

Gleichungen, Ungleichungen, Unbekannte, Variable – Auffassungen angehender Lehrkräfte



Franz Embacher

Fakultät für Mathematik
der Universität Wien

Vortrag im Rahmen der 50. Jahrestagung der Gesellschaft der Didaktik der Mathematik
Pädagogische Hochschule Heidelberg, 11. März 2016

Hintergrund

Zwei Zugänge zu mathematischen Aufgabenstellungen:

- an den auftretenden **Objekten**, ihren Eigenschaften und Beziehungen und an der **Fragestellung** orientiert
- an **Handlungen** (Operationen, Lösungsverfahren) orientiert

Die beiden Zugänge bedingen einander, aber:

- eine **einseitige Betonung des operationalen Zugangs** führt dazu, dass eine Aufgabenstellungen vorschnell eine (Lösung-)Handlung „triggert“, bevor verstanden wird, worum es geht.

Die Frage

Ist das auch angehenden Lehrkräften bewusst?

Untersuchung

- Befragung von **58 Studierenden** des Lehramts Mathematik an der Universität Wien zum Thema „Gleichungen und Ungleichungen“
- in zwei Lehrveranstaltungen
 - Vorlesung „Außermathematische Anwendungen im Mathematikunterricht“ (42 Studierende, Sem: 7 ± 3)
 - Seminar: „Seminar zur Unterrichtsplanung“ (16 Studierende, Sem: 8 ± 1)
- im Jänner 2015
- 5 Fragen mit offenem Antwortformat
- 15 Minuten Zeit

Befragungstext

1. Sind Ihrer Meinung nach beim Lösen von

$$x + 3 = 8 \quad (1)$$

und

$$x + 3 > 8 \quad (2)$$

durch SchülerInnen grundsätzlich die gleichen kognitiven Anforderungen oder grundsätzlich unterschiedliche kognitive Anforderungen gefordert?
Bitte schreiben Sie Ihre Gedanken dazu auf!

Befragungstext

2. Wie helfen Sie einem Schüler der **Unterstufe**,
der die Aufgabenstellung

„löse $2x + 3 = 6 - x$ “

nicht verstanden hat?

Sagen Sie ihm kurz und prägnant, worum es bei
dieser Aufgabenstellung geht!

Befragungstext

2. Wie helfen Sie einem Schüler der **Unterstufe**,
der die Aufgabenstellung

„löse $2x + 3 = 6 - x$ “

nicht verstanden hat?

Sagen Sie ihm kurz und prägnant, **worum es bei
dieser Aufgabenstellung geht!**

Die Studierenden waren frei, die Bedeutung dieser Formulierungen selbst zu interpretieren und ihre Antwort in ihren eigenen Worten zu formulieren.

Befragungstext

3. Wie helfen Sie einer Schülerin der **Unterstufe**, die die Aufgabenstellung

„löse $2x + 3 > 6 - x$ “

nicht verstanden hat?

Sagen Sie ihr kurz und prägnant, worum es bei dieser Aufgabenstellung geht!

Befragungstext

4. Wie helfen Sie einem Schüler der **Oberstufe**,
der die Aufgabenstellung

$$\text{„löse } x^2 - 5x + 6 = 0\text{“}$$

nicht verstanden hat?

Sagen Sie ihm kurz und prägnant, worum es bei
dieser Aufgabenstellung geht!

Befragungstext

5. Wie helfen Sie einer Schülerin der **Oberstufe**, die die Aufgabenstellung

„löse $x^2 + x + 1 > 0$ “

nicht verstanden hat?

Sagen Sie ihr kurz und prägnant, worum es bei dieser Aufgabenstellung geht!

Auswertungsraster

Binärer Auswertungsraster (Ja = 1, Nein = 0)

- Frage 1
 - a. Gibt der/die Befragte an, dass es **einen** wesentlichen Unterschied in den kognitiven Anforderungen gibt?
 - b. Gibt der/die Befragte an, dass es **keinen** wesentlichen Unterschied in den kognitiven Anforderungen gibt?
 - c. Wird **lediglich** auf operationale Unterschiede eingegangen?
 - d. Wird der **Unterschied**
 - lineare Gleichung: eine Zahl (Unbekannte) gesucht
 - lineare Ungleichung: Menge von Zahlen gesuchtzum Ausdruck gebracht?
 - e. Werden Begriffe wie „Unbekannte“, „Platzhalter“ oder „Lösung(en)“ in korrekter Weise **verwendet**?

Auswertungsraster

- **Frage 2**
 - a. Bringt der/die Befragte **lediglich** operationale Aspekte des Lösungsverfahrens zum Ausdruck, interpretiert also „worum es geht“ in dieser Weise?
 - b. Gibt der/die Befragte **ausdrücklich** an, dass es gilt, eine (zunächst unbekannte) Zahl zu finden?
- **Frage 3**
 - a. wie Frage 2
 - b. analog zu Frage 2: ...mehrere (viele) Zahlen (eine Menge von Zahlen) zu finden und anzugeben?
- **Frage 4**

analog ... mehrere (maximal 2) Zahlen finden
- **Frage 5**

analog ... mehrere (viele) Zahlen (eine Menge von Zahlen) finden

Gesamtscore

$$\begin{aligned} \text{score} &= 1a - 1b - 1c + 1d + 1e \\ &\quad - 2a + 2b \\ &\quad - 3a + 3b \\ &\quad - 4a + 4b \\ &\quad - 5a + 5b \\ &\quad + 6 \end{aligned}$$

- kann Werte zwischen **0** und **12** annehmen
- stellt einen Versuch dar, die Auffassungen der Studierenden auf einer Skala zwischen

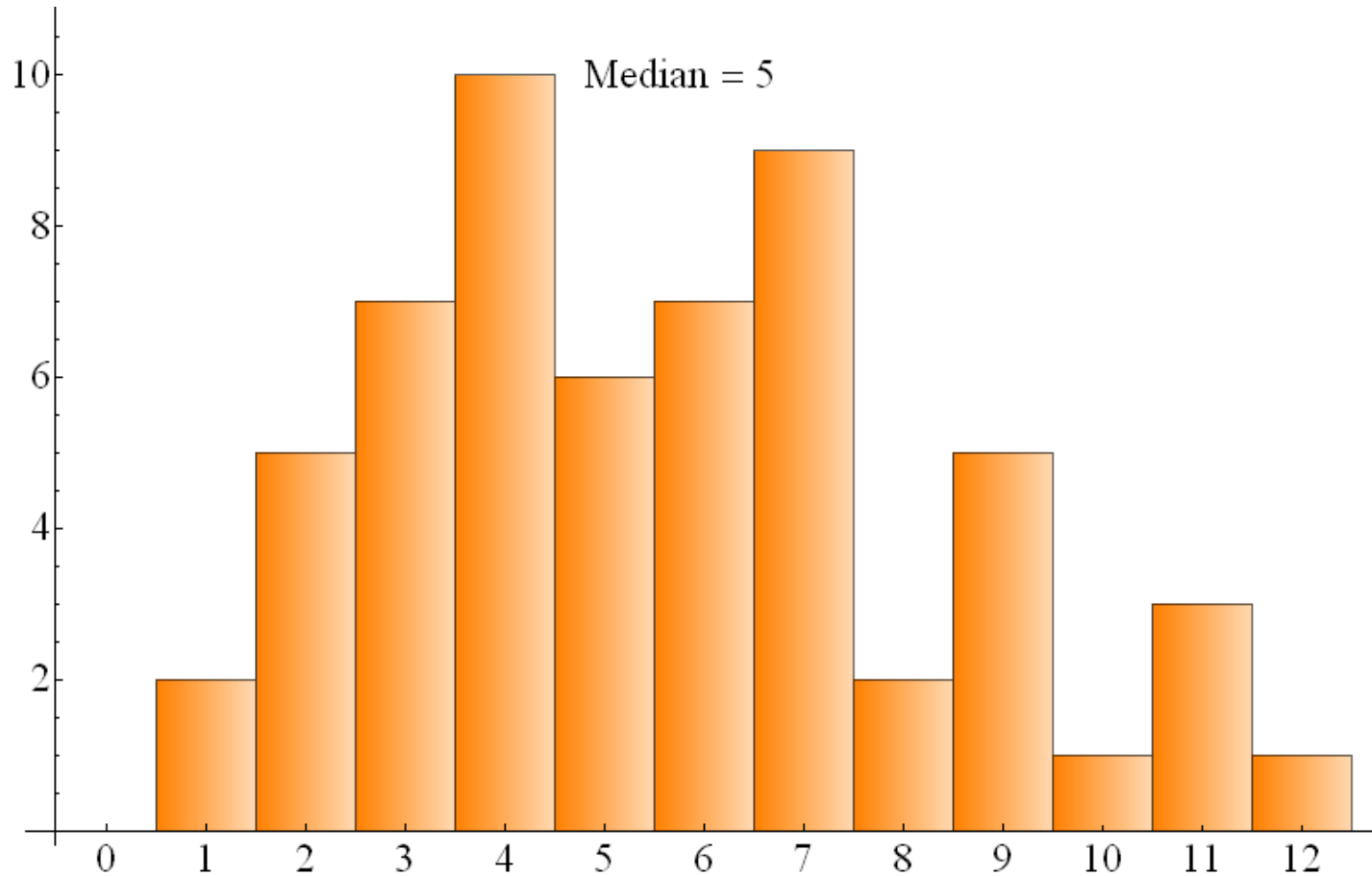
objekt- und verstehensorientiert (hoher Score)

verfahensorientiert (niedriger Score)

anzusiedeln.

Ergebnisse

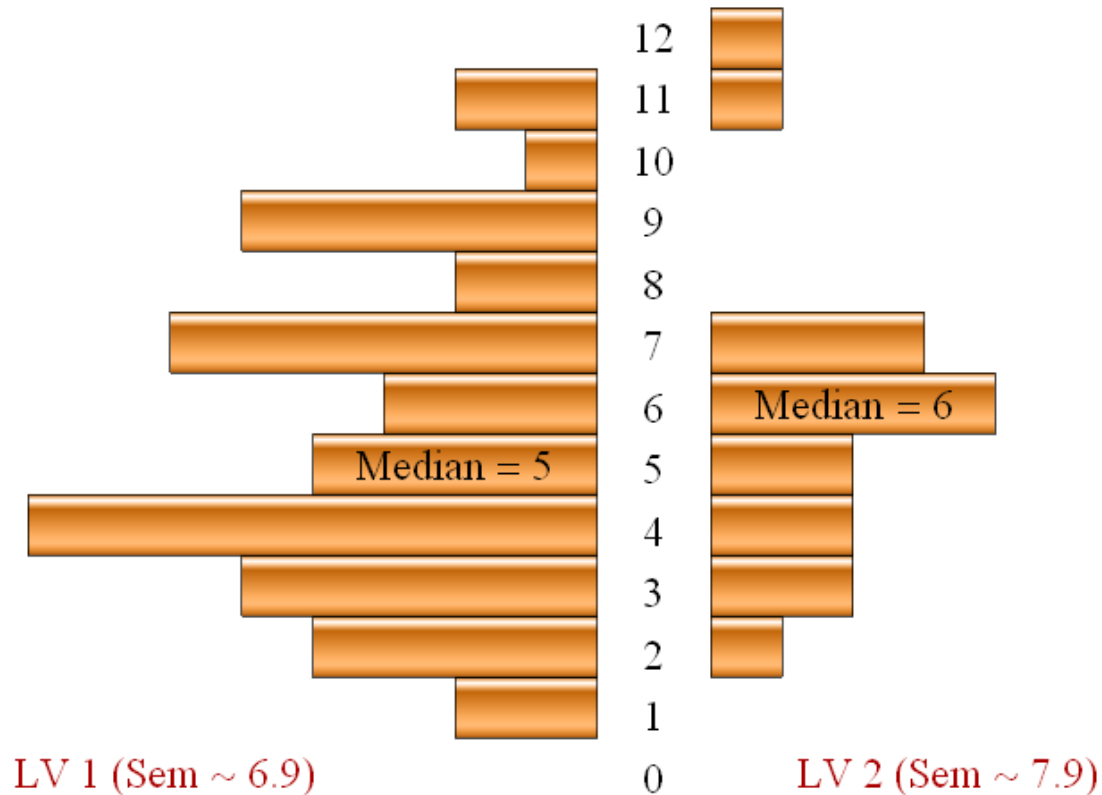
Verteilung der Gesamtscores:



Überhang des verfahrensorientierten Zugangs!

Ergebnisse

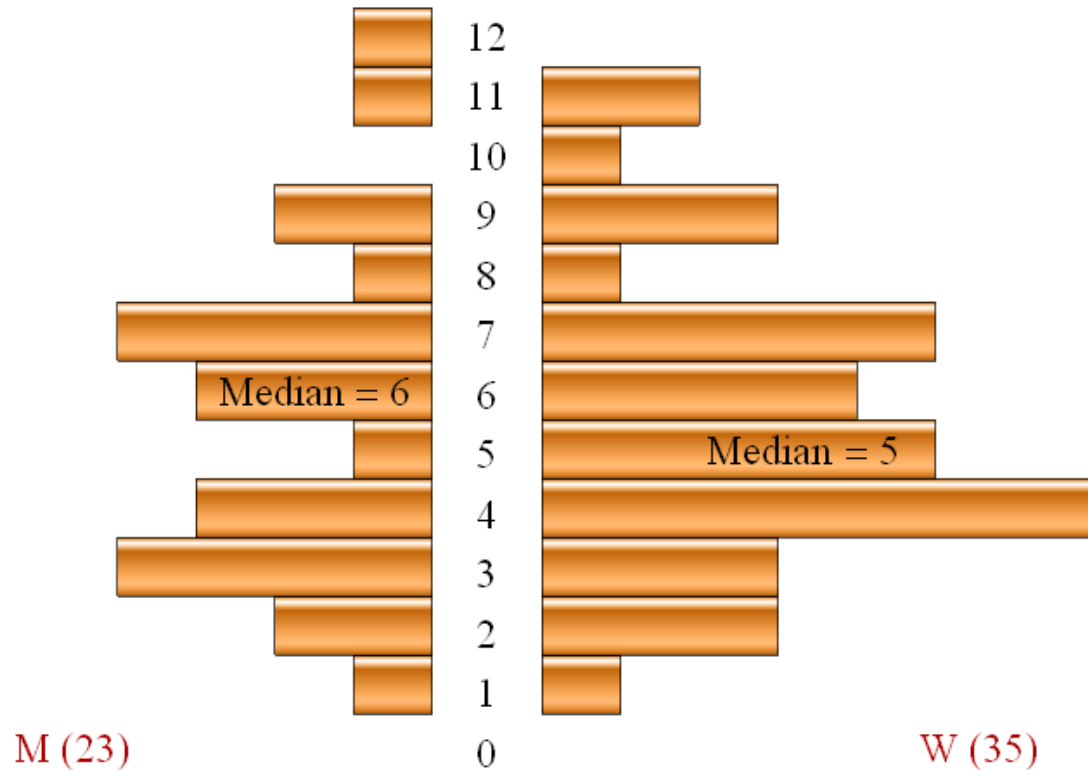
Gesamtscores nach Lehrveranstaltung:



Moderat höherer Score bei den älteren Studierenden.

Ergebnisse

Gesamtscores nach Geschlecht:



Moderat höherer Score bei männlichen Studierenden.

Ergebnisse

Einzelergebnisse:

- **36%** der Befragten bei Frage 1: **kein** wesentlicher Unterschied in den kognitiven Anforderungen beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen
- Nur **31%** der Befragten erwähnen bei Frage 1 den entscheidenden **Unterschied** beim Lösen einer linearen Gleichung (Zahl gesucht) und einer linearen Ungleichung (Menge von Zahlen gesucht).
- **20%** der Befragten gehen bei Frage 1 **lediglich** auf operationale Unterschiede beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen ein (vor allem auf dem Umgang mit dem Ungleichheitszeichen bei Äquivalenzumformungen).
- Nur **12%** der Befragten verwenden bei Frage 1 Begriffe wie „Unbekannte“, „Platzhalter“ oder „Lösung“ in korrekter Weise.

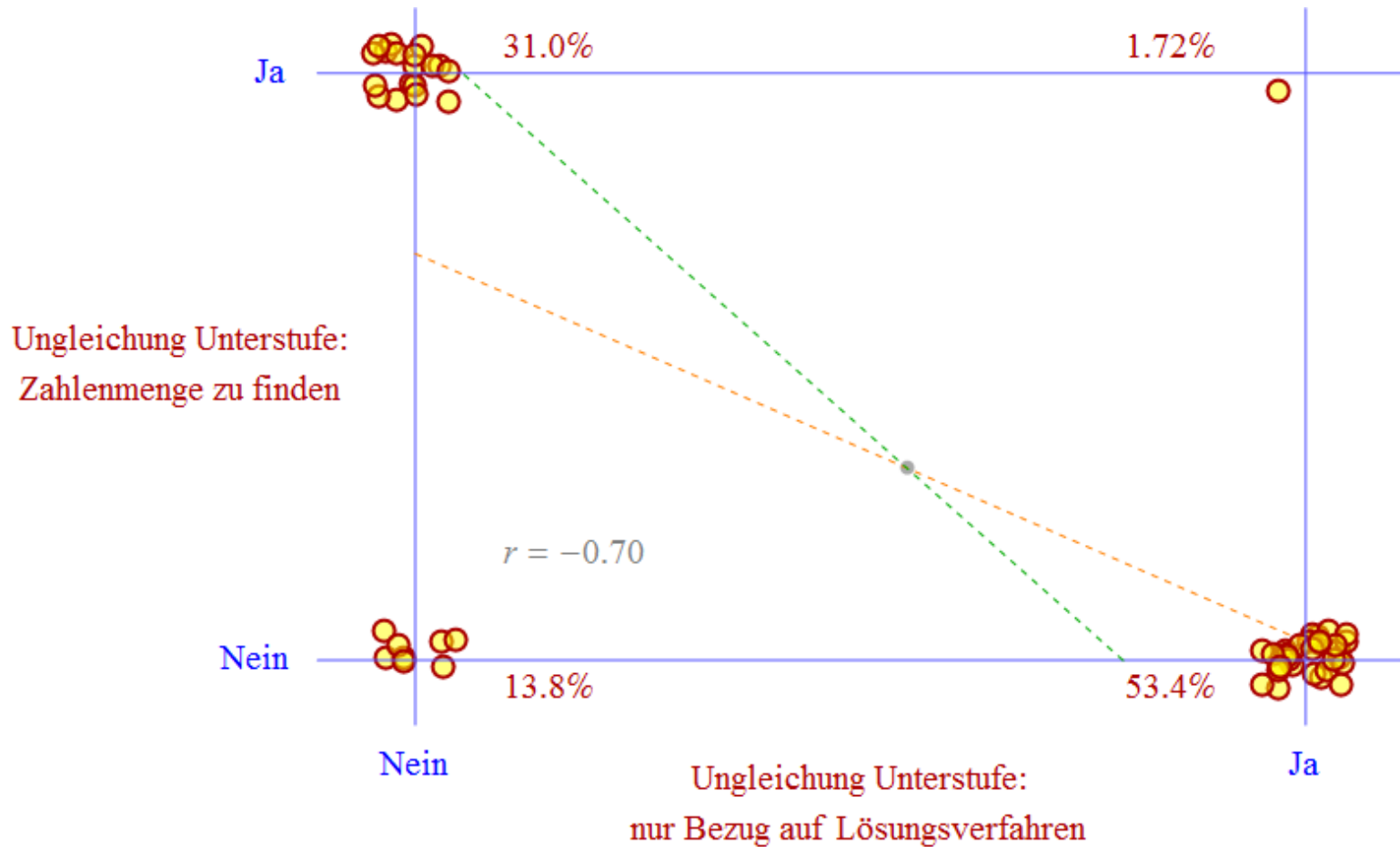
Ergebnisse

Einzelergebnisse:

- Fragen 2 – 5: viele Befragte geben **lediglich eine auf ein Lösungsverfahren bezogene Antwort**:
 - Frage 2 (Gleichung Unterstufe): 41%
 - Frage 3 (Ungleichung Unterstufe): 55%
 - Frage 3 (Gleichung Oberstufe): 59%
 - Frage 4 (Ungleichung Oberstufe): 50%
- Fragen 2 – 5: nur ein Teil der Befragte gibt an, **was eigentlich gesucht ist**:
 - Frage 2 (Gleichung Unterstufe): 52%
 - Frage 3 (Ungleichung Unterstufe): 33%
 - Frage 3 (Gleichung Oberstufe): 26%
 - Frage 4 (Ungleichung Oberstufe): 29%
- Nur 7% geben bei **beiden** Oberstufenaufgaben (Fragen 4 und 5) einen Hinweis, **was eigentlich gesucht ist**.

Ergebnisse

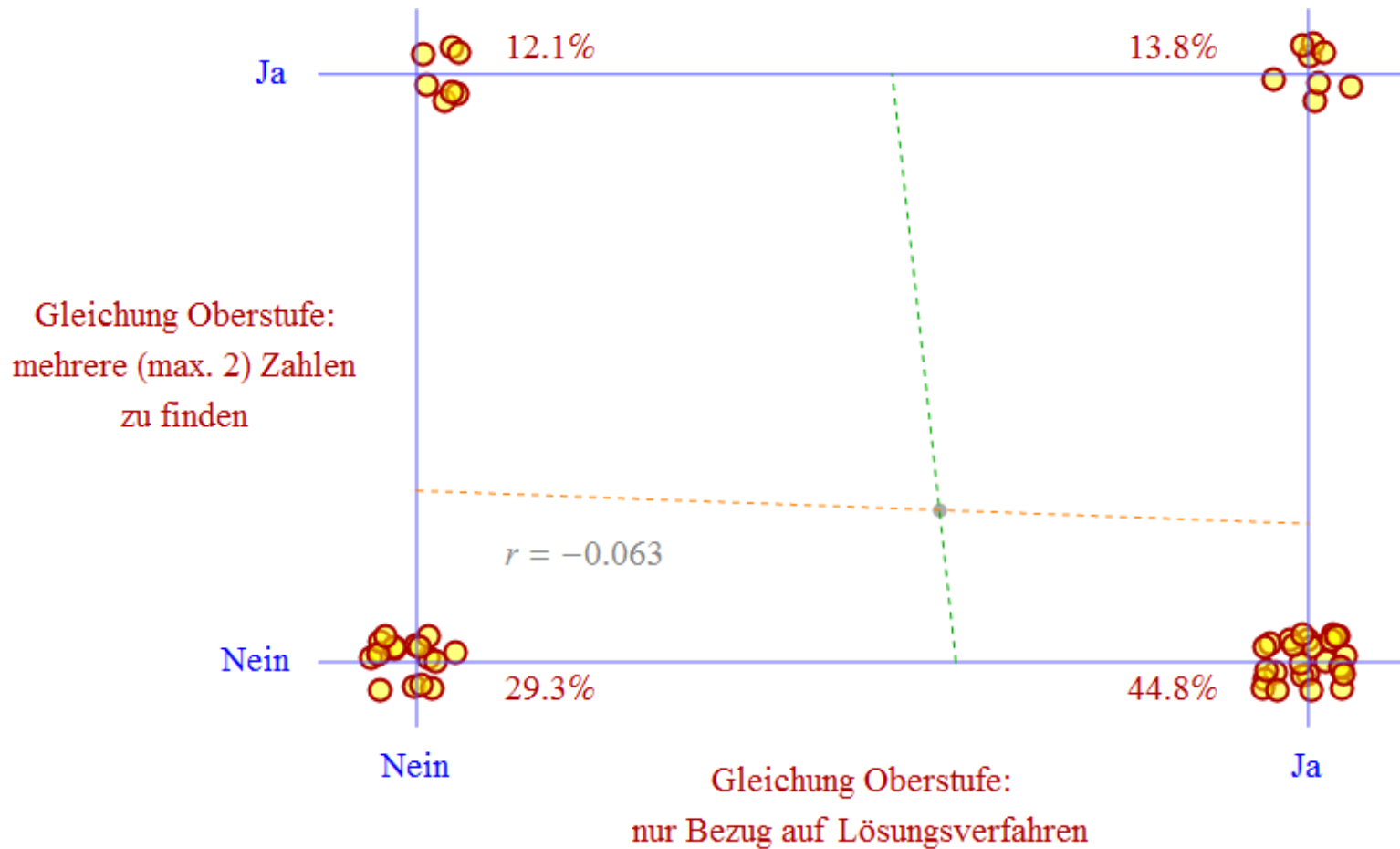
Korrelation 3a/3b (Ungleichung Unterstufe):



53% argumentieren nur operational, ohne Hinweis, was gesucht ist!

Ergebnisse

Korrelation 4a/4b (Gleichung Oberstufe):



Nur 12% geben an, was gesucht ist und argumentieren nicht rein operational.

Diskussion

Fragen:

- Sind diese Ergebnisse alarmierend?
- Wird die zentrale Reifeprüfung (in Österreich) mittelfristig daran etwas ändern?

Diplomarbeit von Valentin Parzer (2015): In den (vor dem ersten offiziellen Zentralmatura-Termin veröffentlichten) Beispielaufgaben ist der objektorientierte Zugang stärker vertreten als in Schulbüchern.

- Besteht Handlungsbedarf in der Lehramts-Ausbildung?

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Diese Präsentation (und weitere Details)
finden sie am Web unter

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/MatheDidaktik/GDM2016/>

