den Regeln  
und Aussagen der Euklidischen Geometrie



# Die Wanze auf der heißen Ofenplatte

---



<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/EinsteinRechnet/Kruemmung.html>

(aus: F.E.: „Wer mit Einstein rechnete“, math.space, Wien, 2005)

# Kausalstruktur und Lichtkegel

---

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)



# Kausalstruktur und Lichtkegel

---

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)



# Kausalstruktur und Lichtkegel

---

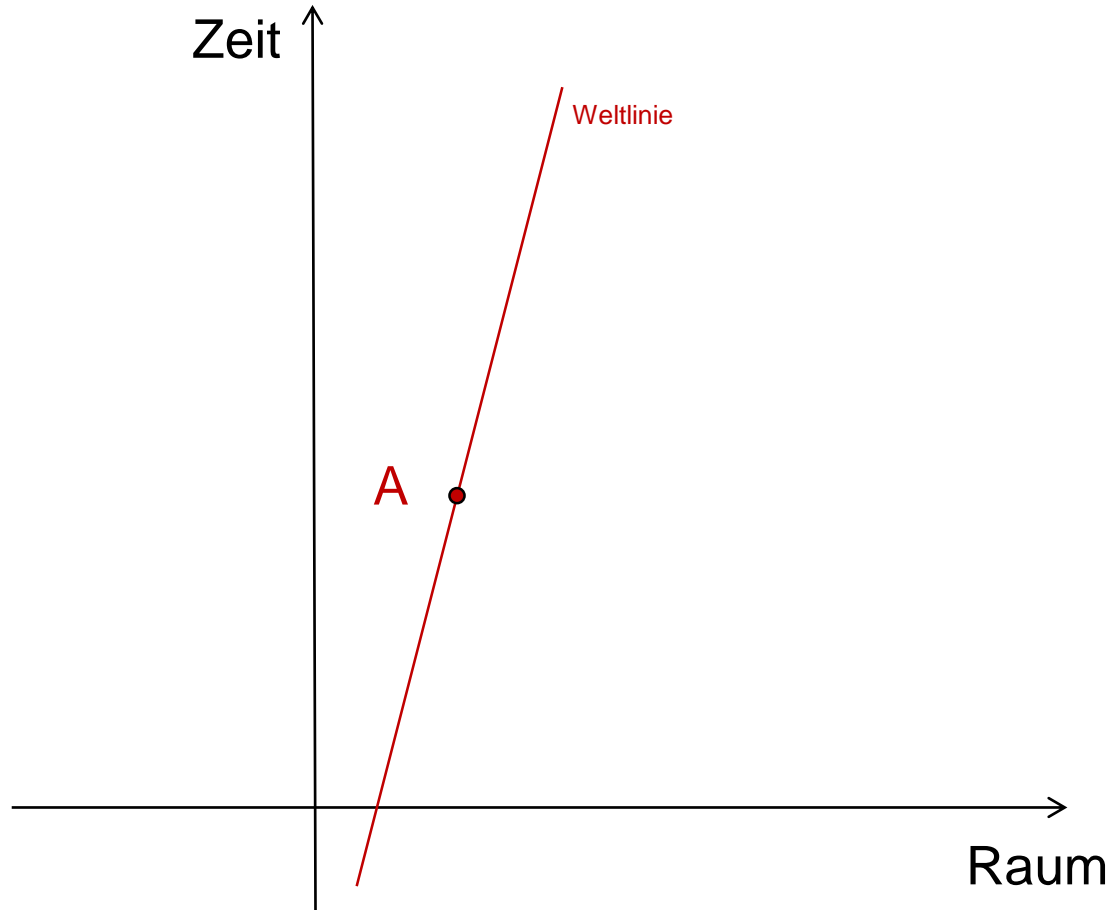
Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)



# Kausalstruktur und Lichtkegel

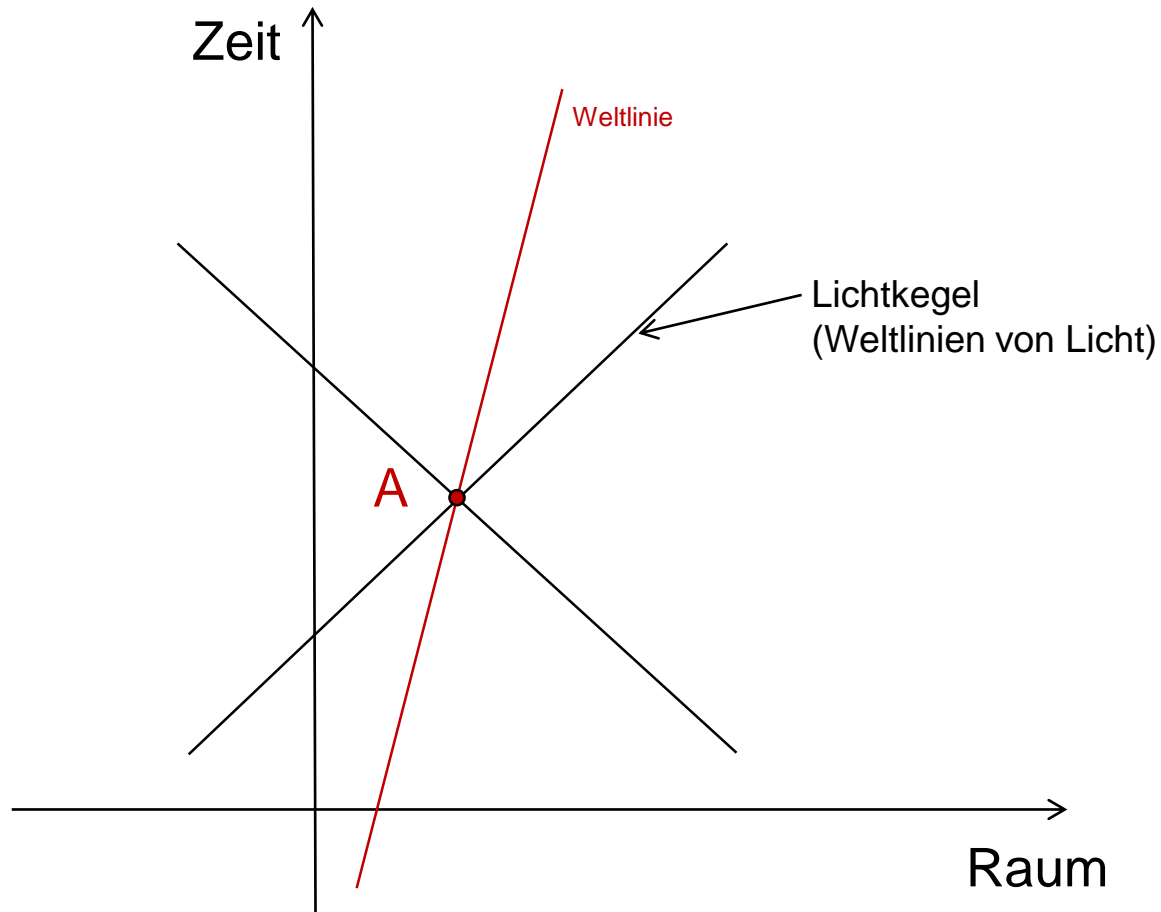
---

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)



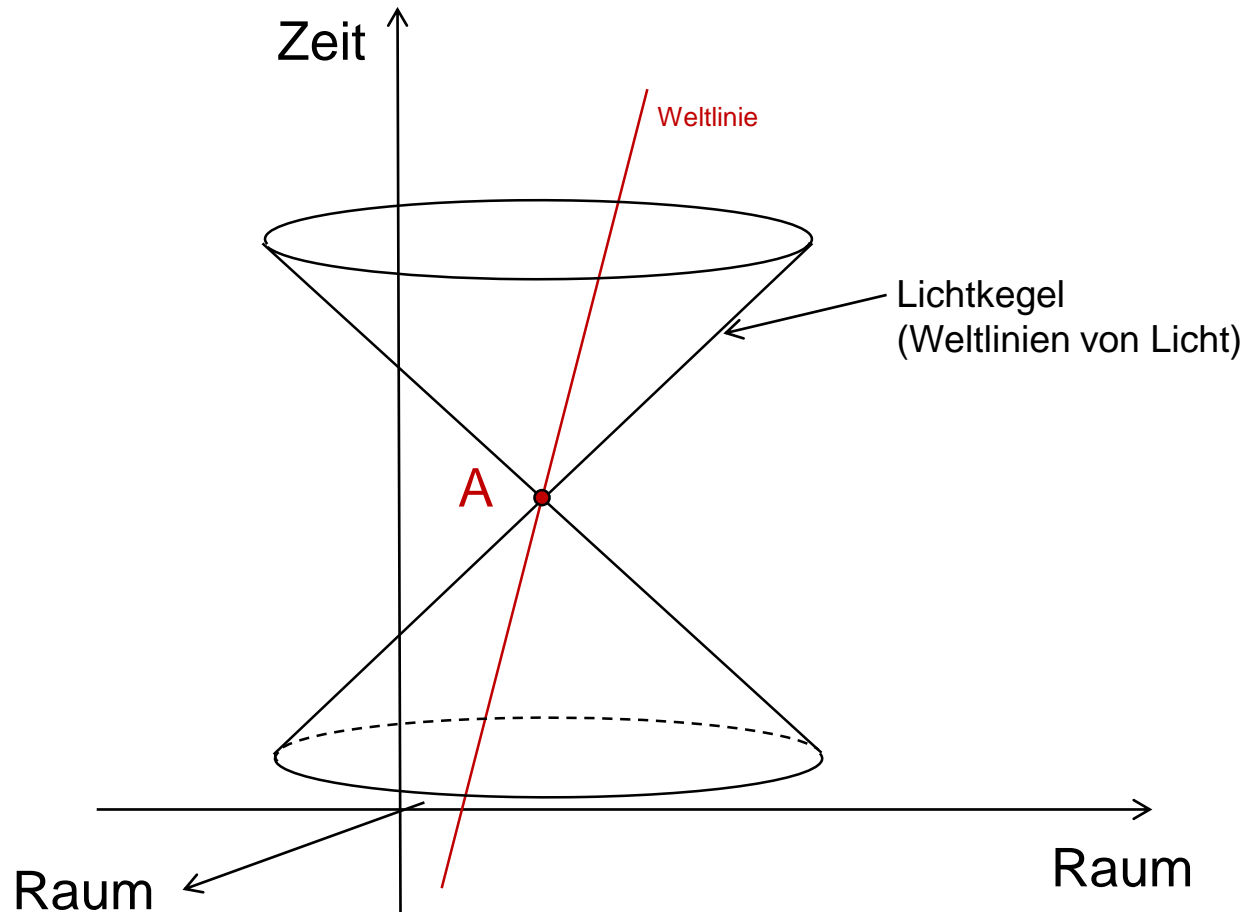
# Kausalstruktur und Lichtkegel

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)



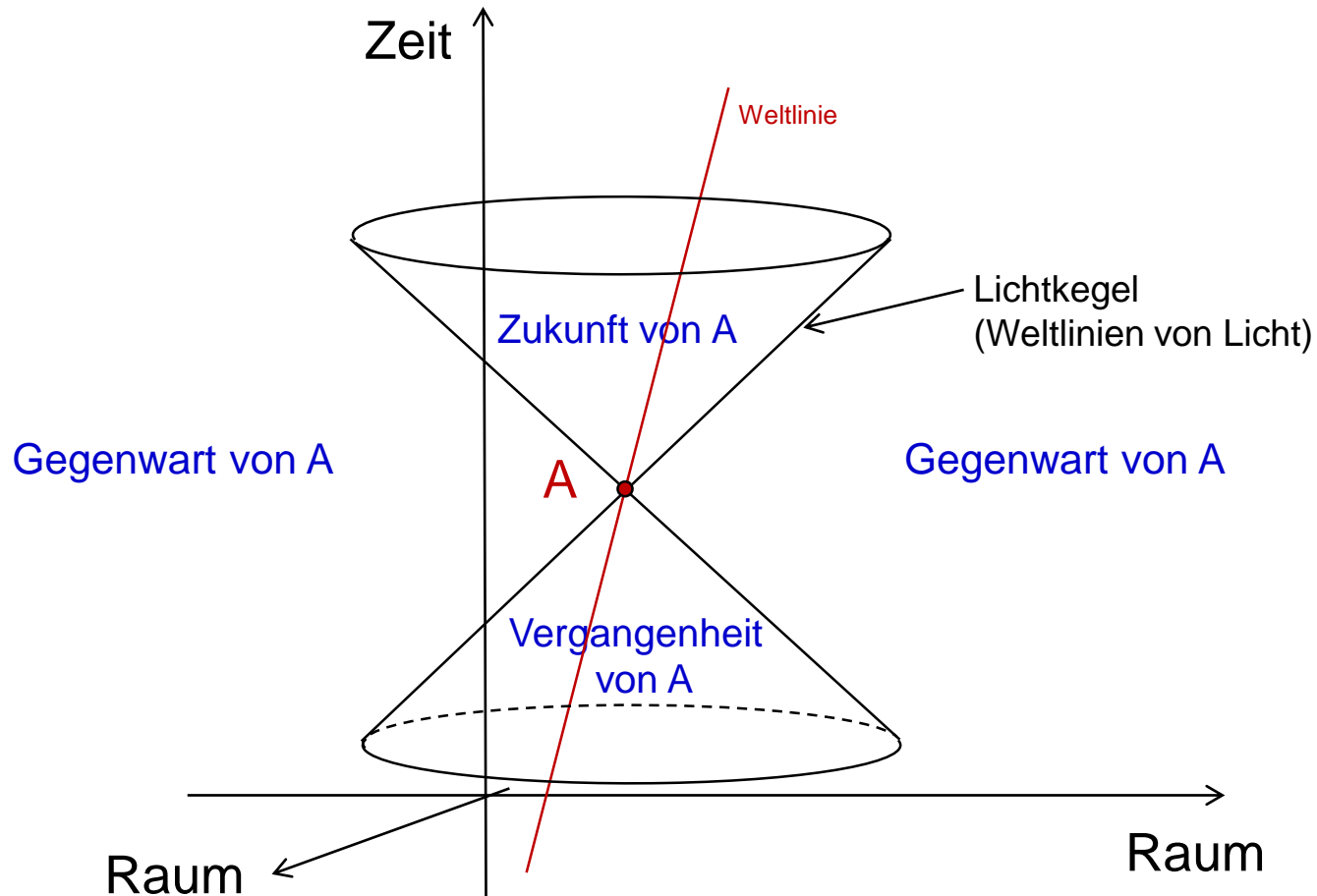
# Kausalstruktur und Lichtkegel

Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)



# Kausalstruktur und Lichtkegel

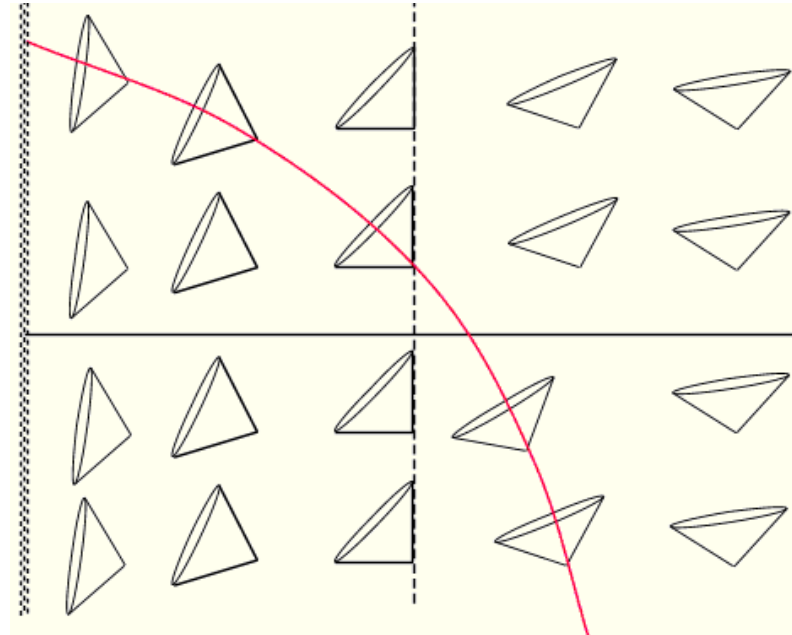
Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905; Minkowski, 1908)





# Kausalstruktur eines Schwarzen Lochs

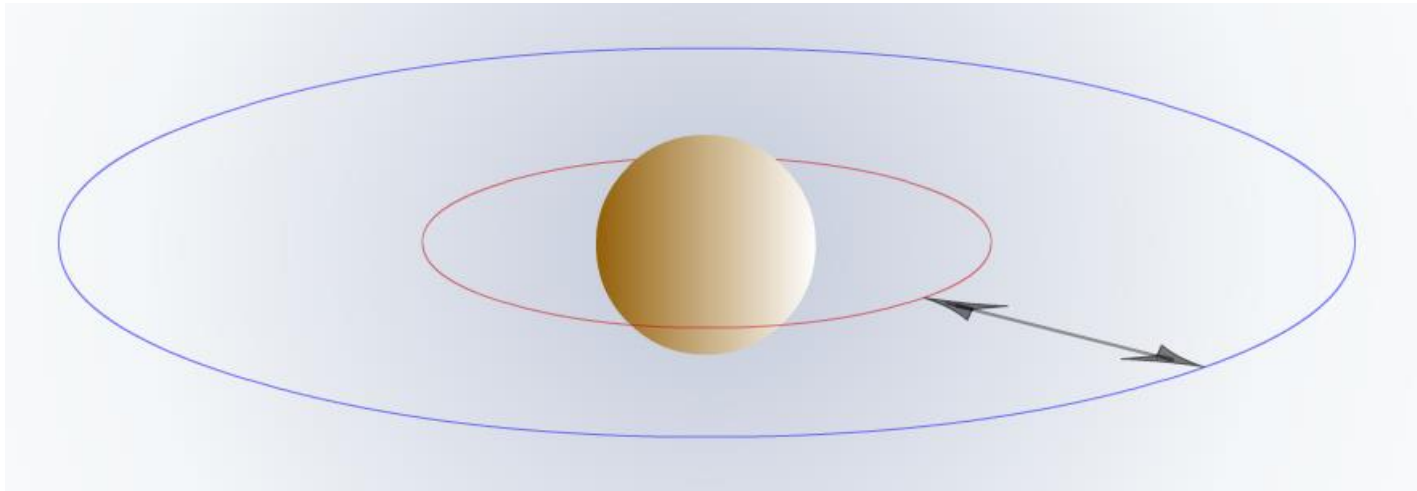
---



<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/Raumzeit/>

# Raumkrümmung in der Nähe eines SL

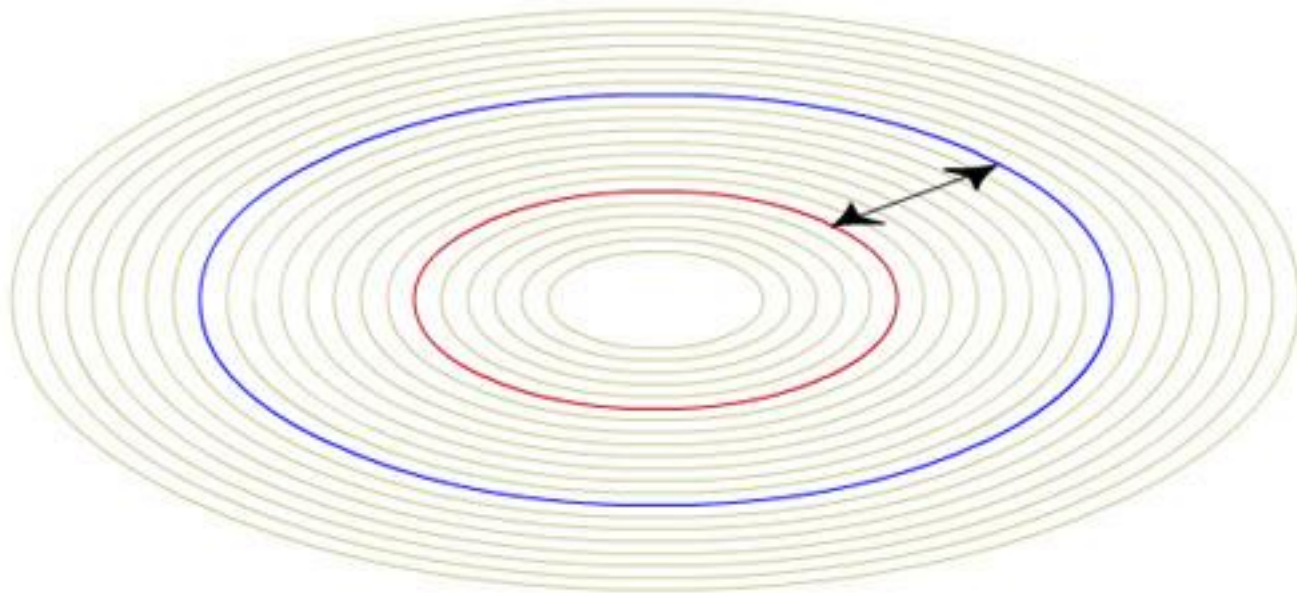
---



<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/Einstein/artMasstaebe/>

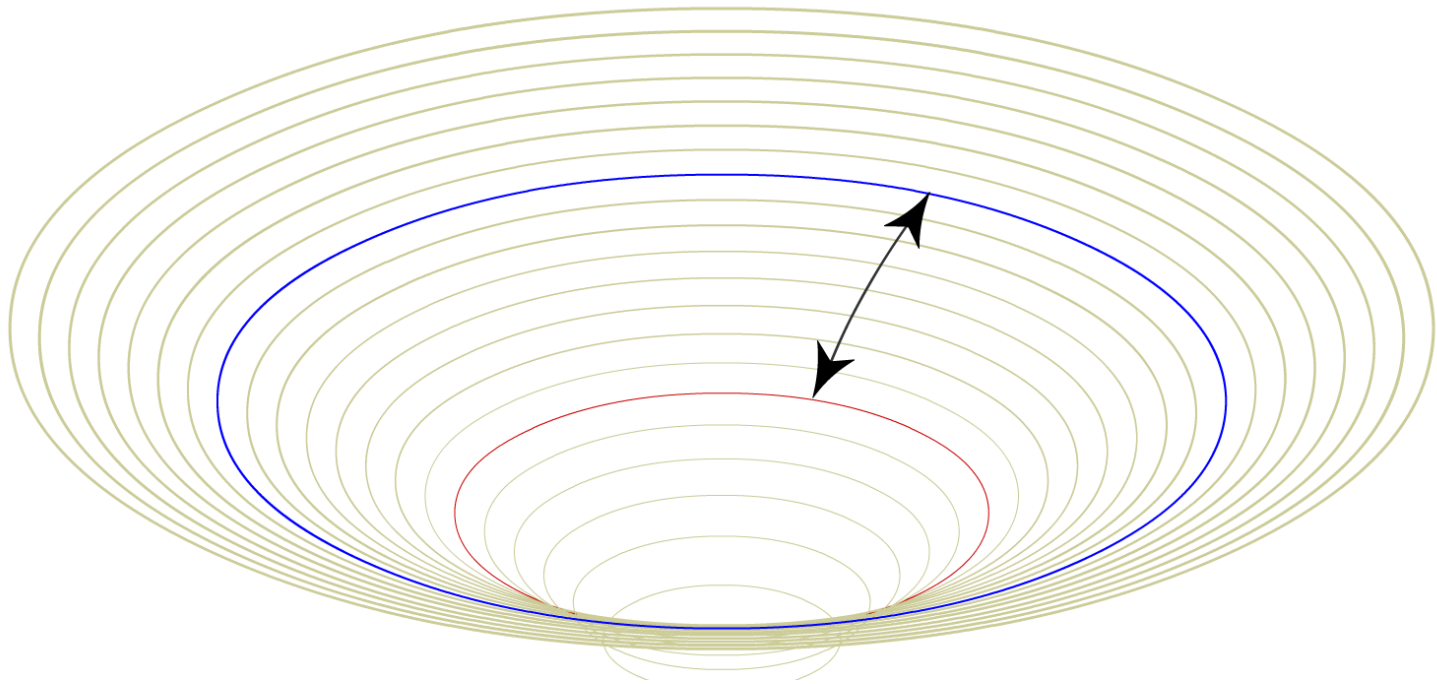
# Trichtermodell

---



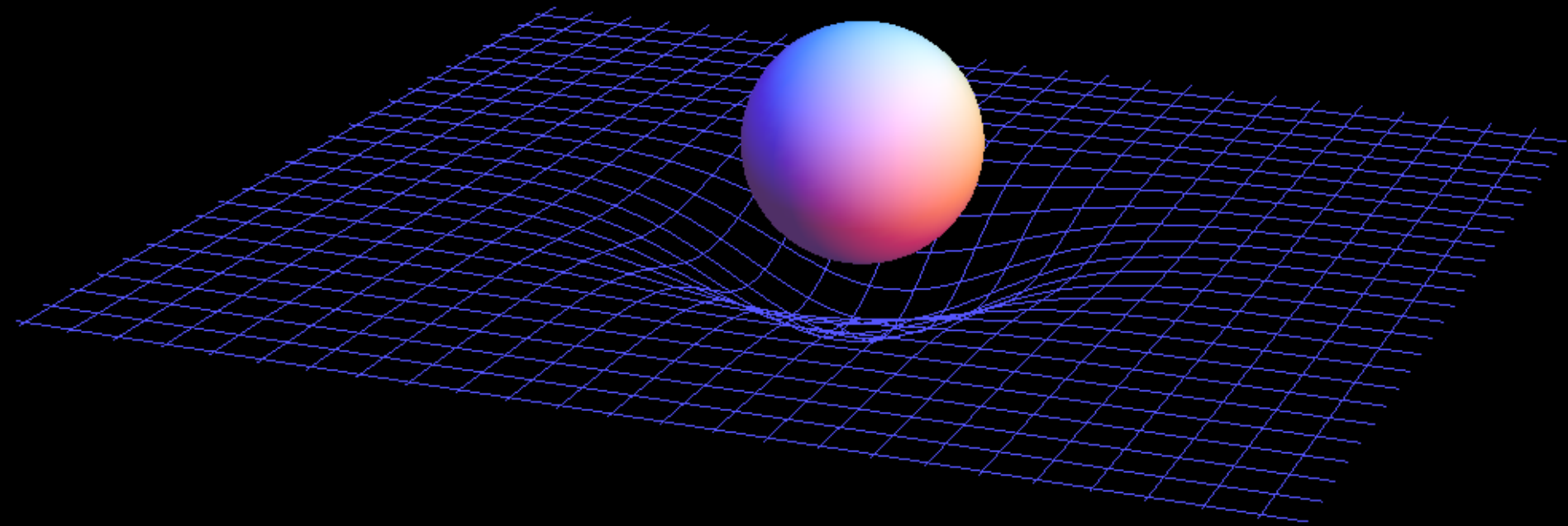
# Trichtermodell

---



# Trichtermodell

---



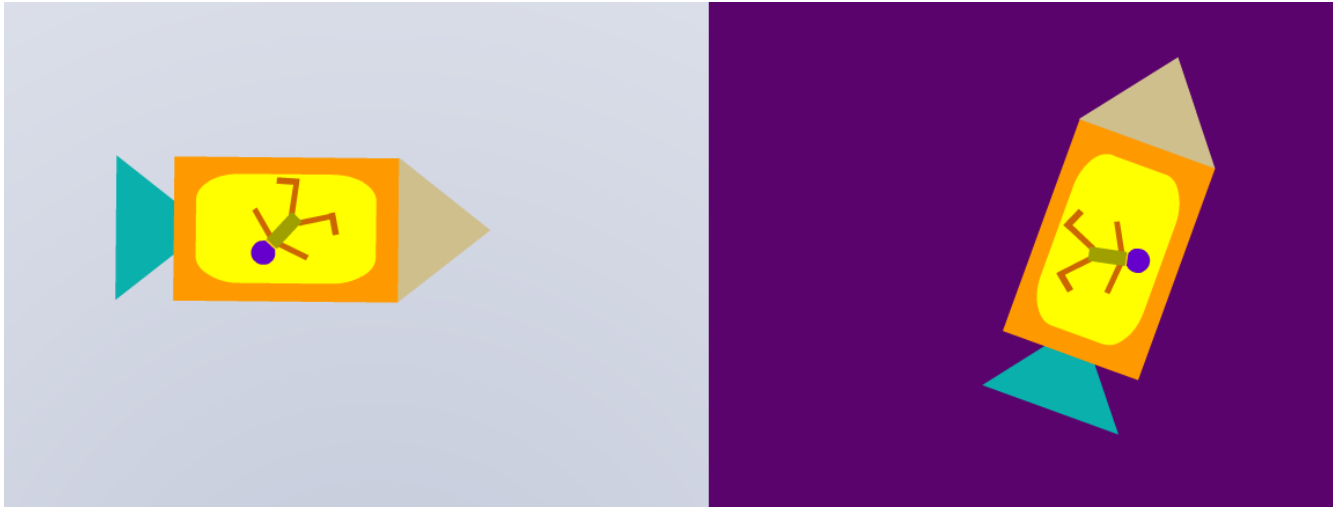
# Zwischenbilanz

---

- Der **Raum** in der Nähe massiver Himmelskörper ist gekrümmt.
- Was bedeutet aber „**Raum-Zeit**-Krümmung“? Kann auch „die Zeit“ gekrümmt sein?
- Nein, aber ein „**Raum-Zeit-Schnitt**“ durch die Raumzeit kann gekrümmt sein!
- Dazu müssen **Bewegungen** betrachtet werden.
- Wie wird die freie („frei fallende“) Bewegung in der Allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben?

# Äquivalenzprinzip

---

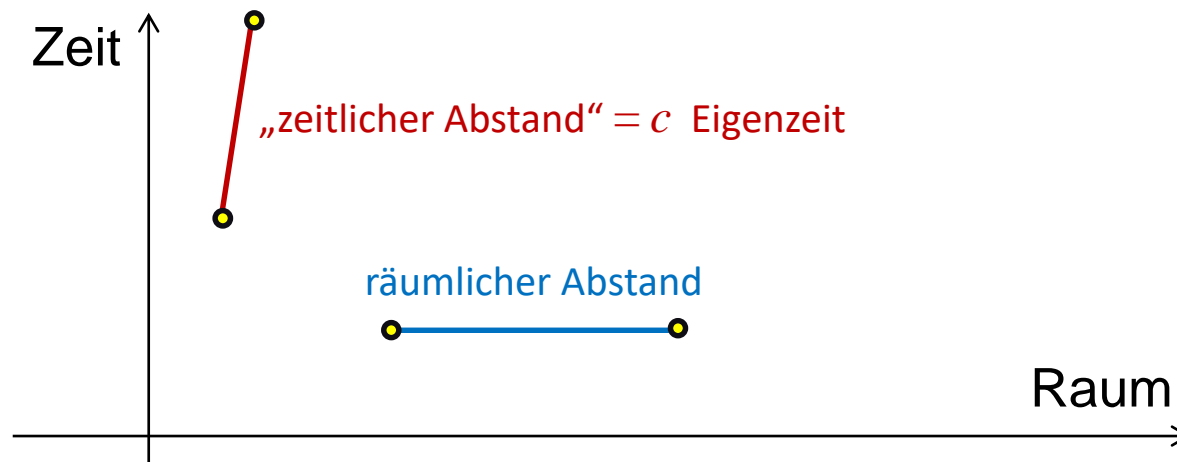


<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/Einstein/artAequivalenzprinzip/>

# SRT, Metrik, Geraden, Geodäten und Sphären

---

- Für einen frei fallenden Beobachter gelten **lokal** die Gesetze der **Speziellen Relativitätstheorie**.
- Zwillingsparadoxon: Für frei fallende Körper ist die **Eigenzeit maximal!**
- Abstandsbegriff in der Raumzeit (**Metrik**):



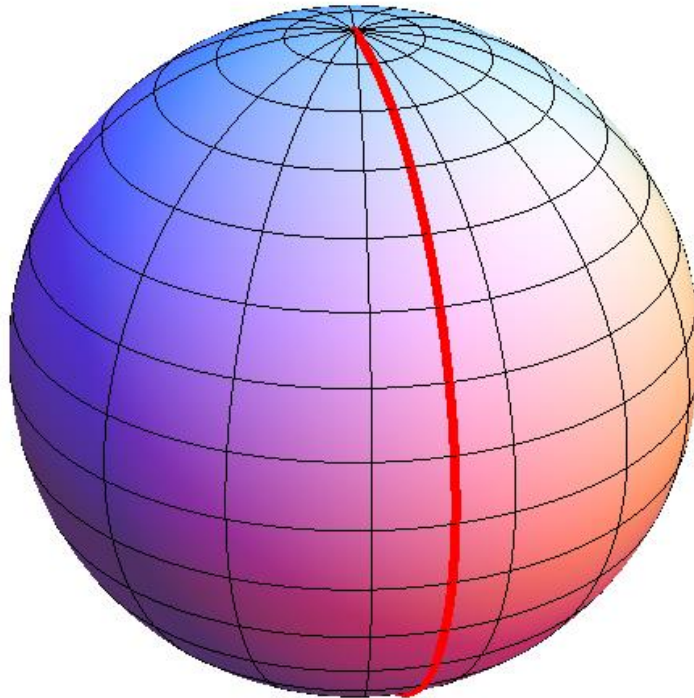
- Weltlinien frei fallender Körper sind **Geodäten** („geradeste Linien“).



# SRT, Metrik, Geraden, Geodäten und Sphären

---

- Ein Beispiel für Geodäten („geradeste Linien“ in einem gekrümmten „Raum“) sind „Großkreise“ auf einer **Sphäre**:



# Raum-Zeit-Krümmung in der Nähe von Himmelskörpern

---

Wir betrachten folgendes **Szenario**: Zwei Raketen werden gleichzeitig abgeschossen:

- Eine Rakete umkreist die Erde.
- Die andere Rakete bewegt sich senkrecht von der Erde weg und fällt schließlich wieder zurück.
- Danach treffen sie wieder aufeinander.

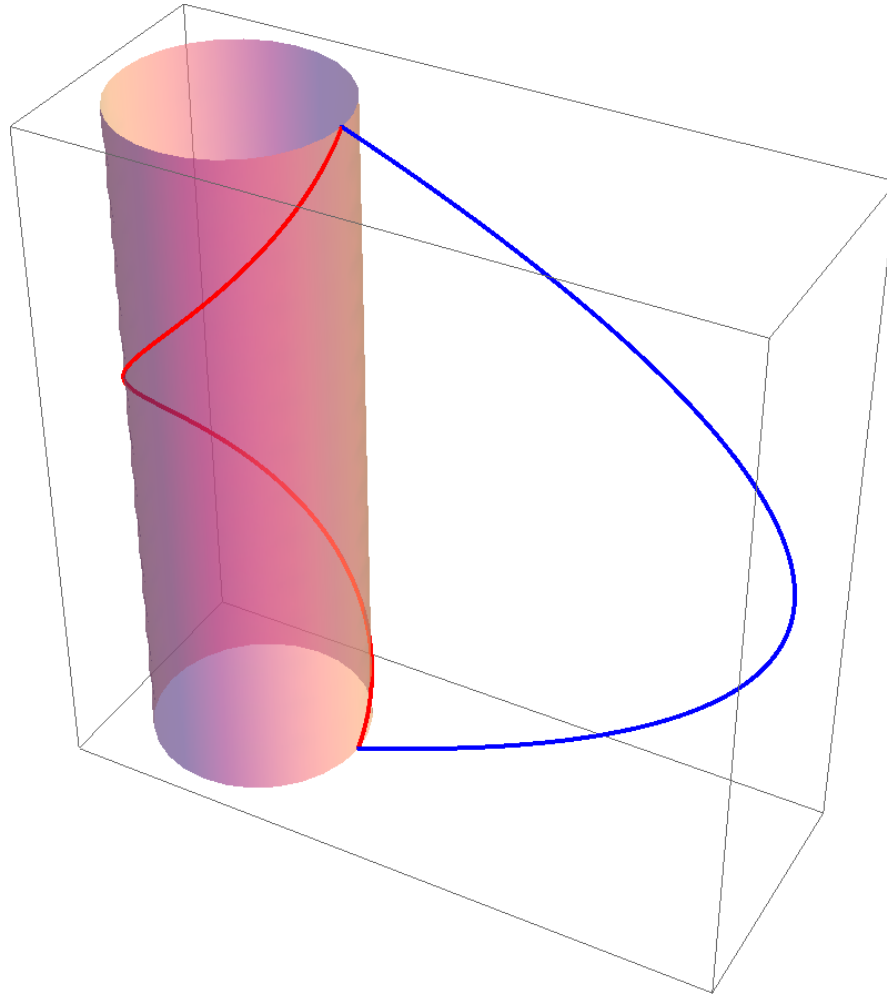
Die zwei Punkte der Raumzeit

- Ereignis des Abschusses **A**
- Ereignis des Wiedertreffens **B**

werden durch **zwei verschiedene** Geodäten („geradeste Linien“) miteinander verbunden!

# Raum-Zeit-Krümmung in der Nähe von Himmelskörpern

---



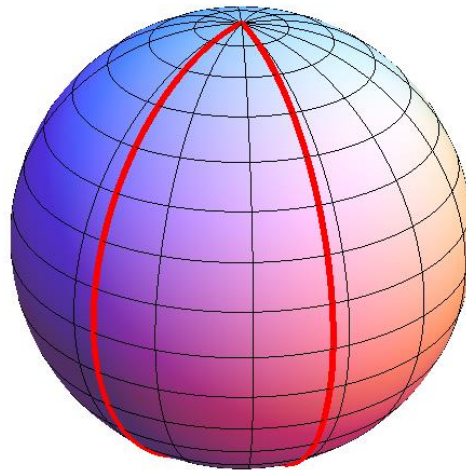
Das kann es in einer nicht-gekrümmten („flachen“) Raumzeit nicht geben!

# Krümmungsradius und Lichtablenkung

---

Analogie:

- Auch auf einer **Sphäre** können zwei Punkte durch verschiedene Geodäten verbunden sein!



- Der „Krümmungsradius“ (= Radius der Sphäre) ist von der Größenordnung der **Länge dieser Geodäten**.

# Krümmungsradius und Lichtablenkung

In der Raumzeit: „Länge der Geodäten“ =  $c$  Zeitspanne, die dieser Vorgang benötigt!

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (\text{Grundgesetz der Mechanik})$$

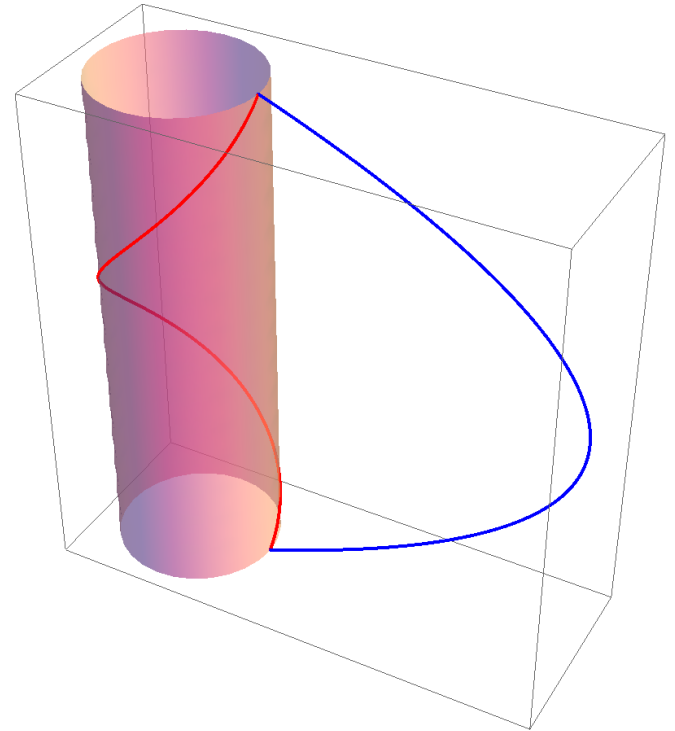
$$\frac{GM}{r} = v^2$$

$$v = \frac{2\pi r}{t_{\text{Umlauf}}}$$

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{t_{\text{Umlauf}}^2}$$

$$t_{\text{Umlauf}} = 2\pi \frac{r^{3/2}}{(GM)^{1/2}}$$

$$R_{\text{Krümmung}} \approx ct_{\text{Umlauf}} = 2\pi \frac{cr^{3/2}}{(GM)^{1/2}}$$



# Krümmungsradius und Lichtablenkung

---

Daher größenordnungsmäßige Abschätzung des Krümmungsradius in der Nähe eines Himmelskörpers mit Masse  $M$  und Radius  $r$ :

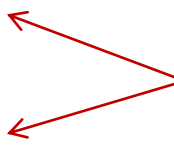
$$R_{\text{Krümmung}} \approx \frac{c r^{3/2}}{(GM)^{1/2}} \approx \frac{r^{3/2}}{R_{\text{Schwarzschild}}^{1/2}}$$

$$R_{\text{Schwarzschild}} = \frac{2GM}{c^2}$$

Für die Erde:  $R_{\text{Krümmung}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m}$

Für die Sonne:  $R_{\text{Krümmung}} \approx 5 \cdot 10^8 \text{ m}$

Größenordnung des  
Radius der Umlaufbahn  
des Mars!



# Krümmungsradius und Lichtablenkung

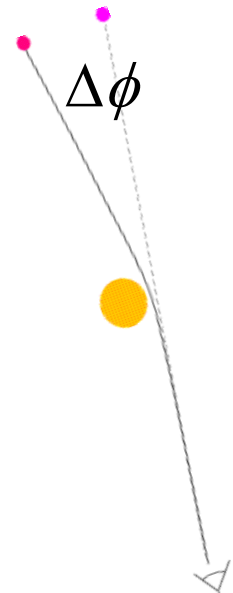
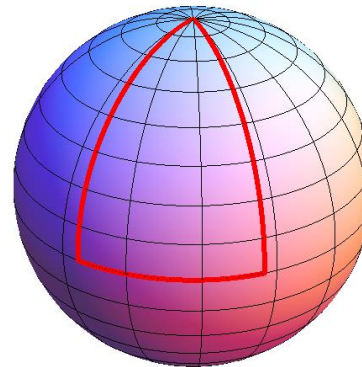
---

Ein Lichtstrahl wird abgelenkt, wenn er am Rand eines Himmelskörpers vorbeiläuft. Wie groß ist diese Ablenkung?

**Analogie:** Für die Winkelsumme eines „Dreiecks“ auf einer Sphäre gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\text{Fläche}}{R^2}$$

(„sphärischer Exzess“ ... misst die Abweichung von Winkeln im Vergleich mit der Euklidischen Geometrie)



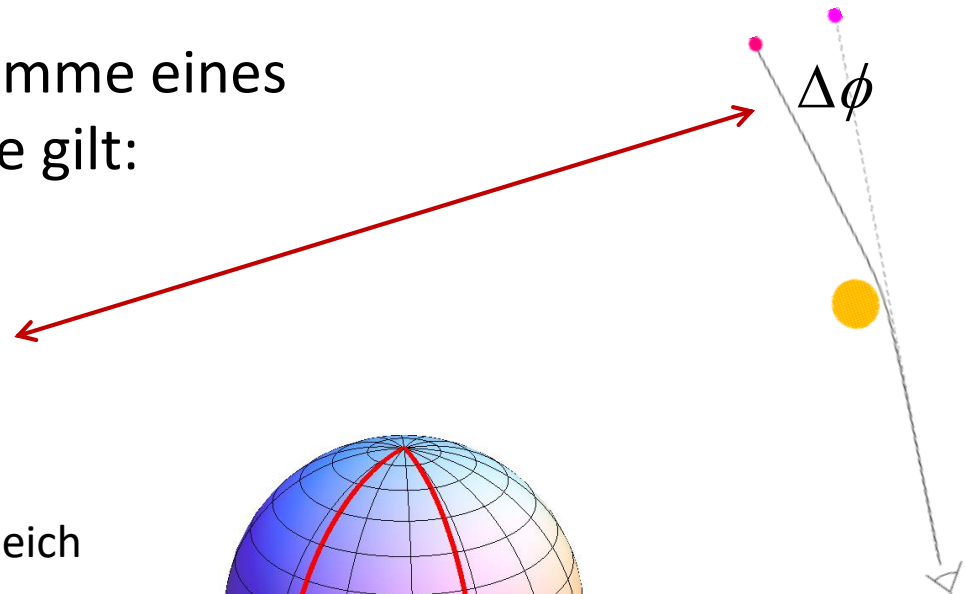
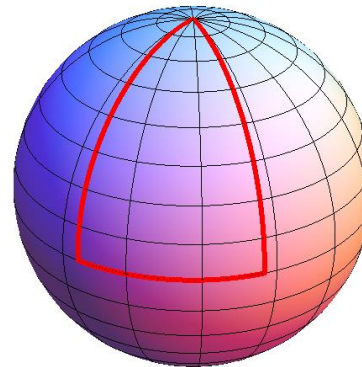
# Krümmungsradius und Lichtablenkung

Ein Lichtstrahl wird abgelenkt, wenn er am Rand eines Himmelskörpers vorbeiläuft. Wie groß ist diese Ablenkung?

**Analogie:** Für die Winkelsumme eines „Dreiecks“ auf einer Sphäre gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\text{Fläche}}{R^2}$$

(„sphärischer Exzess“ ... misst die Abweichung von Winkeln im Vergleich mit der Euklidischen Geometrie)





# Krümmungsradius und Lichtablenkung

---

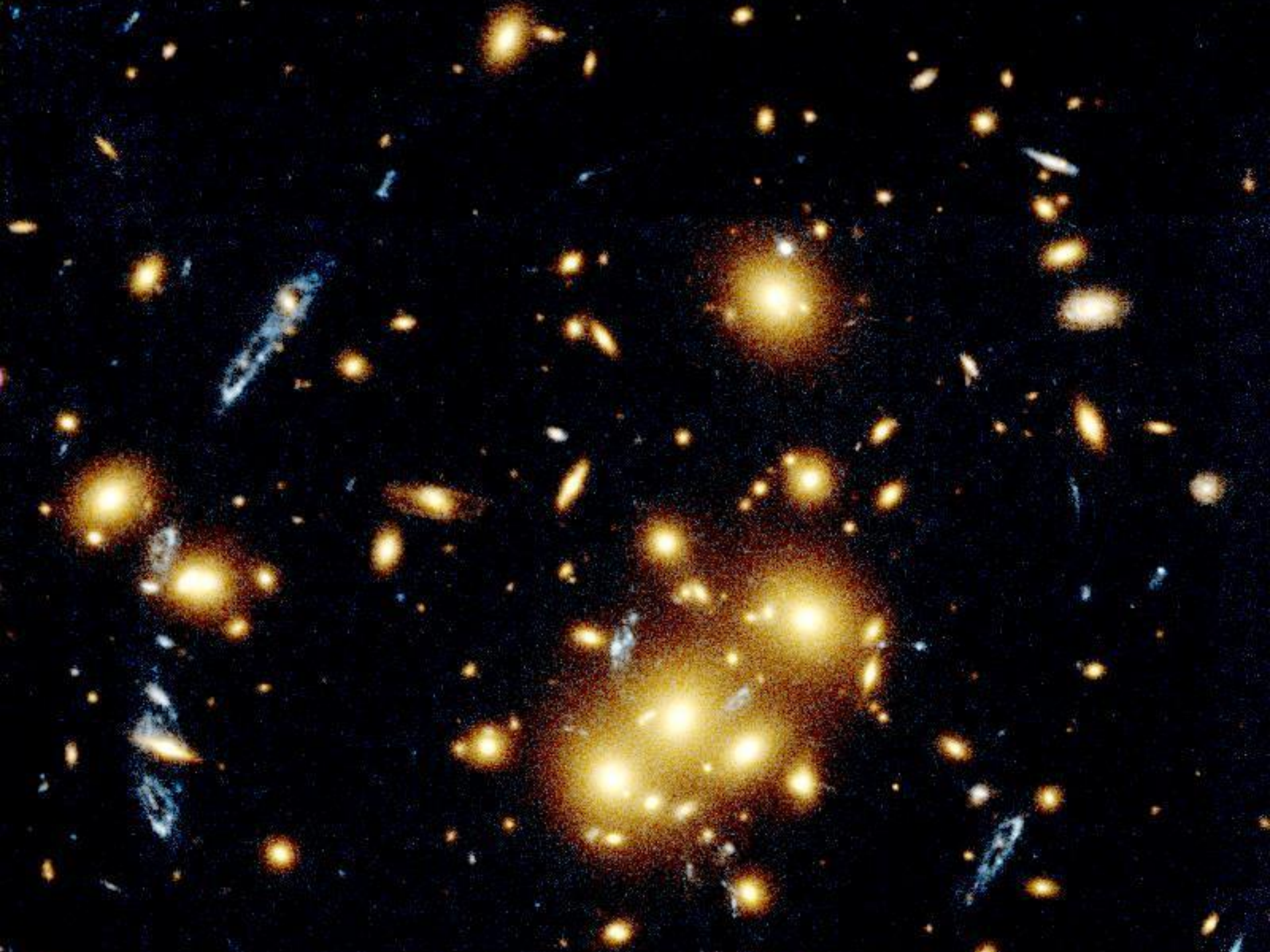
Daher Abschätzung des **Größenordnung der Lichtablenkung**:

$$\text{wirksame Raumzeit-Fläche} \approx r \cdot c \cdot \text{Lichtlaufzeit} \approx r \cdot c \cdot \frac{r}{c} = r^2$$

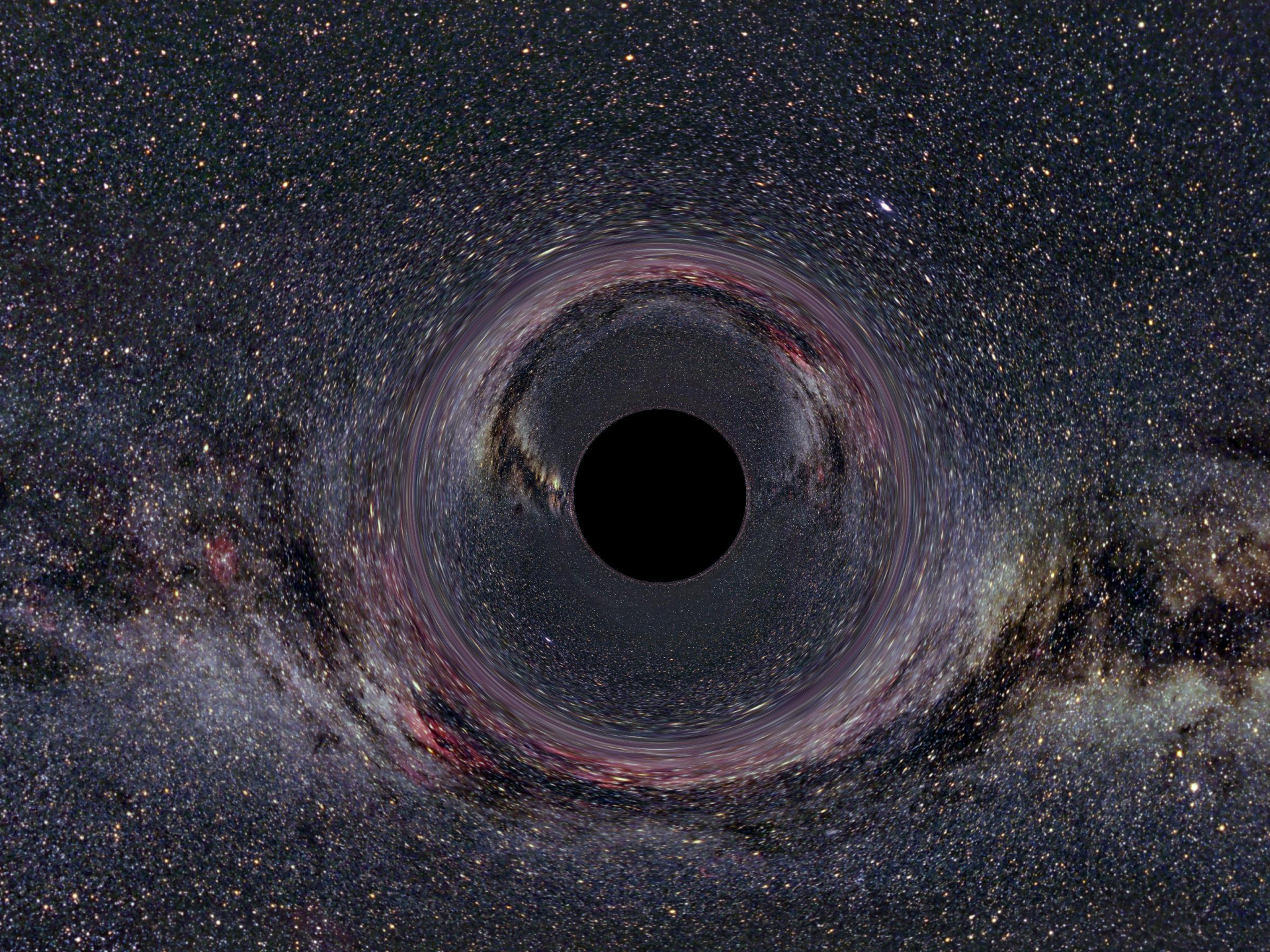
$$\Delta\phi \approx \frac{\text{wirksame Raumzeit-Fläche}}{R_{\text{Krümmung}}^2} \approx \frac{r^2}{R_{\text{Krümmung}}^2} \approx \frac{GM}{c^2 r} \approx \frac{R_{\text{Schwarzschild}}}{r}$$

→ Lichtablenkung am **Sonnenrand**:  $\Delta\phi \approx 10^{-6} \approx 1''$

Genauere Vorhersage der ART:  $\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2 r} = 1.75''$  (seit 1919 gemessen)







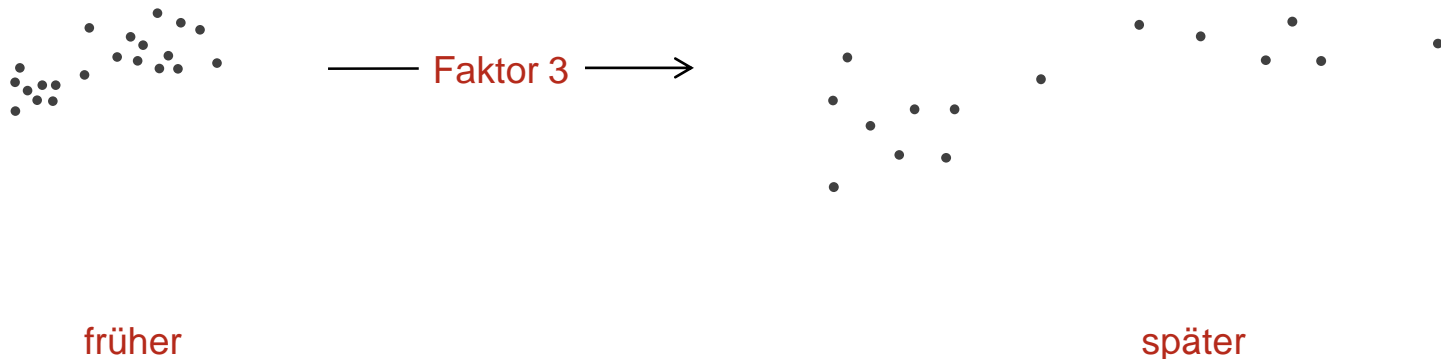


# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

---

## Kosmologie:

- Theoretischer Ansatz (Einstein, 1917): „kosmologisches Prinzip“
- Beobachtung: Das Universum ist auf großen Strukturen **räumlich flach** und **expandiert** (derzeit sogar beschleunigt).

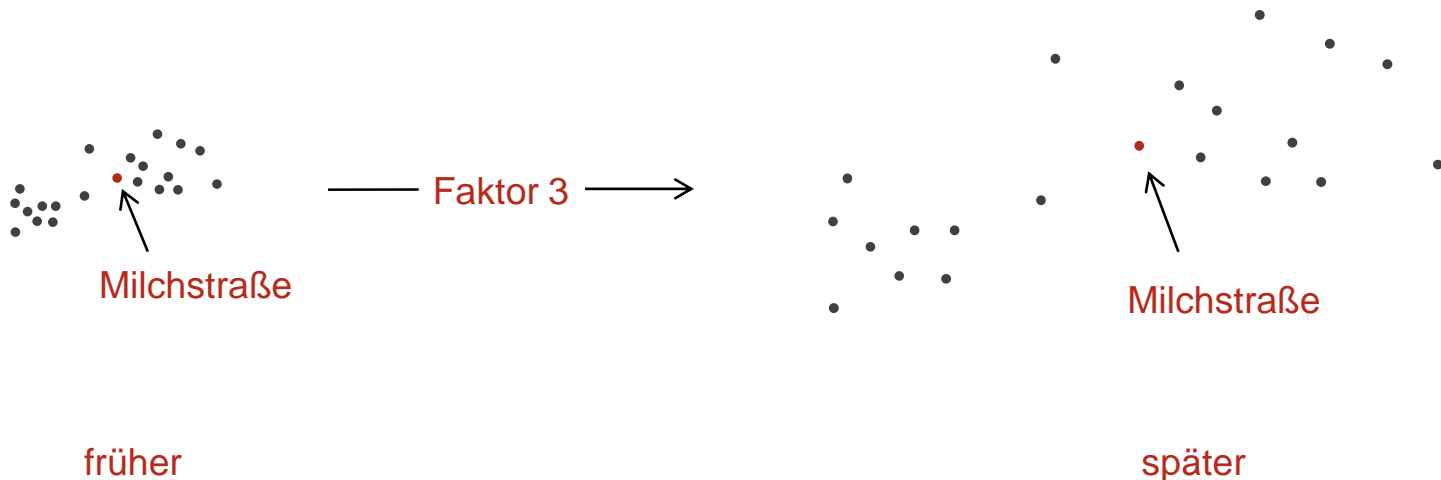


# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

---

## Kosmologie:

- Theoretischer Ansatz (Einstein, 1917): „kosmologisches Prinzip“
- Beobachtung: Das Universum ist auf großen Strukturen **räumlich flach** und **expandiert** (derzeit sogar beschleunigt).

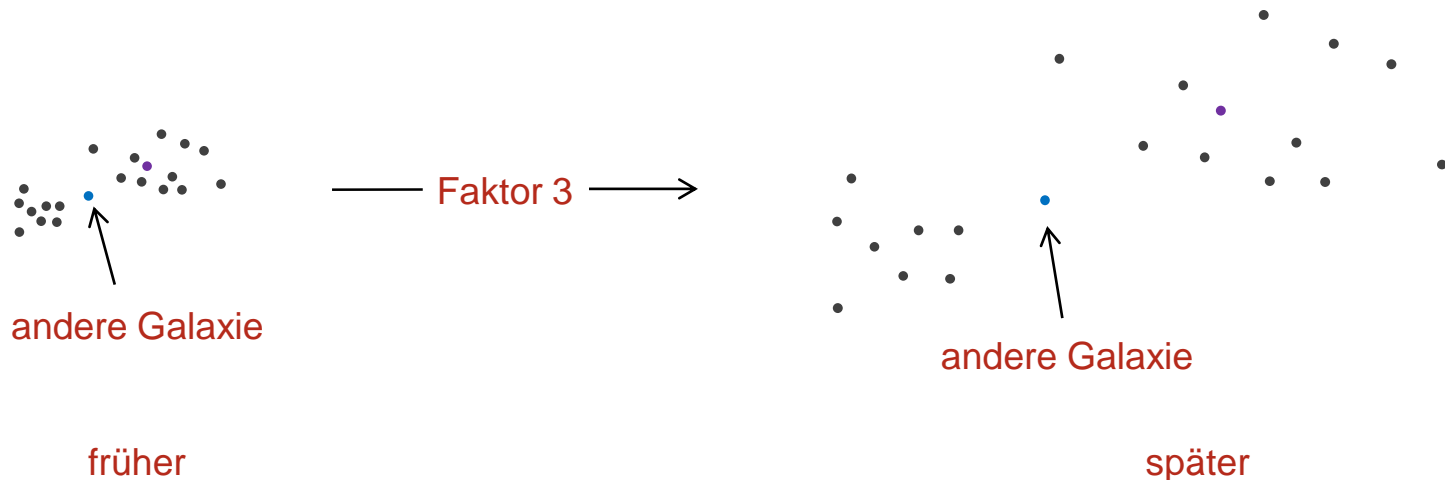


# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

---

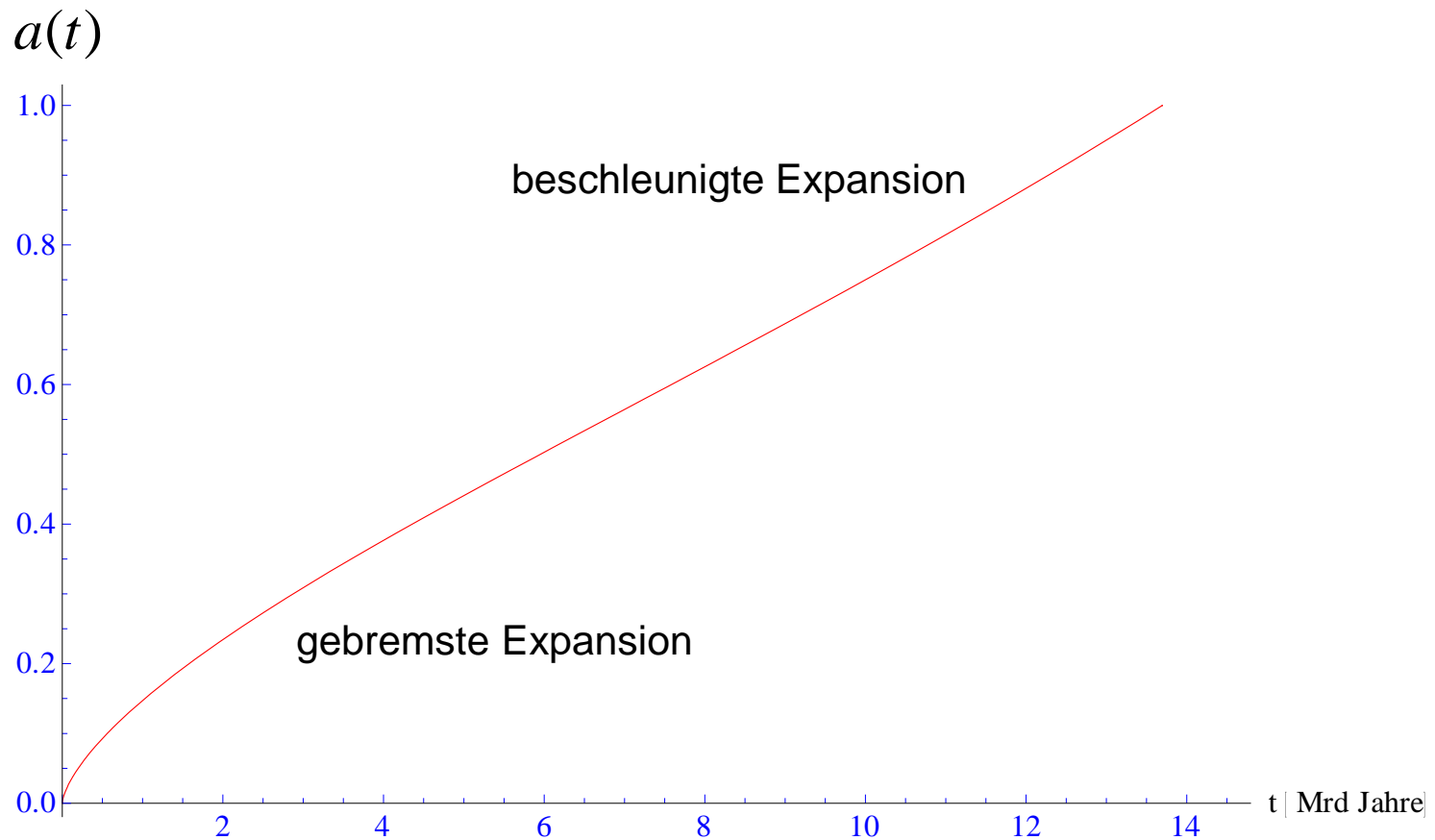
## Kosmologie:

- Theoretischer Ansatz (Einstein, 1917): „kosmologisches Prinzip“
- Beobachtung: Das Universum ist auf großen Strukturen **räumlich flach** und **expandiert** (derzeit sogar beschleunigt).



# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

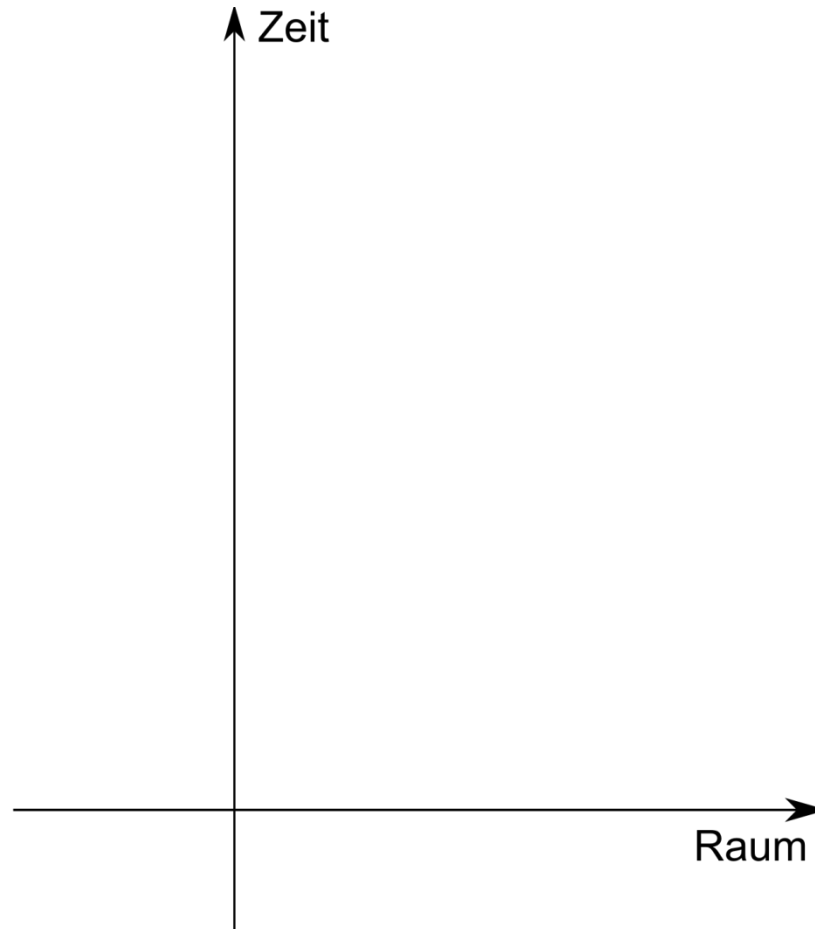
---



# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

---

Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?

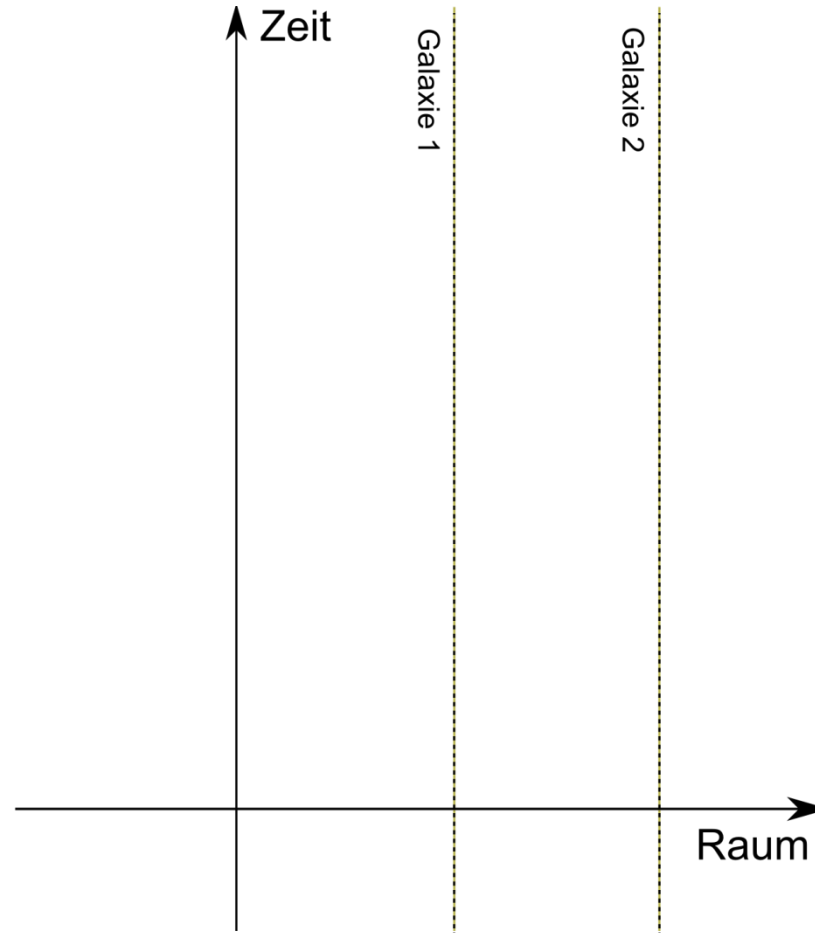




# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

---

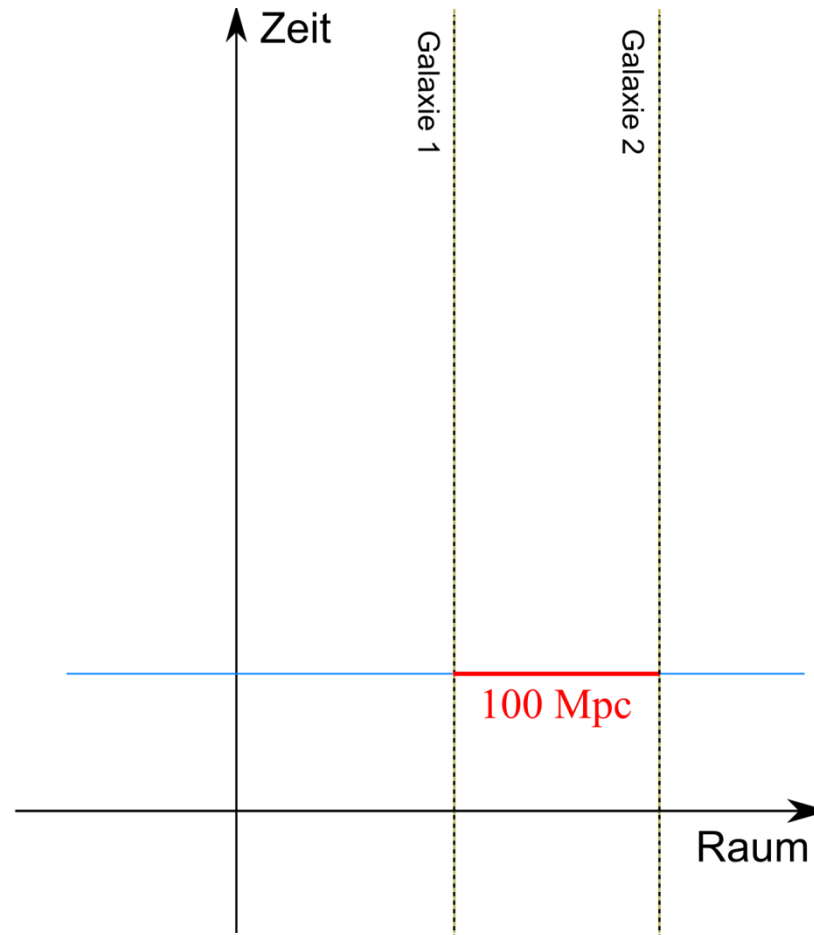
Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

---

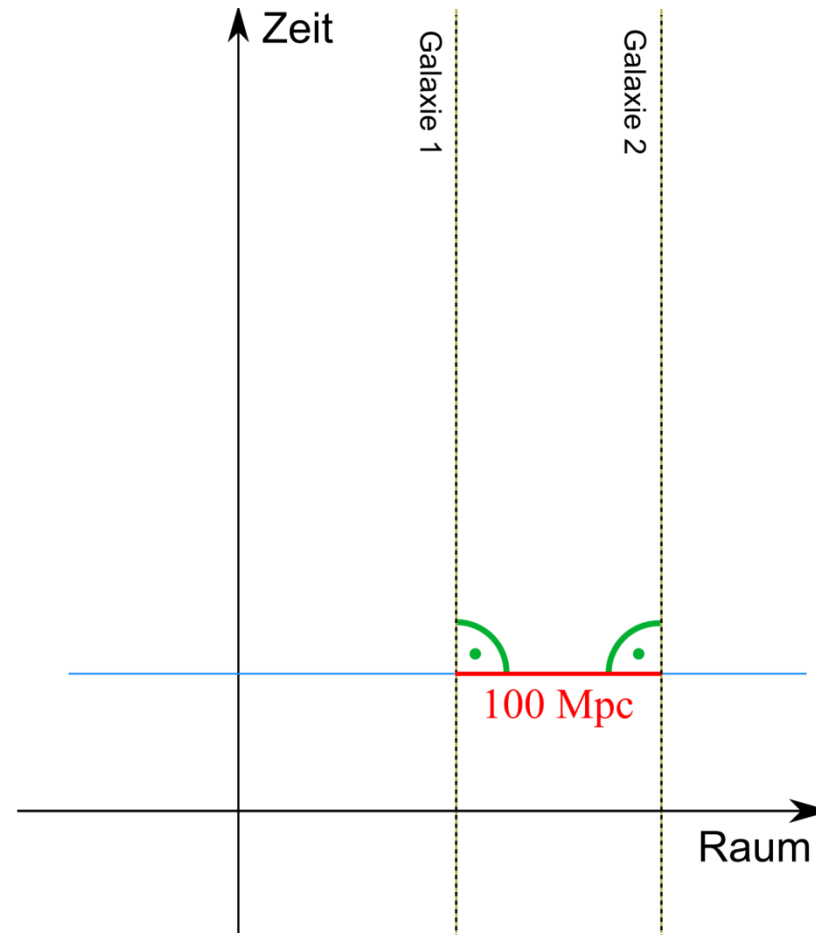
Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

---

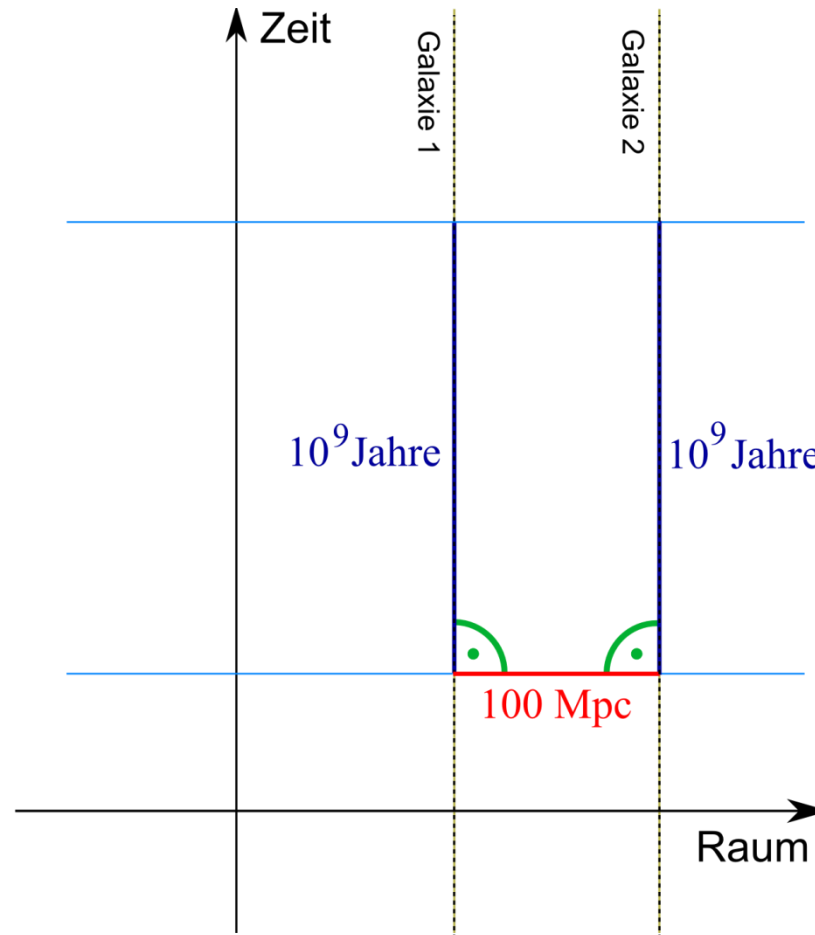
Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

---

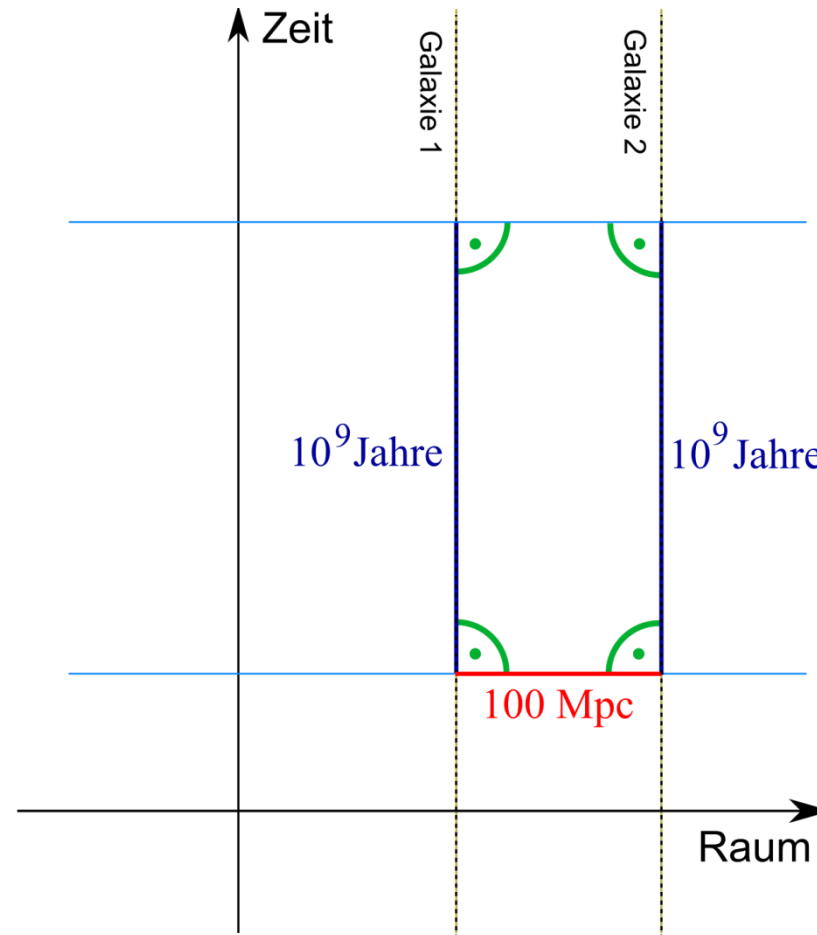
Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

---

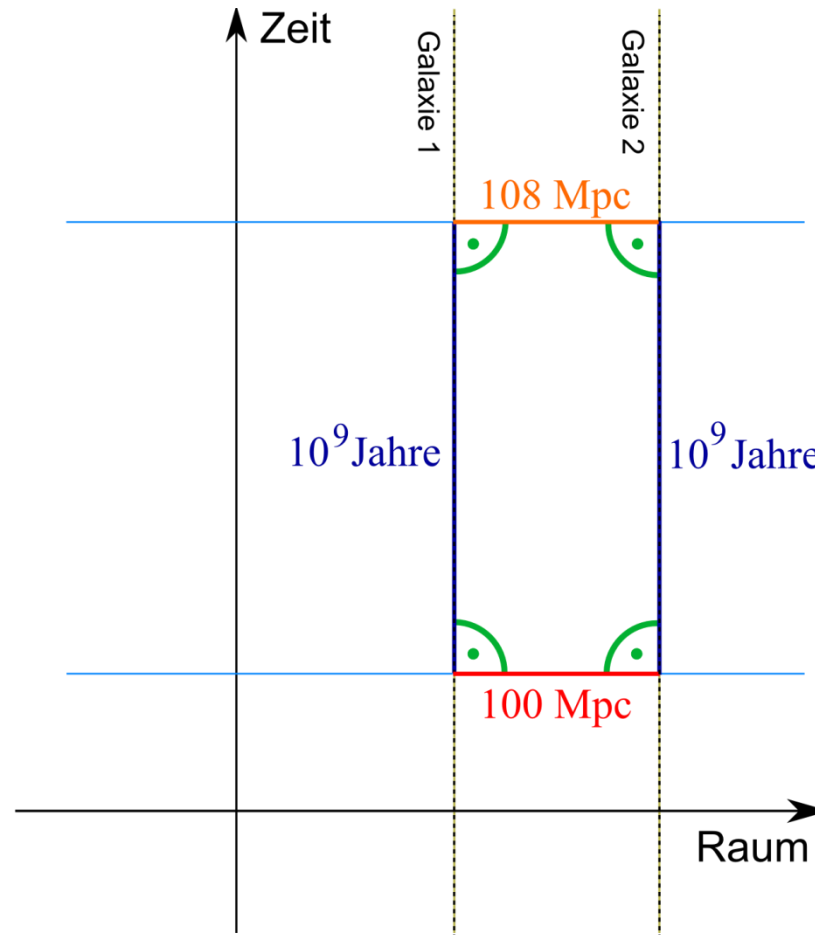
Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

---

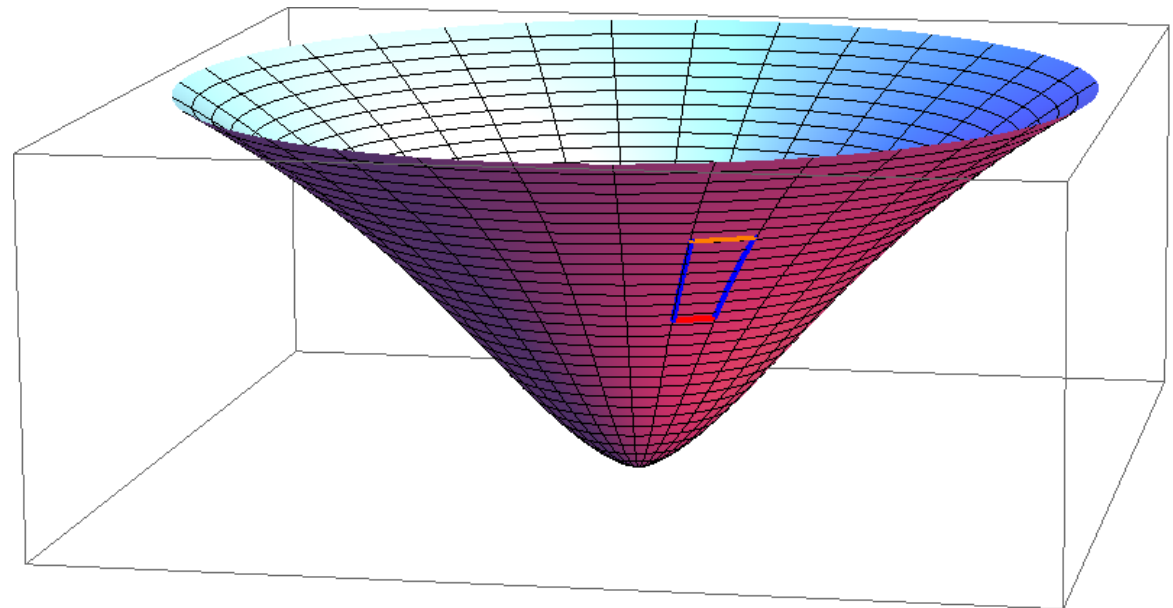
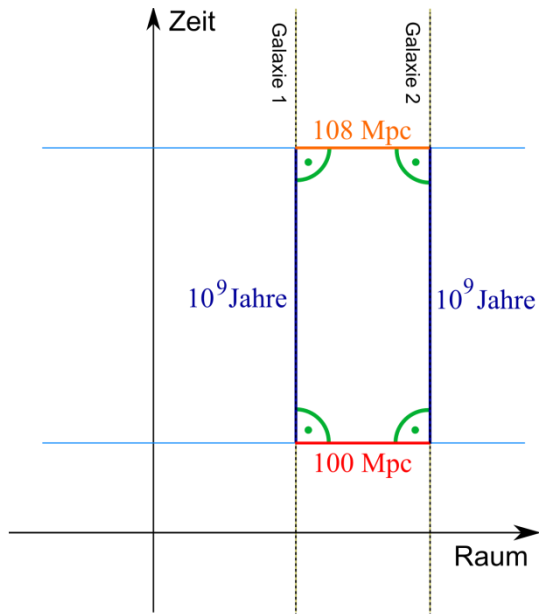
Was bedeutet das für die Raumzeit-Geometrie?



# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

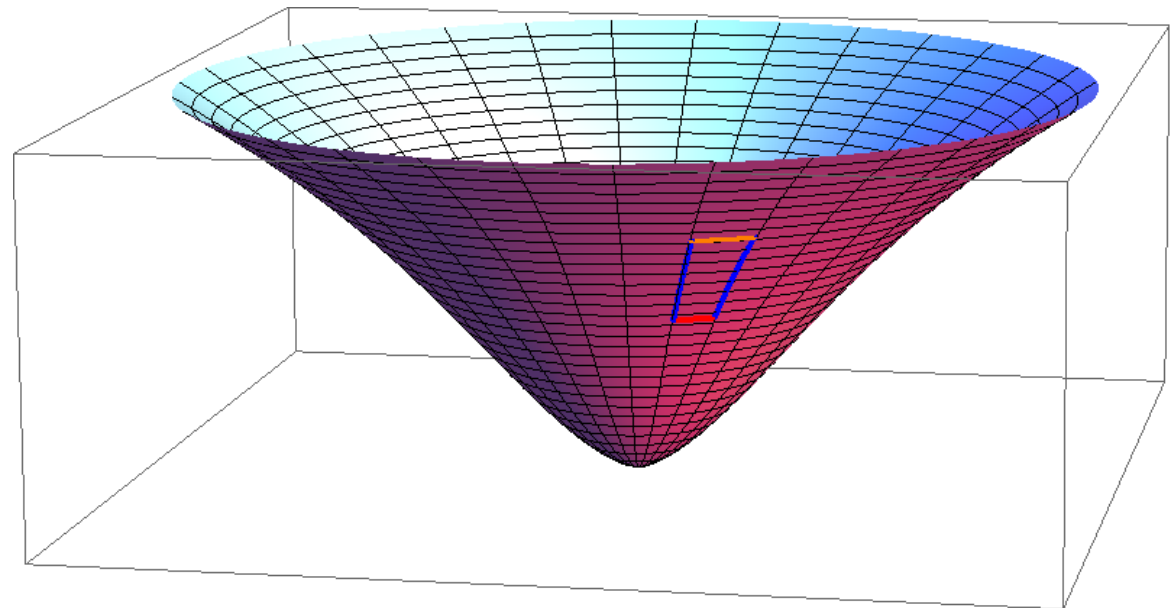
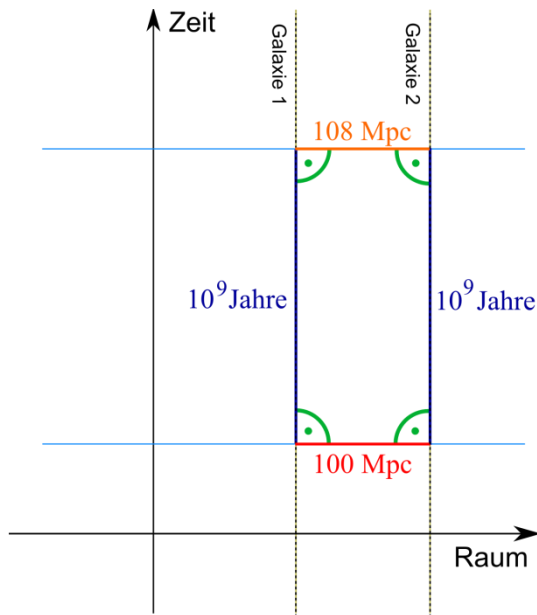
---

## 2D-Modell



# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

## 2D-Modell

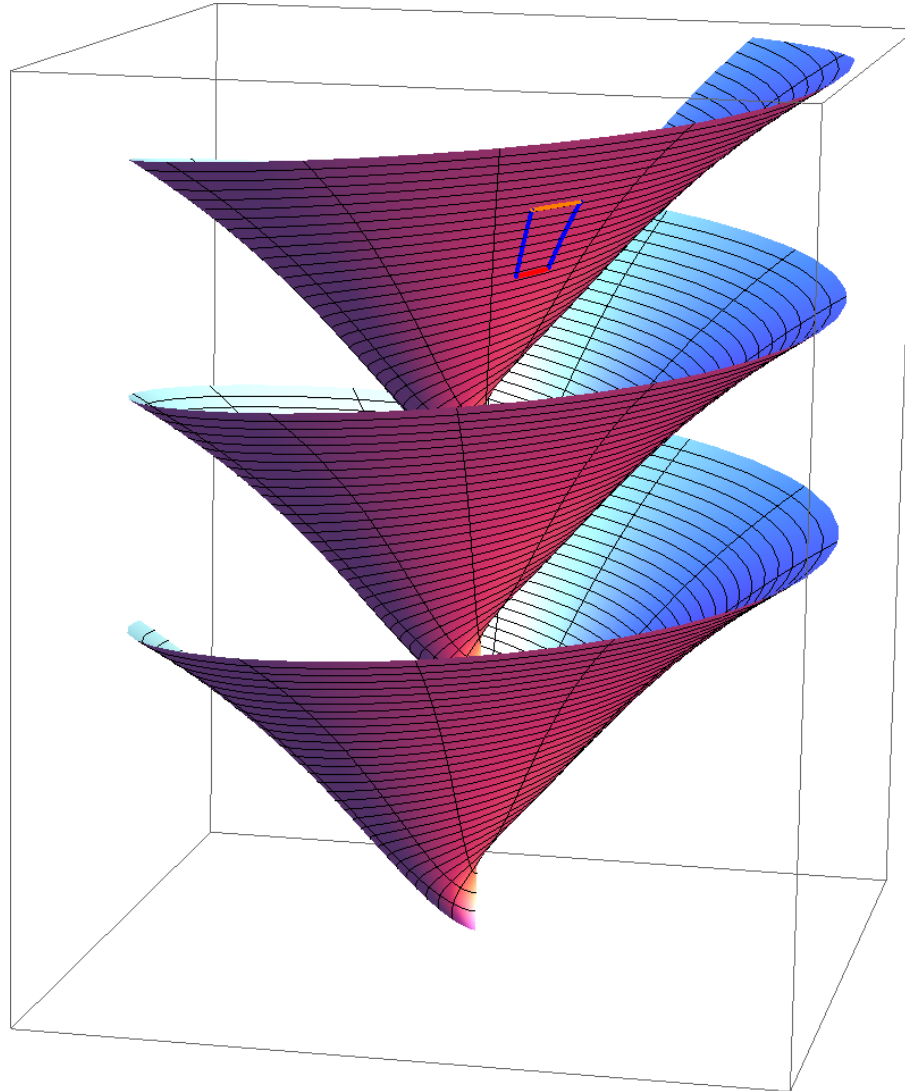


Problem: In diesem Modell wäre das Universum räumlich geschlossen!



# Raum-Zeit-Krümmung im expandierenden Universum

---



# Gravitationswellen

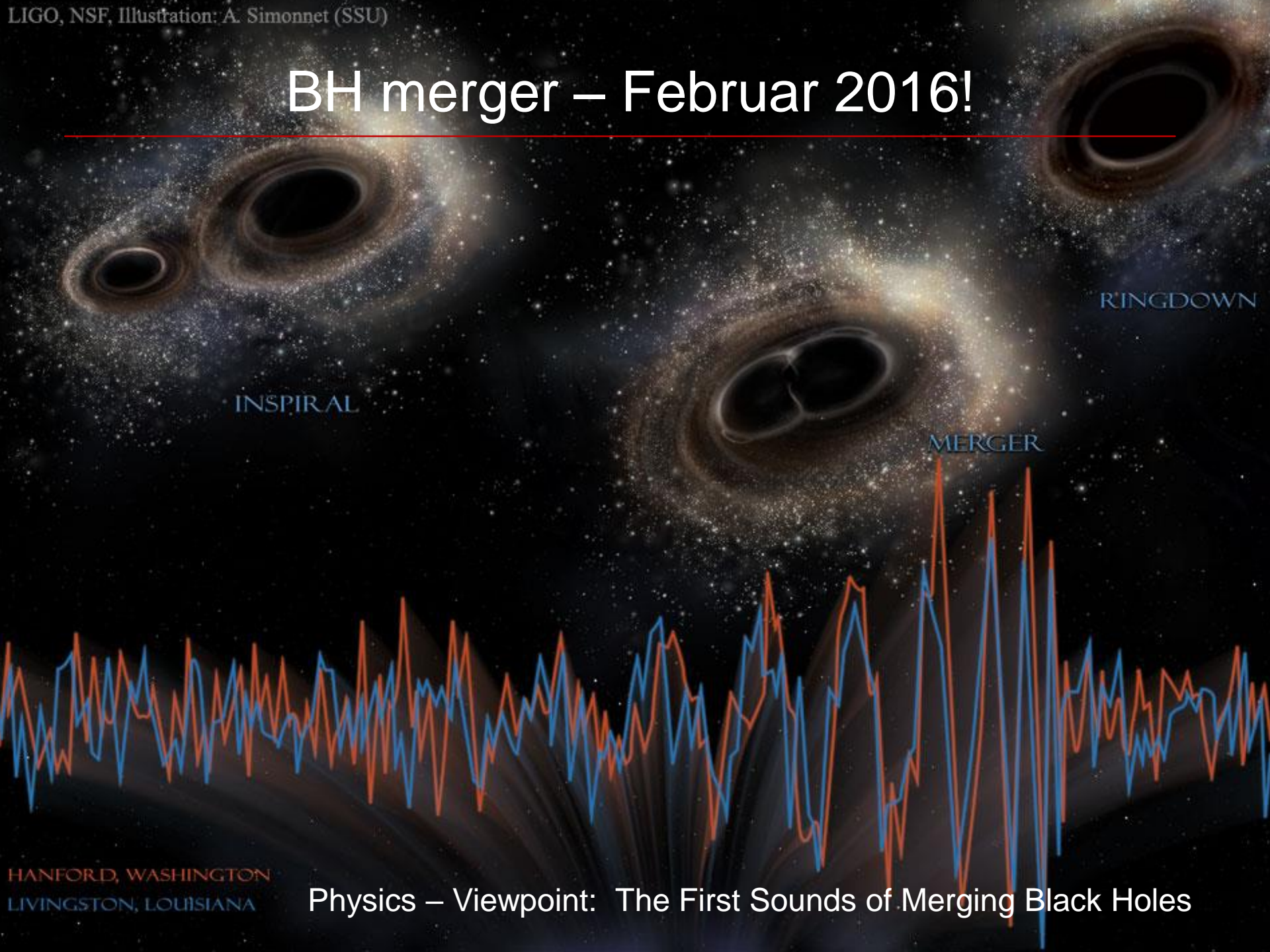
---



Gravitationswellen „kräuseln“ die Raumzeit

# BH merger – Februar 2016!

---



INSPIRAL

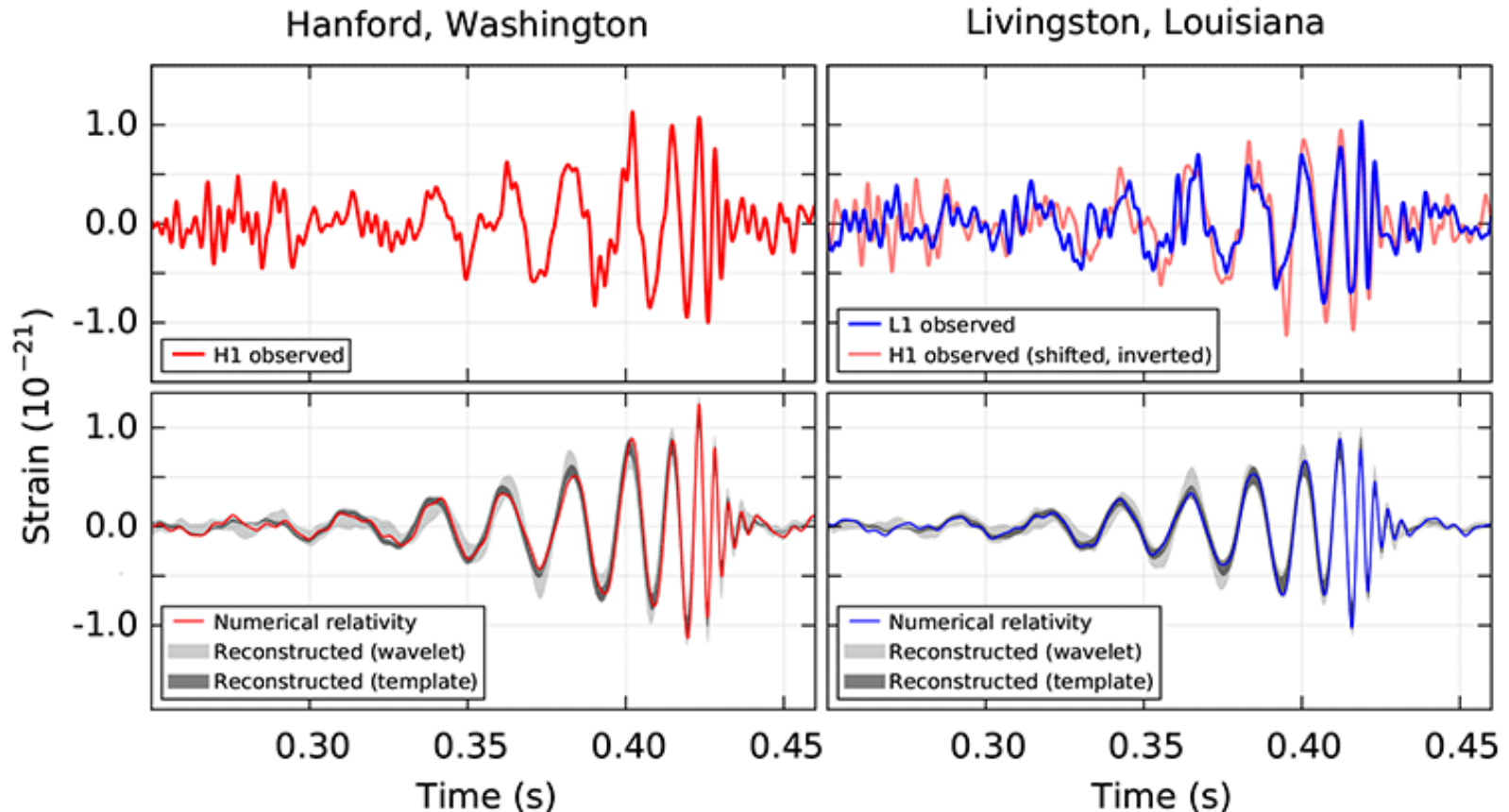
RINGDOWN

MERGER

HANFORD, WASHINGTON  
LIVINGSTON, LOUISIANA

Physics – Viewpoint: The First Sounds of Merging Black Holes

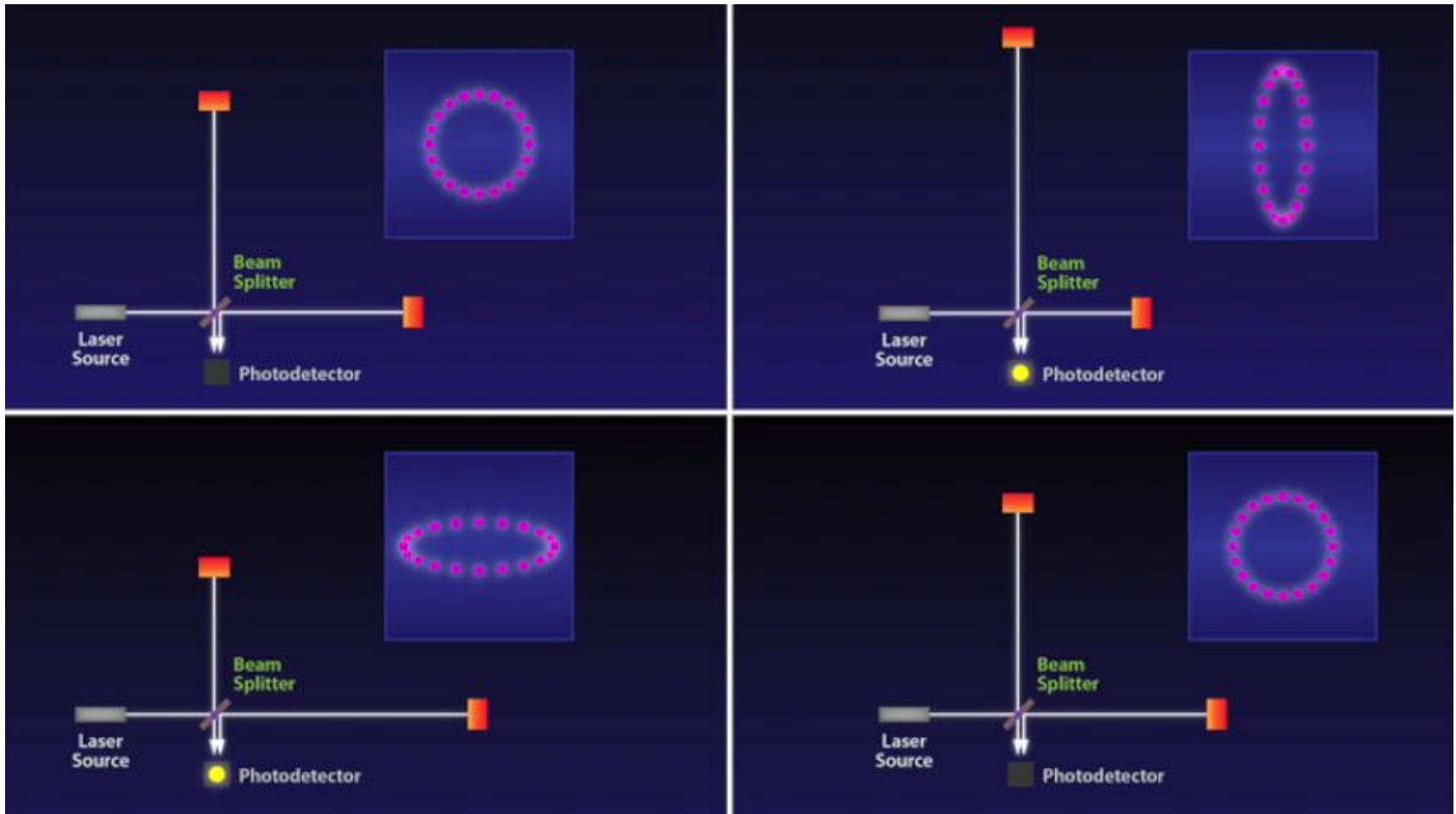
# BG merger – Februar 2016!



Physics – Viewpoint: The First Sounds of Merging Black Holes



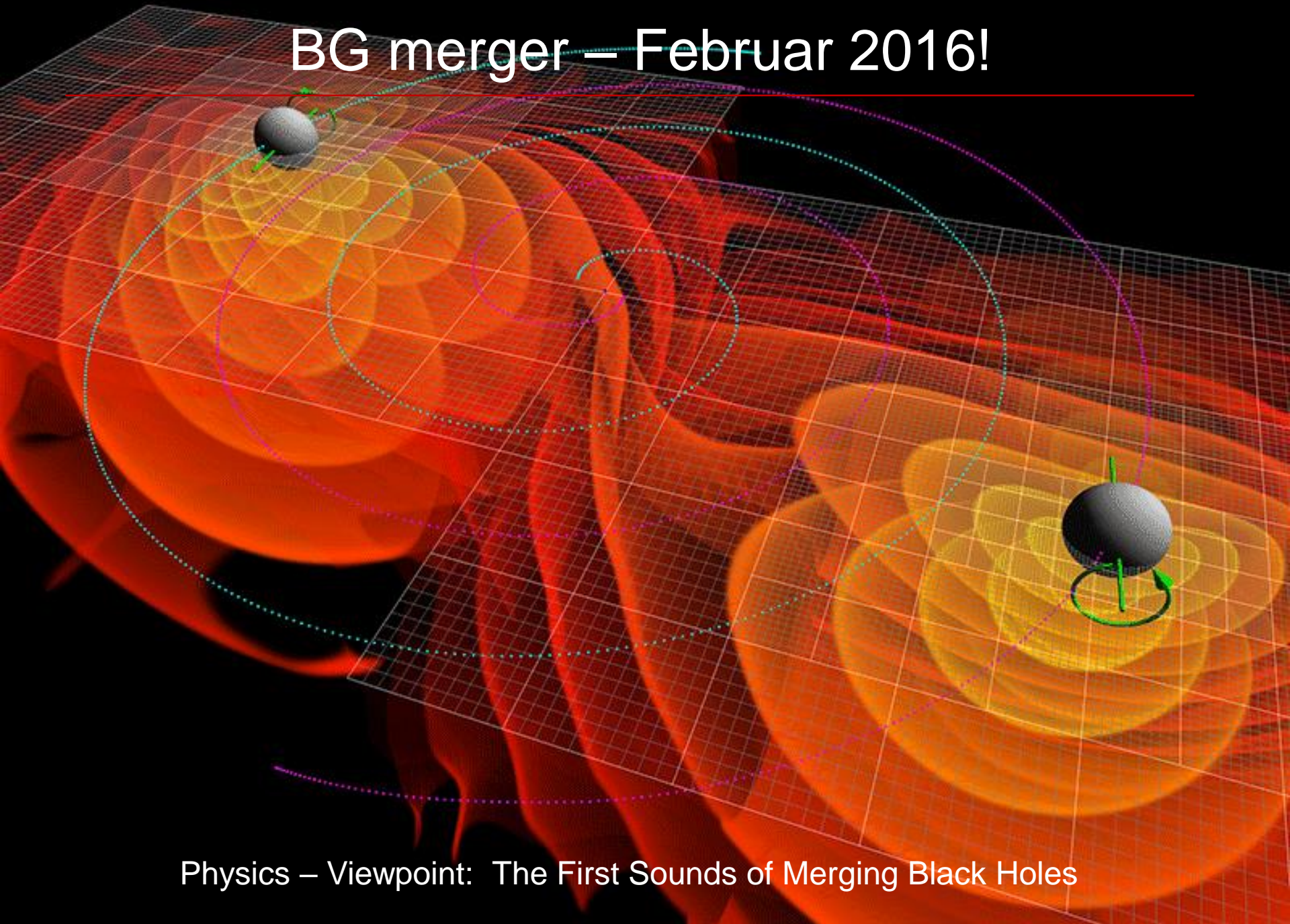
# BG merger – Februar 2016!



Physics – Viewpoint: The First Sounds of Merging Black Holes

# BG merger – Februar 2016!

---



Physics – Viewpoint: The First Sounds of Merging Black Holes

# Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

---

Diese Präsentation gibt's im Web unter

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/ARTundRaumzeitkruemmung/>

