Konzept der Metrik in der SRT
(Minkowski-Metrik)

Ereigniskoordinaten: $(c\,t, x, y, z)$

Zwei Ereignisse:

$$E_1 = (c\,t, x, y, z)$$
$$E_2 = (c\,(t + \mathrm{dt}), x + \mathrm{dx}, y + \mathrm{dy}, z + \mathrm{dz})$$

Raumzeitliches "Abstandsquadrat"
(Minkowski-Metrik):

$$\mathrm{ds}^2 = c^2\,\mathrm{dt}^2 - \mathrm{dx}^2 - \mathrm{dy}^2 - \mathrm{dz}^2$$

Invarianz-Eigenschaft:

- ds^2 hat in jedem Inertialsystem den gleichen Wert ("Invariante")

$$c^2\,\mathrm{Dt}[t]^2 - \mathrm{Dt}[x]^2 - \mathrm{Dt}[y]^2 - \mathrm{Dt}[z]^2\ /.$$
$$\left\{t \to \frac{\mathrm{tneu} - \frac{v}{c^2}\,\mathrm{xneu}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ x \to \frac{\mathrm{xneu} - v\,\mathrm{tneu}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ y \to \mathrm{yneu},\ z \to \mathrm{zneu}\right\}\ /.$$
$$\{\mathrm{Dt}[c] \to 0,\ \mathrm{Dt}[v] \to 0\}\ //\ \mathrm{Simplify}$$

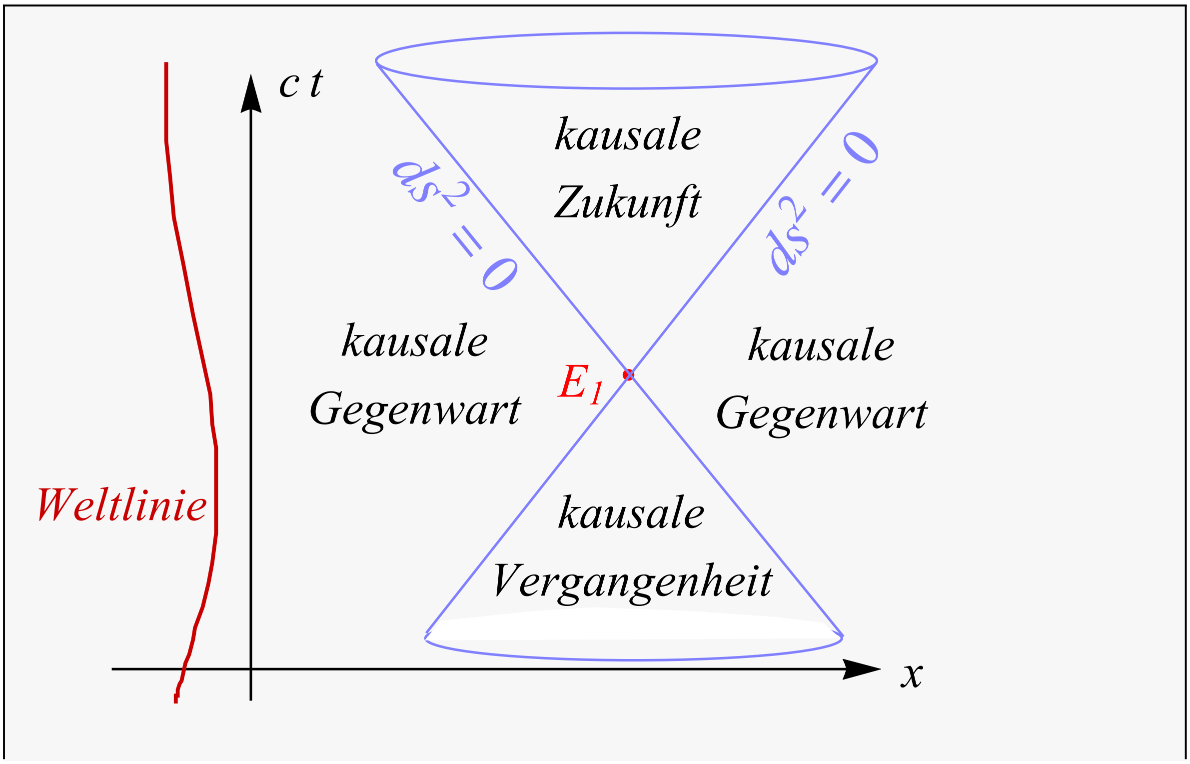
$$c^2\,\mathrm{Dt}[\mathrm{tneu}]^2 - \mathrm{Dt}[\mathrm{xneu}]^2 - \mathrm{Dt}[\mathrm{yneu}]^2 - \mathrm{Dt}[\mathrm{zneu}]^2$$

Kausalstruktur der Raumzeit:

- $ds^2 > 0$, wenn E_1 und E_2 zueinander zeitartig sind.
  (Das frühere Ereignis kann das spätere mit Unterlichtgeschwindigkeit beeinflussen.)
  Bedeutung: $ds^2 = c^2 \text{ Eigenzeit}^2 \equiv c^2 d\tau^2$
  $$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) = dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$
  daher: $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ (Zeitdilatation!)

- $ds^2 < 0$, wenn E_1 und E_2 zueinander raumartig sind.
  (Die Ereignisse sind kausal getrennt. Die Begriffe “früher” und “später” hängen vom Inertialsystem ab.)
  Bedeutung: $ds^2 = \text{Eigenabstand}^2$

- $ds^2 = 0$, wenn E_1 und E_2 zueinander lichtartig sind.
  (Das frühere Ereignis kann das spätere beeinflussen, aber nur mit Lichtgeschwindigkeit.)
  Bedeutung: Entlang der Weltlinie eines Photons gilt $ds^2 = 0$ (Lichtkegelstruktur).



Kräftefreie Bewegungen:

■ Kräftefreie (gleichförmige) Bewegungen sind genau jene, für die die Eigenzeit $T = \frac{1}{c} \int ds$ maximal ist ("Geodäten"). Vergleiche Zwillingsparadoxon!