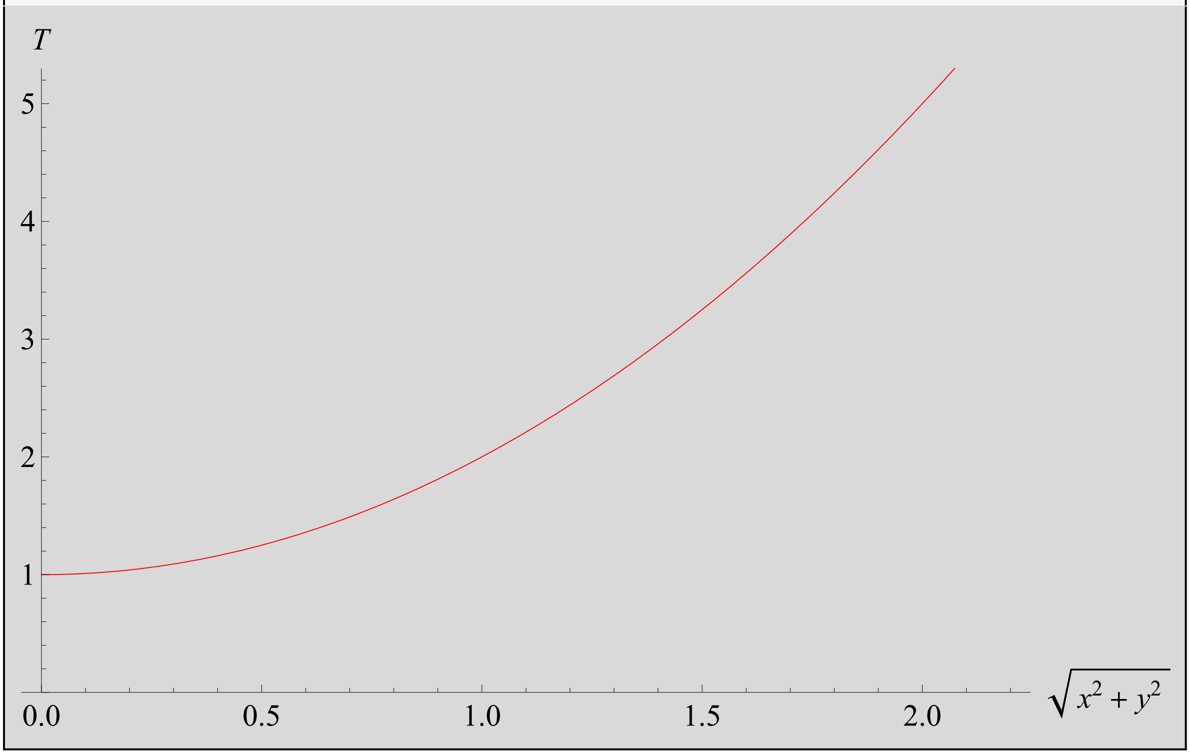
Wanze auf der heißen Ofenplatte
Berechnung

Koordinaten auf der Ofenplatte: x, y

Temperatur: Der Einfachheit halber sei die "Ofenplatte" in der Mitte kälter.

$$T(x, y) = 1 + x^2 + y^2$$

```
Plot[1 + abstand^2, {abstand, 0, 2.2}, PlotRange → {0, 5.3}, PlotStyle → Red,
 AxesStyle → 16, AxesLabel → {Sqrt[x^2 + y^2], T}, ImageSize → 600]
```



Wärmeausdehnung: 1 Wanzenmeter hat bei der Temperatur T die Länge (einfaches Modell)

$$L = \frac{1}{2}\, T.$$

Zwei nahe benachbarte Punke

$$A = (x,\ y)$$
$$B = (x + \mathrm{dx},\ y + \mathrm{dy}).$$

In der Nähe der beiden Punkte herrscht die Temperatur $T(x,\ y)$. Ein Wanzenmeter beträgt dort (in “von außen” betrachteter, konventioneller Länge ausgedrückt)

$$L = \frac{1}{2}\left(1 + x^2 + y^2\right).$$

Die Wanze misst die Entfernung zwischen A und B: Die Entfernung beträgt n Wanzenmeter, wenn

$$n\, L = \sqrt{\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2}\,,$$

daher

$$\frac{n}{2}\left(1 + x^2 + y^2\right) = \sqrt{\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2}$$
$$\Rightarrow \quad n \;=\; \frac{2}{1+x^2+y^2}\sqrt{\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2}$$

Das Quadrat der von der Wanze gemessenen Entfernung zwischen A und B beträgt daher

$$ds^2 = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

Das ist die Metrik eines “gekrümmten Raumes”!

Ü b e r r a s c h u n g :

Diese Geometrie ist genau die Geometrie der Einheitssphäre! (So könnte die Geometrie auf der Einheitssphäre *definiert* werden!)

Nordpol: $x = y = 0$
Äquator: $x^2 + y^2 = 1$
Südpol: $x^2 + y^2 \to \infty$

Betrachten wir einen “Kreis” mit Mittelpunkt Nordpol:

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{(“Kreisgleichung”)}$$

Achtung! *a* ist nicht sein Radius!

Sein Radius (gemessen bei $y = 0$):

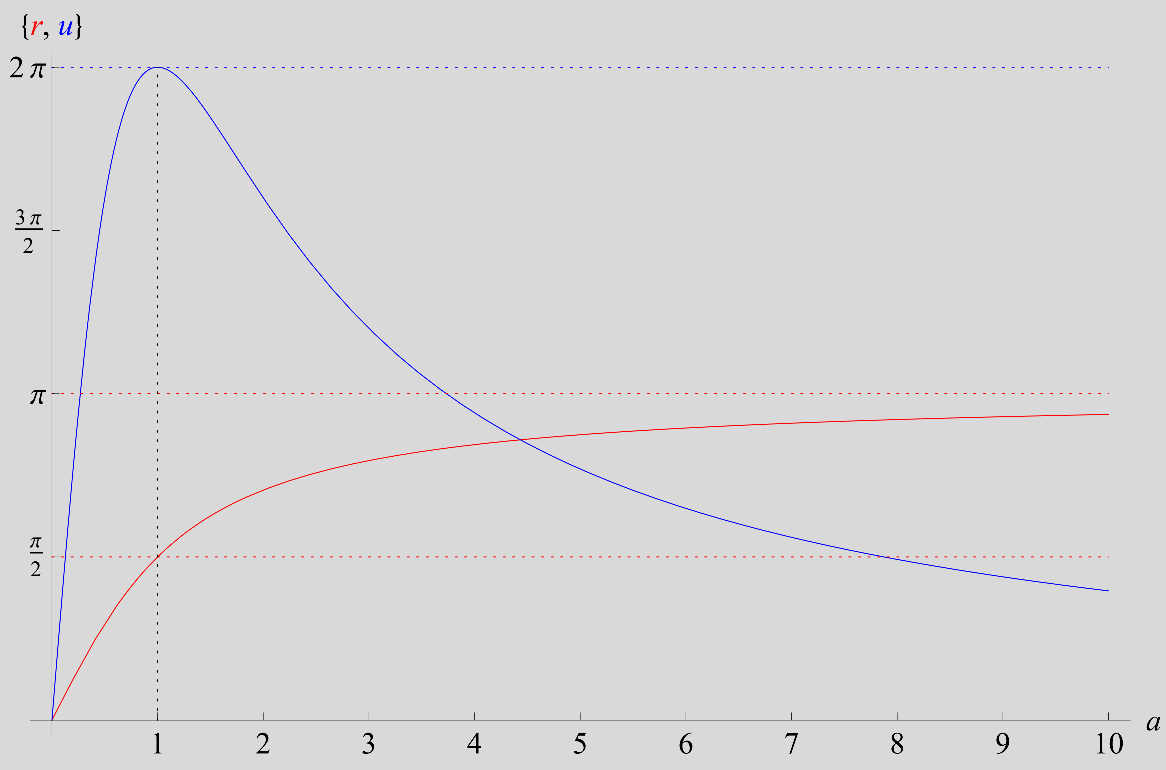
$$r = \int \mathrm{ds}\,|_{y=0} = \int_0^a \mathrm{dx}\,\frac{2}{1+x^2} = 2\,\mathrm{atan}(a)$$

Sein Umfang:

$$u = \int \mathrm{ds}\,|_{x^2+y^2=a^2} = \frac{2}{1+a^2} \cdot 2\,\pi\,a = \frac{4\,\pi\,a}{1+a^2}$$

Plot von *r* und *u* als Funktion von *a*:

```
Show[Plot[{2 ArcTan[a], 4 π a/(1 + a^2), π/2, π, 2 π},
  {a, 0, 10}, Ticks → {Range[10], π/2 Range[4]},
  PlotStyle → {Red, Blue, {Red, Dotted}, {Red, Dotted}, {Blue, Dotted}},
  AxesStyle → 16, AxesLabel → {a, {Style[r, Red], Style[u, Blue]}},
  ImageSize → 600], Graphics[{Dotted, Line[{{1, 0}, {1, 2 π}}]}]]
```



x und *y* sind lediglich etwas ungewöhnliche Koordinaten auf der Sphäre!

Einbettung in den 3-dimensionalen euklidischen Raum: Definiere Koordinaten

$$\xi = \frac{2\,x}{1+x^2+y^2}$$

$$\eta = \frac{2\,y}{1+x^2+y^2}$$

$$\zeta = \frac{1-x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

In diesen Koordinaten ist

$$\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\zeta^2 = \frac{4}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\left(\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2\right) \equiv \mathrm{ds}^2$$

$$\mathtt{Dt}\left[\frac{2\,x}{1+x^2+y^2}\right]^2 + \mathtt{Dt}\left[\frac{2\,y}{1+x^2+y^2}\right]^2 + \mathtt{Dt}\left[\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right]^2 \; // \; \mathtt{Simplify}$$

$$\frac{4\left(\mathtt{Dt}[x]^2 + \mathtt{Dt}[y]^2\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

Plot der eingebetteten Geometrie:

```
Show[ParametricPlot3D[{2 x/(1 + x^2 + y^2), 2 y/(1 + x^2 + y^2), (1 - x^2 - y^2)/(1 + x^2 + y^2)},
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, RegionFunction → Function[{x, y}, x^2 + y^2 < 25],
  Ticks → {{-1, 1}, {-1, 1}, {-1, 1}},
  PlotRange → {{-1.05, 1.05}, {-1.05, 1.05}, {-1.05, 1.05}},
  AxesLabel → {ξ, η, ζ}, AxesStyle → 20, ImageSize → 550, PlotPoints → 100],
 Graphics3D[{PointSize[.02], Point[{0, 0, 1}]}]]
```