Wie (gut) bereitet der schulische Mathematikunterricht auf Hochschule/Universität vor?

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik
der Universität Wien

Vortrag im Rahmen des fachdidaktischen Kolloquiums *Probleme des Mathematikunterrichts*
30. April 2014

Inhalt

- Wozu gibt es einen Mathematikunterricht an AHS und BHS?
- Probleme des Übergangs

  Schule → weiterführende Ausbildung
- Zwei Ist-Erhebungen (aus dem österreichischen Umfeld)
- Impressionen
- Vermutungen und Spekulationen
- Auswege?

Wozu Mathematikunterricht an AHS und BHS?

- Höhere mathematische Alltagskompetenzen

  (Kritikfähigkeit beim Interpretieren von Statistiken, Kommunikation mit ExpertInnen,...)

- Vorbereitung auf Studien/Berufe mit geringer Affinität zur Mathematik

  (Logik von Computerprogrammen und elektronischen Datenverarbeitungssystemen,...)

- Vorbereitung auf Studien/Berufe mit höherer Affinität zur Mathematik
  - technische und naturwissenschaftliche Fächer (Fachhochschulen und Universitäten), Mathematikstudium (Universitäten)
  - Lehramt für höhere Schulen (Universitäten)

Wozu Mathematikunterricht an AHS und BHS?

- Höhere mathematische Alltagskompetenzen

  (Kritikfähigkeit beim Interpretieren von Statistiken, Kommunikation mit ExpertInnen,…)

- Vorbereitung auf Berufe mit geringer Affinität zur Mathematik

  …erprogrammen und elektronischen …ssys…

- Vorbereitung auf Ber… Mathematik
  - technische und naturwissenschaftliche Fächer (Fachhochschulen und Universitäten), Mathematikstudium (Universitäten)
  - Lehramt für höhere Schulen (Universitäten)

Technische Anwendungen von Mathematik (Simulationen,…)

Mathematische Beschreibung von Forschungsgegenständen

Mathematische Theoriebildung

Vermittlung mathematischer Kompetenzen

Der Übergang Schule → weiterführende Ausbildung

- Weiterbildende Institutionen wollen an (gewissen) mathematischen Vorkenntnissen und Kompetenzen anknüpfen.
- Der Übergang ist für viele Studierende bekanntermaßen hart.
- Die geforderten Kompetenzen werden von den Studierenden oft nicht im gewünschten Ausmaß mitgebracht.
- Diese sich daraus ergebenden Probleme werden von den weiterbildenden Institutionen in jüngster Zeit verstärkt wahrgenommen.

Der Übergang Schule → weiterführende Ausbildung

- Weiterbildende Institutionen wollen an (gewissen) mathematischen Vorkenntnissen und Kompetenzen anknüpfen.
- Der Übergang ist für viele Studierende bekanntermaßen hart.
- Die geforderten Kompetenzen werden von den Studierenden oft nicht im gewünschten Ausmaß mitgebracht.
- Diese sich daraus ergebenden Probleme werden von den weiterbildenden Institutionen in jüngster Zeit verstärkt wahrgenommen.

Der Übergang Schule → weiterführende Ausbildung

Neue Unterstützungsmaßnahmen, viele Szenarien:

- Vor- und Brückenkurse. Beispiele:
  - Warmup-Kurse an der Fachhochschule Technikum Wien (seit 2008)
  - Mathematik-Vorkurs für Studierende der Physik an der Universität Wien (seit Sommer 2013)
- Elektronische Lernsysteme. Beispiele:
  - (Neue) Blended-Learning-Plattform an der FH Technikum Wien [http://www.mathe.technikum-wien.at]
  - Math-Bridge [http://www.math-bridge.org]

Der Übergang Schule → weiterführende Ausbildung

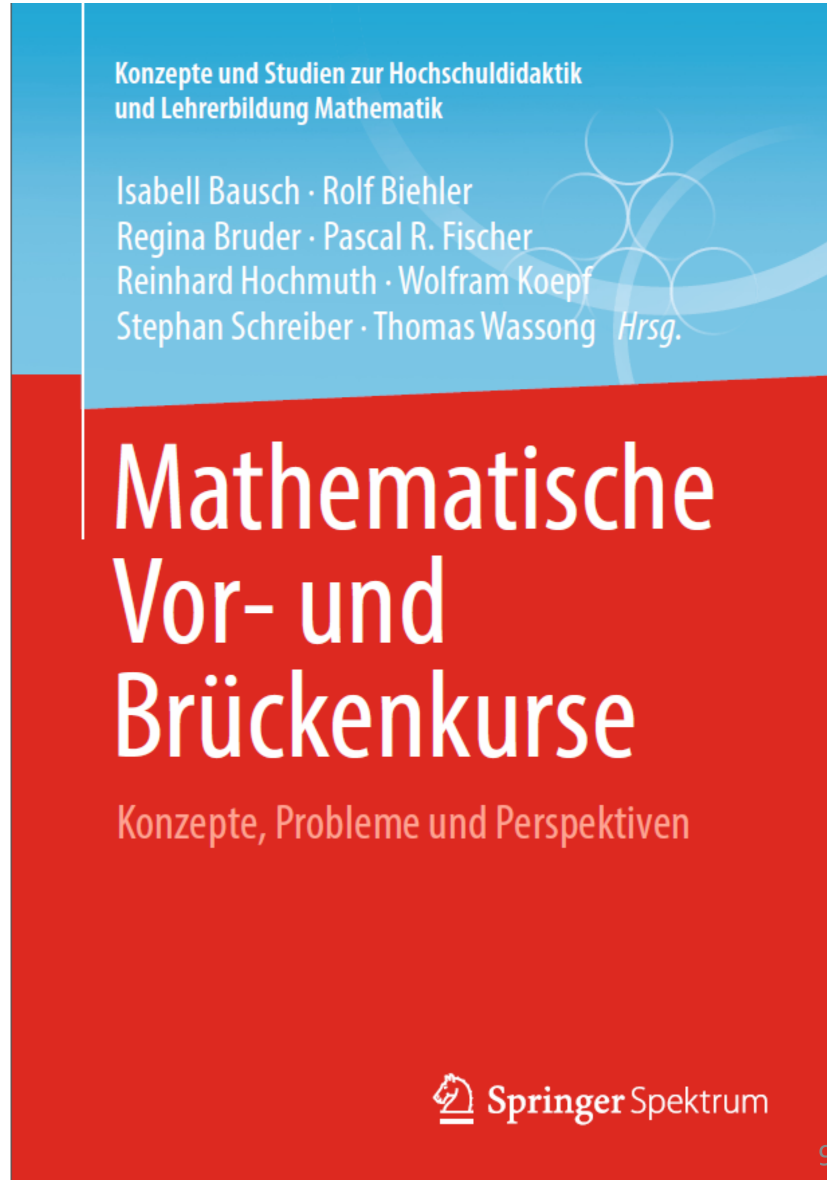
- Steigende Zahl an empirischen Untersuchungen und Publikationen
  - Ist-Stands-Erhebungen
  - Evaluationen von Fördermaßnahmen
  - Beschreibung qualitätssichernder Maßnahmen
  - Fachdidaktische Analysen von „Präkonzepten" („Fehlvorstellungen") in weiterführenden mathematischen Bereichen
- Es entsteht eine „Community" (v. a. aus Forschenden und Lehrenden) um diese Themen
- Konferenzen im deutschsprachigen Bereich

Der Übergang Schule → weiterführende Ausbildung

- Tagungsband: Kassel 2011

  Isabell Bausch, Rolf Biehler, Regina Bruder, Pascal Fischer, Reinhard Hochmuth, Wolfram Koepf, Stephan Schreiber, Thomas Wassong (Hrsg.): *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven* (Springer Spektrum, Wiesbaden, 2014)

- Nachfolgetagung: Paderborn 2013



Der Übergang Schule → weiterführende Ausbildung

- *Dass* die mitgebrachten Kompetenzen den Erwartungen in den meisten Fällen nicht entsprechen, ist keine Frage mehr und hinreichend dokumentiert!
- Die offenen Fragen sind eher:
  - Wer kann was tun, um diese Probleme abzumildern?
  - Soll sich der Mathematikunterricht ändern, und wenn, dann wie? [Ob die Einführung der standardisierten Reifeprüfung hier etwas bringen wird, wissen wir noch nicht]
  - Sind die Erwartungen überzogen?

Der Übergang Schule → weiterführende Ausbildung

- Debatten (teilweise recht kontrovers, hier leicht überspitzt):
  - „Der Mathematikunterricht geht an den Erfordernissen der weiterführenden Ausbildungsgänge vorbei“
  - „Die Schule tut, was möglich und sinnvoll ist; die weiterführenden Ausbildungsgänge sollen die Studierenden dort abholen, wo sie stehen.“
  - „Werden die SchülerInnen falsch ausgebildet?“
  - „Werden die LehrerInnen falsch ausgebildet?“
  - „Werden die SchülerInnen, die später LehrerInnen werden, falsch ausgebildet?“

Der Übergang Schule → weiterführende Ausbildung

- Debatten (teilweise recht kontrovers, hier leicht überspitzt):
  - „Der Mathematikunterricht geht an den Erfordernissen der weiterführenden Ausbildungsgänge vorbei“
  - „Die Schule tut, was möglich und sinnvoll ist; die weiterführenden Ausbildungsgänge sollen die Studierenden dort abholen, wo sie stehen.“
  - „Werden die SchülerInnen falsch ausgebildet?“
  - „Werden die LehrerInnen falsch ausgebildet?“
  - „Werden die SchülerInnen, die später LehrerInnen werden, falsch ausgebildet?“

Der Übergang Schule → weiterführende Ausbildung

- Debatten (teilweise recht kontrovers, hier leicht überspitzt):
  - „Der Mathematikunterricht geht an den Erfordernissen der weiterführenden Ausbildungsgänge vorbei“
  - „Die Schule tut, was möglich und sinnvoll ist; die weiterführenden Ausbildungsgänge sollen die Studierenden dort abholen, wo sie stehen.“
  - „Werden die SchülerInnen falsch ausgebildet?“
  - „Werden die LehrerInnen falsch ausgebildet?“
  - „Werden die SchülerInnen, die später LehrerInnen werden, falsch ausgebildet?“
- … alle Bereiche sind betroffen!

Zwei Ist-Erhebungen (im österreichischen Umfeld)

- Universität Wien, WS 2010/11: „Self-Assessment-Test Mathematik“ unter Physik-Studierenden im ersten Semester

- Fachhochschule Technikum Wien, Sommer 2012 und Sommer 2013: Wissenschaftliche Begleitung der „Mathematik-Warmup-Kurse“

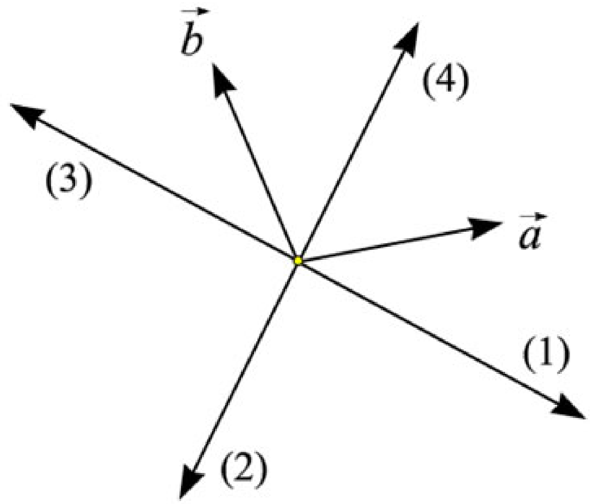
Self-Assessment-Test Mathematik (SAM)

Online-Test zur Erhebung mathematischer Kompetenzen unter Physik-Studierenden im ersten Semester, WS 2011/12

- Ziel: Rückmeldung an die Studierenden | Anpassungen der LVen zur mathematischen Grundausbildung
- 19 Themenbereiche. Zeitaufwand: 5 – 30 Minuten pro Themenbereich
- Der Test war verbindlich (aber folgenlos).
- Datensatz: N = 172

Self-Assessment-Test Mathematik (SAM)

„Typische“ Testfrage:



Welcher der Pfeile (1) bis (4) stellt den Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ dar?

Antwortmöglichkeiten:

(1) (2) (3) (4)

Ich weiß die Antwort nicht. Ich verstehe die Frage nicht.

Self-Assessment-Test Mathematik (SAM)

Andere (etwas „abstraktere“) Testfrage:

[*Mehrere Antworten können richtig sein:*]
Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 ist definiert durch …

(a) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$

(c) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$

(d) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(x_0 + \varepsilon) + f(x_0)}{\varepsilon}$

Self-Assessment-Test Mathematik (SAM)

Andere (etwas „abstraktere“) Testfrage:

[*Mehrere Antworten können richtig sein:*]
Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 ist definiert durch …

(a) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(b) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$$

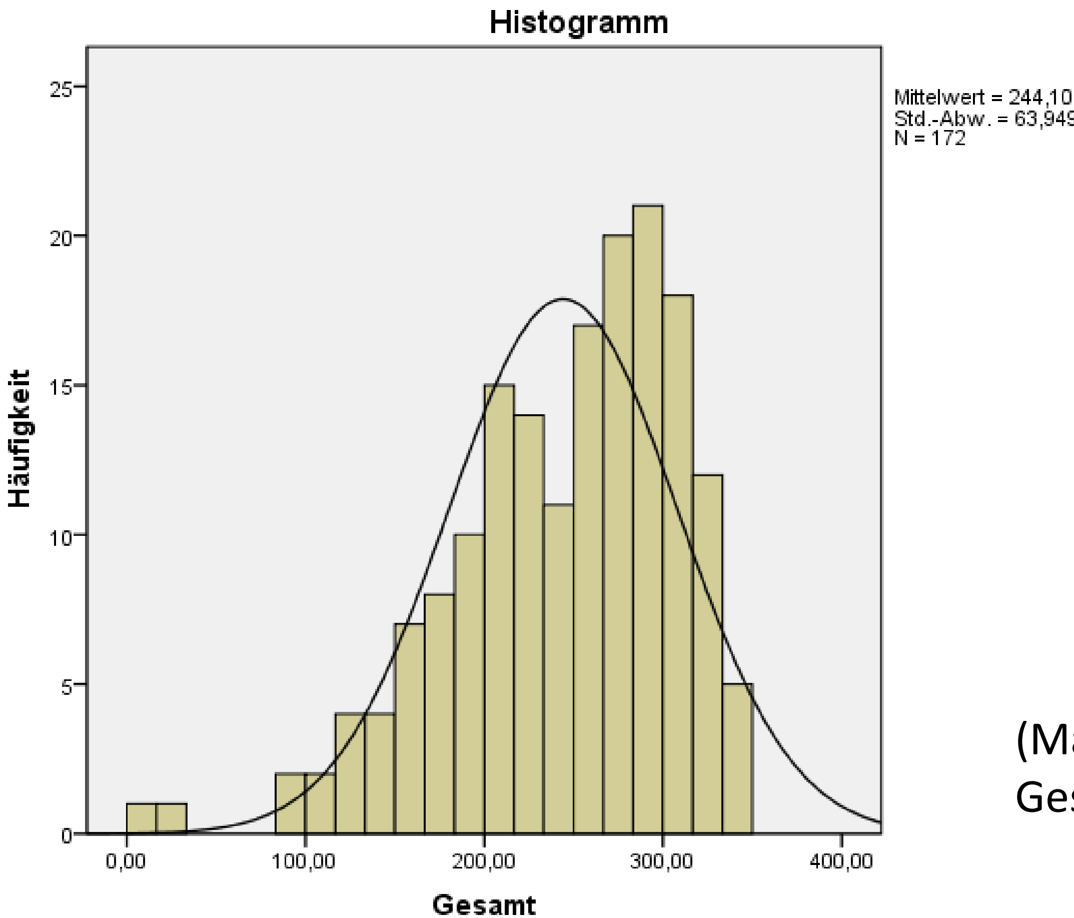
(c) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

(d) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) + f(x_0)}{\varepsilon}$$

(Das war eine der Einzelfragen mit den schlechtesten Ergebnissen)

Self-Assessment-Test Mathematik (SAM)

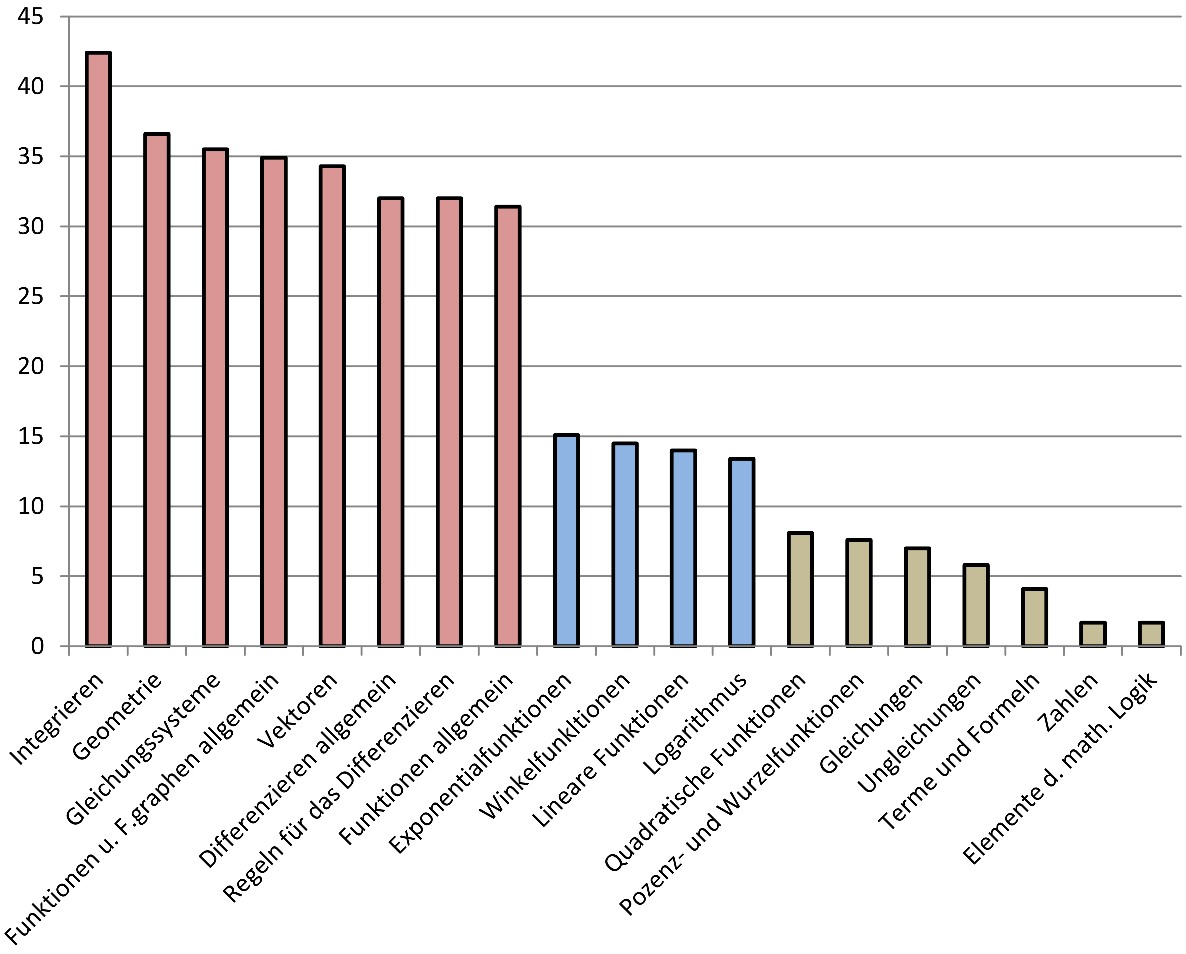
Ergebnisse (publiziert in I. Bausch *et al*, a.a.O.):



(Maximale Gesamtpunktezahl: 353)

Self-Assessment-Test Mathematik (SAM)

Anteil der Studierenden (in %) mit < Hälfte der erreichbaren Punktezahl, nach Themengebieten:



FH Technikum Wien, Sommer 2012 + 2013

Wissenschaftliche Begleitung der Warmup-Kurse im Rahmen zweier Diplomarbeiten (Carina Prendinger, Florian Resch)

- 7 Warmup-Kurse für Studierende von 14 Bachelorstudiengängen (teilweise seit Längerem berufstätig). Werden von > 30% der StudienanfängerInnen besucht.
- Ziel: Schaffung einer „gemeinsamen Basis“, an der in den Studien angesetzt werden kann.
- Anfangs- und Endtest (P&P, je 20 Fragen aus 17 Themenbereichen)
- Sommer 2012: Test anonym durchgeführt. Datenbasis: N = 96
- Im Anschluss: Reflexionsprozess mit der FH unter Einbeziehung der KursleiterInnen

FH Technikum Wien, Sommer 2012

- „Typische“ Testfragen:

Anfangstest:

Aufgabe 3a:
Lösen Sie die folgende Gleichung:
$|2x + 1| = 7.$

Endtest:

Aufgabe 3a:
Lösen Sie die folgende Gleichung:
$2x - |3 - x| = 18.$

FH Technikum Wien, Sommer 2012

- „Typische“ Testfragen:

  Anfangstest:

  Aufgabe 3a:
  Lösen Sie die folgende Gleichung:
  $|2x + 1| = 7.$

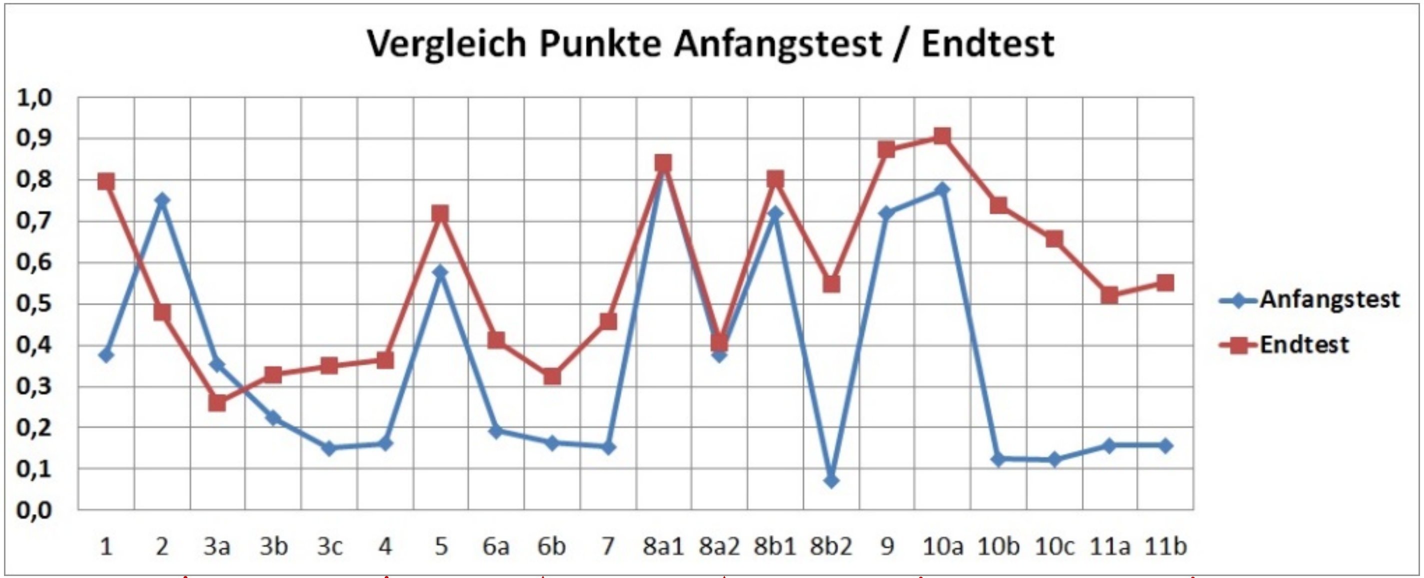
  Endtest:

  Aufgabe 3a:
  Lösen Sie die folgende Gleichung:
  $2x - |3 - x| = 18.$

Anmerkung: die Fragen wurden gemeinsam mit der FH Technikum Wien erstellt. Insofern widerspiegeln sie die Erwartungen der FH an ihre StudienanfängerInnen.

FH Technikum Wien, Sommer 2012 + 2013

Ergebnisse (Details werden im Tagungsband Paderborn 2013 veröffentlicht) zu den 20 Einzelfragen:



Rechnen mit Potenzen

Betrags-, Bruch-/quadratische, Exponentialgleichung; Bruchungleichung

sin, cos, tan

Differenzieren („mechanisch“)

Impressionen*)

geschöpft aus:

- Warmup-Kurse FH Technikum Wien
- Mathematik-Vorkurs für Physikstudierende
- Mathematische Grundausbildung für Physik-Lehramts-Studierende an der Universität Wien
- Mathematik-Lehramts-Ausbildung an der Universität Wien

*) persönliche Auswahl

Warmup-Kurse FH Technikum Wien

Zwei Beobachtungen:

- Brüche kürzen: Es wird in Summen „hineingekürzt“. Wenn Studierende beschreiben, was sie tun/getan haben, kommen die Worte „Produkt“ und „Faktor“ praktisch nicht vor. Generell extreme Schwierigkeiten, sich sprachlich auszudrücken.
- Fallunterscheidungen: Schwierigkeiten, die Logik einer Fallunterscheidung zu verstehen.

  Keine Tendenz, im Wort „Fall-Unterscheidung“ („Unterscheidung von Fällen“) eine Bedeutung erkennen zu wollen.

  → kleine nachfolgende empirische Erhebungen zum Thema Fallunterscheidungen

Fallunterscheidungen

Vorkurs für Physik-Studierende | LV in Mathematik-Lehramt:

Ermitteln Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung mit Hilfe der Methode der Fallunterscheidung:

$$\frac{2x-1}{x-1} < 1$$

5 Minuten Zeit

Fallunterscheidungen

Musterlösung:

$$\boxed{\frac{2x-1}{x-1}<1}$$

Definitionsmenge: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Fall 1: $x-1>0$, d.h. $x>1$

Die Ungleichung vereinfacht sich zu $2x-1<x-1 \quad\Rightarrow\quad x<0$.

Daher $L_1=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<0 \text{ und } x>1\}=\{\}$.

Fall 2: $x-1<0$, d.h. $x<1$

Die Ungleichung vereinfacht sich zu $2x-1>x-1 \quad\Rightarrow\quad x>0$.

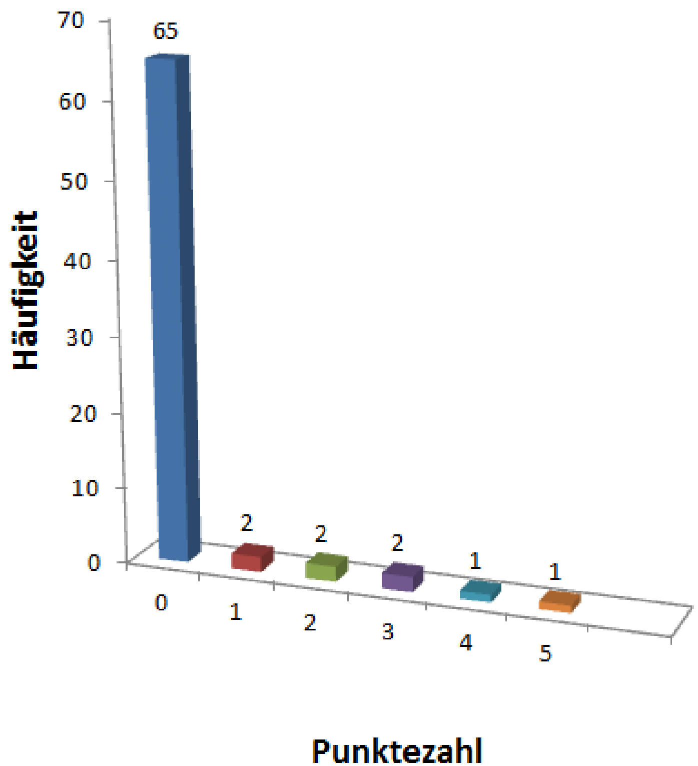
Daher $L_2=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>0 \;\text{ und }\; x<1\}=(0,1)$.

Der Fall $x-1=0$ tritt nicht ein, da $1\notin D$.

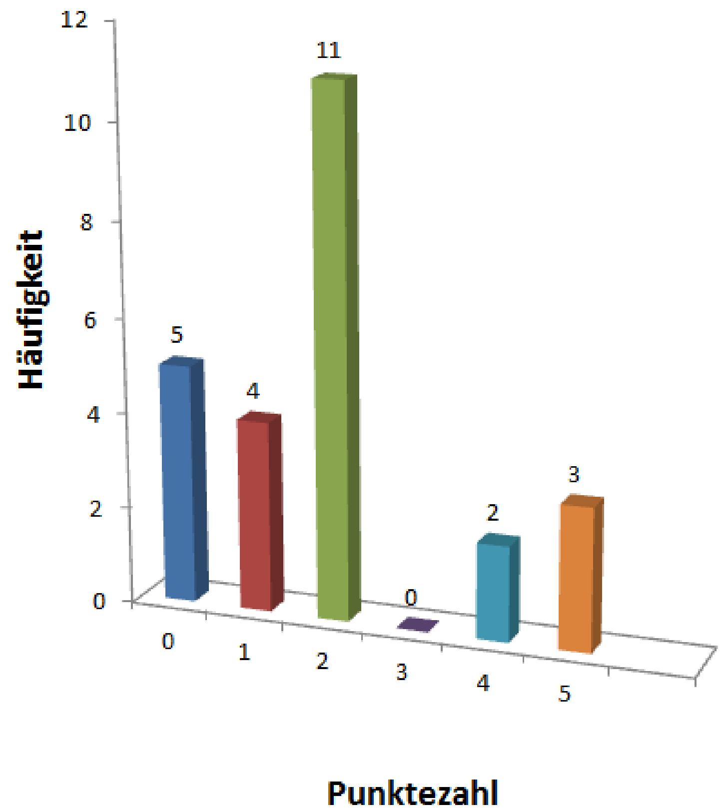
Daher ist die Lösungsmenge $L=L_1\cup L_2=(0,1)$.

Fallunterscheidungen

Vorkurs



LV aus Mathematik-LA



Physik (Vorkurs + mathematische Grundausbildung LA)

- Auch hier große Schwierigkeiten, sich sprachlich auszudrücken!
- Schwierigkeiten mit dem Stoff scheinen oft mit sprachlich-mathematischen Ungereimtheiten einherzugehen, z.B.:
  - „Die Gleichung hängt nicht von x ab."
    [vgl.: „Das Studium hängt nicht von der Stromrechnung ab."]
  - Verwechslungen von Term, Gleichung, Funktion, Graph
- Im sprachlichen (und schriftlichen) Ausdruck fällt eine gewisse „Hauptwortvermeidung" zugunsten der Beschreibung von Tätigkeiten oder Prozessen auf, z.B.
  - f' entsteht, wenn man f differenziert
  - statt: f' ist die Ableitung von f

Aufgabe: Einen Normalvektor zu zwei gegebenen Vektoren bestimmen.

Typisch:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Äußerst selten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Vereinfachungsmöglichkeiten werden selten erkannt bzw. genutzt.

Physik (mathematische Grundausbildung LA)

Es ist der Betrag von $\vec{v} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zu berechnen

(wobei *zuvor* die Regel $|a\vec{v}| = |a||\vec{v}|$ behandelt wurde).

Oft:

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix},$$

$$\text{daher } |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)^2} =$$

$$= \quad \cdots \quad = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Physik (mathematische Grundausbildung LA)

Es ist der Betrag von $\vec{v} = \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zu berechnen

(wobei *zuvor* die Regel $\left|a\vec{v}\right| = |a|\left|\vec{v}\right|$ behandelt wurde).

Oft:

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2} \\ \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix},$$

Selten: $\left|\vec{v}\right| = \dfrac{\left|\vec{x}\right|}{|\vec{x}|^2} = \dfrac{1}{\left|\vec{x}\right|}$

$$\text{daher } \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)^2} =$$

$$= \quad \cdots \quad = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Physik (mathematische Grundausbildung LA)

Es ist der Betrag von $\vec{v} = \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zu berechnen

(wobei *zuvor* die Regel $\left|a\vec{v}\right| = |a|\left|\vec{v}\right|$ behandelt wurde).

Oft:

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2} \\ \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix},$$

$$\text{daher } \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)^2} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Selten: $\left|\vec{v}\right| = \dfrac{\left|\vec{x}\right|}{|\vec{x}|^2} = \dfrac{1}{\left|\vec{x}\right|}$

Welche Art von Denken oder „Defiziten“ steckt hinter derartigen überkomplizierten Berechnungsstrategien und dem Ignorieren einer vereinfachenden Regel?

Mathematatik LA-Ausbildung

Gegenbeispiel zu

$$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left(\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|\right)$$

Gegenbeispiel zu

$$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left(\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|\right)$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}\qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\qquad \vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}$$

Vermutungen und Spekulationen

Zur Vorgeschichte eine Fakultäts-Anekdote:

(Kurvendiskussion) Der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades schneidet den Graphen von $g(x) := x^2 - 2x$ $\boxed{\text{zweimal auf der } x\text{-Achse}}$. Er hat im Koordinatenursprung einen Wendepunkt und steht hier auf den Graphen von g senkrecht. Bestimmen Sie die Funktion f (**3 Punkte**) sowie deren Extremwerte (**2 Punkte**)

und berechnen Sie den Inhalt des in $\boxed{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}}$ liegenden von den beiden Graphen eingeschlossenen (endlichen) Flächenstücks (**1 Punkt**); eine Skizze der beiden Graphen ist hier nützlich.

Erstentwurf
Michael Grosser

Zu schwierig für schriftliche EmA-Prüfung?

(Kurvendiskussion) Der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades schneidet den Graphen von $g(x) := x^2 - 2x$ $\boxed{\text{in dessen Nullstellen}}$. Er hat im Koordinatenursprung einen Wendepunkt und steht hier auf den Graphen von g senkrecht (*Hinweis*: Es gilt $\boxed{k_1 \cdot k_2 = -1}$ für die Anstiege zweier aufeinander senkrecht stehender Geraden). Bestimmen Sie die Funktion f (**4 Punkte**) sowie deren Extremwerte (**2 Punkte**).

(Fortsetzung von (a)) Berechnen Sie den Inhalt des zwischen den Nullstellen von g liegenden von den beiden Graphen eingeschlossenen Flächenstücks. (**2 Punkte**)

entschärfte (?!)
Version

Vermutungen und Spekulationen

oft „Kochrezepte“

- Vermutung: SchülerInnen (StudienanfängerInnen) verbinden mathematische Inhalte vor allem mit **Tätigkeiten** (Handlungen, Verfahren, Prozeduren), weniger mit **Objekten**, d.h. **Dingen**. Die Kompetenz, mathematische Objekte als solche „fassen zu können“, ist oft wenig ausgebildet. Daher ebenso wenig die Fähigkeit, die **Eigenschaften** und **Beziehungen** derartiger Objekte zu fassen (zu „be-greifen“, zu denken).

  → vorwiegend prozedural strukturierte innere Repräsentationen

- Damit eng verbunden: die Fähigkeit über mathematische Sachverhalte – also über Objekte und ihre Eigenschaften – **sprechen** zu können, und die Fähigkeit, sich diese Eigenschaften **zunutze zu machen**, etwa um **Strategien zu planen**, da die entsprechenden Anknüpfungspunkte fehlen. Daher werden selten **alltagssprachliche** Ausdrucksformen (die sich ja auf Eigenschaften von und Beziehungen zwischen Objekten beziehen müssten) gewählt.

Vermutungen und Spekulationen

… und davon ist das **mathematische Begriffsnetz als Ganzes** betroffen!

Vermutungen und Spekulationen

Beispiel für Objekt vs. Tätigkeit:

- Bruchzahl … Objekt (Zahl) oder Tätigkeit (Division)?
  „Gedankenexperiment“ (Michael Grosser):

  - $\frac{24}{7} : 3 =$
  - $24 \text{ Zwetschken} : 3 =$
  - $24 \text{ Arbeitsstunden} : 3 =$
  - $\frac{24}{7} : 3 =$

Vermutungen und Spekulationen

Beispiel für Objekt vs. Tätigkeit:

- Bruchzahl … Objekt (Zahl) oder Tätigkeit (Division)?
  „Gedankenexperiment“ (Michael Grosser):
  - $\frac{24}{7} : 3 =$
  - $24 \text{ Zwetschken} : 3 =$
  - $24 \text{ Arbeitsstunden} : 3 =$
  - $\frac{24}{7} : 3 =$
- Einzelfrage mit dem schlechtesten Ergebnis beim SAM-Test: $\frac{\frac{6}{7}}{3} =$ [aus: $\frac{42}{3}$, $\frac{18}{7}$, $\frac{2}{7}$]

Vermutungen und Spekulationen

Weitere Beispiele:

Objektbildung (wahrscheinlich) nicht oder nur schwach gelungen	**Objektbildung (wahrscheinlich) gelungen**
Bruchzahlen, evtl. auch Wurzeln und Potenzen	ganze Zahlen
Zahlenterme, komplexere Terme mit Variablen	reelle Zahlen in Dezimaldarstellung
Gleichungen (lineare, quadratische, andere)	x-Achse
Funktionen im Allgemeinen, ihre Graphen, ihre Extrema, Ableitungen, Integrale,…	Punkte in der Ebene (x,y)
Stellen? (x)	Vektoren?
konkrete Funktionen, z.B. die Sinusfunktion	
Linearkombinationen von Vektoren	

$1+\frac{3}{5}$ $\quad\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad x \mapsto \frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{4x}$ $\quad\sin(19°)$ $\quad\int_0^1 dx\, e^{-x^2}$

Vermutungen und Spekulationen

Zwei Anekdoten:

- Maraturaschule: $x^7 + 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 7 = 0$

Vermutungen und Spekulationen

Zwei Anekdoten:

- Maturaschule: $$x^7 + 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 7 = 0$$
  Lösungsmenge:

$$L = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^7 + 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 7 = 0 \}$$

… ist irgendwie „nicht erlaubt“ (leicht unheimlich)!

Vermutungen und Spekulationen

Zwei Anekdoten:

- Maturaschule: $x^7 + 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 7 = 0$
  Lösungsmenge:
  $$L = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^7 + 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 7 = 0 \}$$
  … ist irgendwie „nicht erlaubt“ (leicht unheimlich)!

- Nach Differenzieren kommt der Reflex „ = 0“!

Vermutungen und Spekulationen

Beispiel für Objekt + Eigenschaft vs. Tätigkeit:

Monotonie einer Folge: Eigenschaft eines Objekts oder Ergebnis einer Tätigkeit?

Zeige, dass die Folge $a_n = \frac{2n+1}{3}$ monoton wachsend ist!

$$a_{n+1} \geq a_n$$

$$\frac{2(n+1)+1}{3} \geq \frac{2n+1}{3}$$

$$\frac{2n+2+1}{3} \geq \frac{2n+1}{3}$$

$$\frac{2n+3}{3} \geq \frac{2n+1}{3}$$

$$2n+3 \geq 2n+1$$

$3 \geq 1$ ... wahre Aussage

Vermutungen und Spekulationen

Beispiel für Objekt + Eigenschaft vs. Tätigkeit:

Monotonie einer Folge: Eigenschaft eines Objekts oder Ergebnis einer Tätigkeit?

Zeige, dass die Folge $a_n = \frac{2n+1}{3}$ monoton wachsend ist!

$$a_{n+1} \geq a_n$$

$$\frac{2(n+1)+1}{3} \geq \frac{2n+1}{3}$$

$$\frac{2n+2+1}{3} \geq \frac{2n+1}{3}$$

$$\frac{2n+3}{3} \geq \frac{2n+1}{3}$$

$$2n+3 \geq 2n+1$$

$3 \geq 1$ ... wahre Aussage

Wie wäre es mit:

Der Zähler ist für jedes natürliche n positiv. Wenn man n um 1 erhöht, wird er größer, und damit der ganze Bruch. Fertig!

Vermutungen und Spekulationen

- Zusammenhang mit Sprache:
  - Hauptwortvermeidung („Ich rechne…“ statt „Das gesuchte XY ist …“). Beispiel: Gesucht ist der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (in irgendeinem Zusammenhang)

    „Ich rechne $B - A = \ldots$ längere Rechnung $\ldots = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ “

    statt etwa:

    „Wir wollen … berechnen. Dazu …. daher …

    $\color{red}{\vec{a}} = \overrightarrow{AB} = B - A = \ldots$ längere Rechnung $\ldots = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \color{red}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$ “

Vermutungen und Spekulationen

- Zusammenhang mit Sprache:
    - Hauptwortvermeidung („Ich rechne…“ statt „Das gesuchte XY ist …“). Beispiel: Gesucht ist der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (in irgendeinem Zusammenhang)

      „Ich rechne $B - A = \ldots$ längere Rechnung $\ldots = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ “

      statt etwa:

      „Wir wollen … berechnen. Dazu …. daher …

      $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = \ldots$ längere Rechnung $\ldots = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ “

„Metasprache“

„Objektsprache“

Vermutungen und Spekulationen

- Zusammenhang mit Sprache:
  - Hauptwortvermeidung („Ich rechne…“ statt „Das gesuchte XY ist …“). Beispiel: Gesucht ist der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (in irgendeinem Zusammenhang)

    „Ich rechne $B - A = \ldots$ längere Rechnung $\ldots = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ “

    „Metasprache“

    statt etwa:

    „Wir wollen … berechnen. Dazu …. daher …

    „Objektsprache“

    $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = \ldots$ längere Rechnung $\ldots = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ “

- Als was wird das Distributivgesetz $a(b+c) = ab + ac$ angesehen: Eher als Eigenschaft der reellen Zahlen(operationen) oder eher als Anleitung fürs Rechnen (oder beides)?

Vermutungen und Spekulationen

- Viele weitere Beobachtungen können auf diese Weise interpretiert werden!
- **Problem?** Ist nicht die „Tätigkeit“ (vor allem die „eigene Tätigkeit“) das zentrale Element der Begriffsbildung?

Fachdidaktik, Lehrpläne, Curricula, Bildungsstandards, standardisierte Reifeprüfung , Schulbücher fordern/unterstützen eigene Tätigkeit und eigene Erfahrung!

Auch für die zeitgemäße didaktische Hilfsliteratur, z.B.

- Bärbel Barzel et al: *Mathematik unterrichten: planen, durchführen, reflektieren*, Cornelsen Scriptor (2011)
- Bärbel Barzel et al: *Mathematik-Methodik, Handbuch für die Sekundarstufe I + II*, Cornelsen Scriptor (2007)

steht die eigene Tätigkeit der SchülerInnen im Vordergrund.

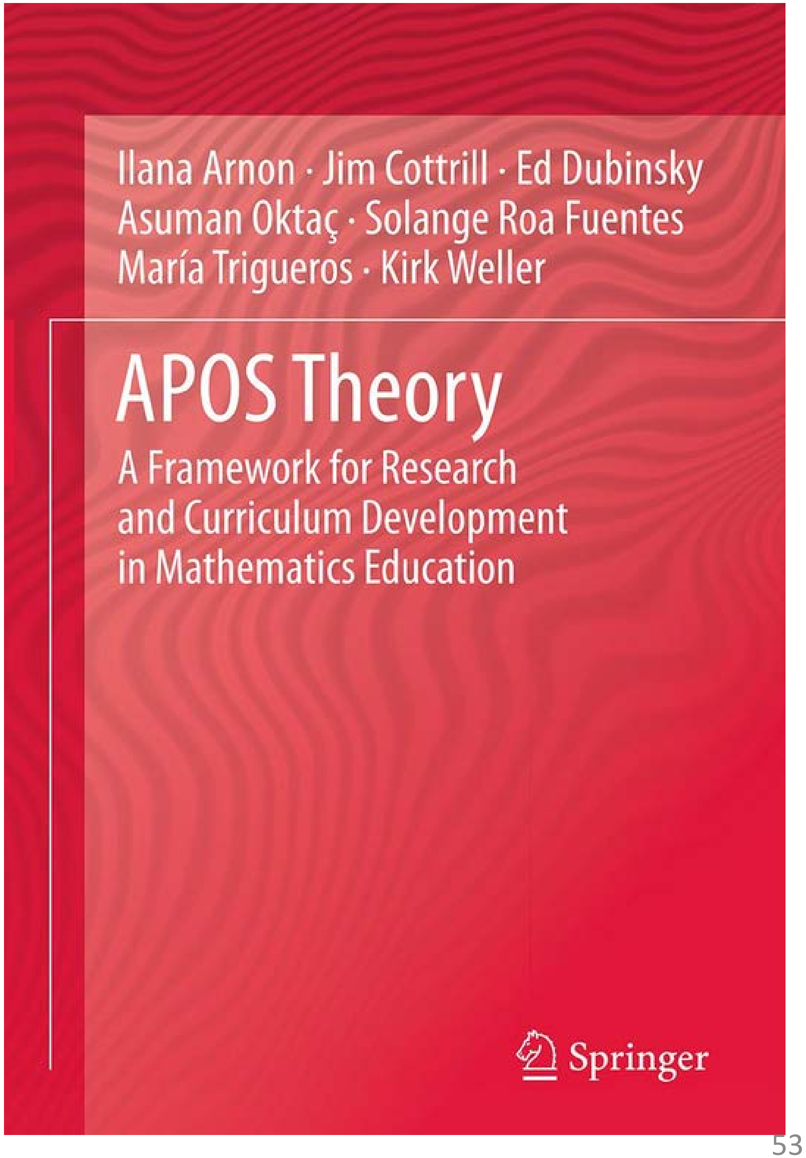
Vermutungen und Spekulationen

- Begriffsbildung wird – zu Recht! – als Ergebnis von Tätigkeiten („Konstruktion“) angesehen!
- Aber wenig ist darüber bekannt, wie dieser Prozess im Detail abläuft und wie „automatisch“ er sich vollzieht!
- Fragen:
  - Was ist, wenn die Begriffsbildung (im Sinne der „Objekt-Bildung“) auf halbem Weg „steckenbleibt“?
  - Wird sie im Unterricht bestmöglich unterstützt?
  - Kann sie (bzw. wie kann sie) besser unterstützt werden?
  - Könnte eine stärkere Gewichtung der „Exaktifizierung“ im Mathematikunterricht helfen (z.B. Helmut Heugl)?

APOS Theory

- APOS = Action – Process
  – Object – Schema
- konstruktivistische Theorie des Erlernens („Konstruierens“) mathematischer Konzepte
- seit den 1980er Jahren entwickelt

The first book on APOS Theory in Mathematics Education, written by the people who developed APOS Theory (Springer, 2014) →



Kulturelle Bedeutung von Mathematik

Roland Fischer: *Materialisierung und Organisation. Zur kulturellen Bedeutung von Mathematik*
(Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, 2006)
http://www.uni-klu.ac.at/wiho/downloads/Fischer_Materialisierung_und_Organisation_Buch%281%29.pdf

- Mathematik stellt eine „Materialisierung von Abstraktem“ dar (das „Abstrakte“ = „Dinge“, die den Sinnen nicht direkt zugänglich sind) [S. 12]
- Durch das „Dinge-zum-Objekt-Machen“ findet eine „Objektivierung in doppeltem Sinn“ statt:
  - „Durch die Objektivierung bekommen die Dinge eine eigene Realität.“
  - „Und der zweite Aspekt von Objektivierung ist, dass sie anscheinend von uns unabhängig werden, dass sie objektiv werden, existieren ohne uns Menschen.“

„Und durch beides wird dann quasi ein Zwang ausgeübt.“ [S. 104]

Kulturelle Bedeutung von Mathematik

Roland Fischer: *Materialisierung und Organisation. Zur kulturellen Bedeutung von Mathematik*
(Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, 2006)
http://www.uni-klu.ac.at/wiho/downloads/Fischer_Materialisierung_und_Organisation_Buch%281%29.pdf

- Mathematik stellt eine „Materialisierung von Abstraktem“ dar (das „Abstrakte“ = „Dinge“, die den Sinnen nicht direkt zugänglich sind) [S. 12]
- Durch das „Dinge-zum-Objekt-Machen“ findet eine „Objektivierung in doppeltem Sinn“ statt:
  - „Durch die Objektivierung bekommen die Dinge eine eigene Realität.“
  - „Und der zweite Aspekt von Objektivierung ist, dass sie anscheinend von uns unabhängig werden, dass sie objektiv werden, existieren ohne uns Menschen.“

„Und durch beides wird dann quasi ein Zwang ausgeübt.“ [S. 104]

… unter der Überschrift „Disziplinierung“

Begriffsbildung in der Mathematik

Stefan Götz und Esther Ramharter: *Begriffsbildung in der Mathematik*
Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen der ÖMG im Jänner 2011 (Heft 43), S. 50 – 74
http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2010%20Band%2043/VortragGoetzRamharter.pdf

- Rolle von Definitionen
- Untertitel: *Amphibium zwischen Zwang und Freiheit*
- „Wir sind beim Definieren mathematischer Begriffe frei [Kant], die Begriffe dagegen unterliegen in der Mathematik einem stärkeren Zwang als in allen anderen Wissenschaften."

Vermutungen und Spekulationen

- Ein so durchgängig und breit auftretendes Phänomen

  (auch angesichts dessen, dass Lehrpläne, Schulbücher, Bildungsstandards,… die Erlernung eines sachgemäßen Umgangs mit mathematischen Objekten fordern)

  verlangt weniger Schuldzuweisungen, sondern vielmehr eine *Erklärung*!

Vermutungen u

AHS-Lehrplan Unterstufe:
- Analysieren von … mathematischen Objekten
- Beschreiben von Objekten und Prozessen; Präzision der Sprachverwendung

- Ein so durchgängig und breit

(auch angesichts dessen, dass Lehrpläne, Schulbücher, Bildungsstandards,… die Erler Umgangs mit mathematische …uwe

AHS-Lehrplan Oberstufe:
- Mathematik ist ein elaboriertes Begriffsnetz, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck; Präzision der Sprachverwendung
- Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen und so mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem einbauen.

Das Problem liegt also nicht in fehlenden Zielvorgaben!

Vermutungen und Spekulationen

- Ein so durchgängig und breit auftretendes Phänomen

  (auch angesichts dessen, dass Lehrpläne, Schulbücher, Bildungsstandards,… die Erlernung eines sachgemäßen Umgangs mit mathematischen Objekten fordern)

  verlangt weniger Schuldzuweisungen, sondern vielmehr eine *Erklärung*!
- Erklärungsansatz: Zwang! Kann das „Objektivieren“ (auch) irgendwie unangenehm sein?
- Wo Dinge unangenehm sind, gibt es auch **Vermeidungsstrategien** (nicht Strategien zur Vermeidung *von* Mathematik, sondern *innermathematische* Vermeidungsstrategien)!
- Mögliche Untersuchungsansätze:
  - eingehende sachlogische Analyse
  - Analyse der „Sprache“ von SchülerInnen [LehrerInnen?]

Fragen

- Wird das „ständige Bemühen“ (AHS Oberstufenlehrplan), das auch die Ausbildung von **Objektvorstellungen** umfasst, in der Unterrichtspraxis [oft] dem Einüben von **Tätigkeitsregeln** („Rezepten“) geopfert?
  - Beispiel: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 4$!
    „Da leite ich jetzt ab: $f'(x) = 2x - 2$, ist gleich 0, $\ldots = 2x - 2 = 0$
    jetzt addiere ich auf beiden Seiten 2: $2x = 2$, dividiere … usw.“

Fragen

- Wird das „ständige Bemühen“ (AHS Oberstufenlehrplan), das auch die Ausbildung von **Objektvorstellungen** umfasst, in der Unterrichtspraxis [oft] dem Einüben von **Tätigkeitsregeln** („Rezepten“) geopfert?
  - Beispiel: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 4$!
    „Da leite ich jetzt ab: $f'(x) = 2x - 2$, ist gleich 0, $\ldots = 2x - 2 = 0$
    jetzt addiere ich auf beiden Seiten 2: $2x = 2$, dividiere … usw.“
    Das Wort „Gleichung“ (*die* zentrale Idee dabei) kommt nicht vor!

Fragen

- Wird das „ständige Bemühen“ (AHS Oberstufenlehrplan), das auch die Ausbildung von **Objektvorstellungen** umfasst, in der Unterrichtspraxis [oft] dem Einüben von **Tätigkeitsregeln** („Rezepten“) geopfert?
  - Beispiel: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 4$!
    „Da leite ich jetzt ab: $f'(x) = 2x - 2$, ist gleich 0, $\ldots = 2x - 2 = 0$
    jetzt addiere ich auf beiden Seiten 2: $2x = 2$, dividiere ... usw.“
    Das Wort „Gleichung“ (*die* zentrale Idee dabei) kommt nicht vor!
- Wie sehr wird in Schulbuchaufgaben [nicht Schulbuchtexten!] der **Einübung von Tätigkeiten** der Vorzug vor der **Ausbildung von Objektvorstellungen** gegeben?
- Wird Objekt-Bildung durch **aktive Benennung** gefördert? Wäre eine verstärkte Forderung, über mathematische Sachverhalte (auch über Dinge und ihre Eigenschaften) in „**Alltagssprache**“ zu reden, eine brauchbare Leitidee? (vgl. Albert Einsteins Großmutter-Bonmot!)

Fragen

Woher kommt der Unterschied:

Frage: Wie kann ich von hier zum Stephansdom gelangen, abhängig vom Wetter?

Frage: Wie kann ich das Maximum der Funktion $f(x) = (x-3)^4$ im Intervall $[0,1]$ finden?

Vorstellungen, Abwägungen, Antworten mit Gewichtungen, Varianten je nach Zusatzbedingungen,……

Für viele SchülerInnen nur bewältigbar, wenn diese Variante eines Minimax-Problems eigens eingeübt wurde!

Auswege?*)

- Problemstellungen, die sich den üblichen „linearen“ Lösungswegen („Kochrezepten“) verweigern, stärker einbringen! Beispiele:

  - Frage: Ist es möglich, dass eine (differenzierbare) Funktion f ein lokales Maximum hat, und dass dort $f''(x) = 0$ ist?
    [Wie viele SchülerInnen könnten das heute beantworten?]

  - Gegeben: $g(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$.

    Gesucht: lokale Maxima, aber berechne ja nicht die zweite Ableitung!

*) *ganz* persönlich gemeint – und bitte auch das Fragezeichen beachten!

Auswege?

- Einen „alltagssprachlich korrekten“ Umgang mit mathematischen Sachverhalten fördern und einfordern.
- Vielfältige Themenstellungen (die verschiedene Kompetenzen ansprechen und die Ausbildung von Vorstellungen, strategischem Denken und Begründen fördern), ansprechen! Beispielsweise:
  - Graphen von Funktionen in zwei Variablen
    www.mathe-online.at/kacheltests/funktionen_in_mehreren_variablen/
    (Es muss nicht immer sofort *gerechnet* werden!)
  - Rechnungen können auch mal anders betrachtet werden:
    http://www.mathe-online.at/kacheltests/bruchterme_kuerzen/
    (und darüber sprechen)
  - Begründungszusammenhänge thematisieren
    http://www.mathe-online.at/kacheltests/termumformungen_mit_potenzen/

Auswege?

- Mathematische (und verwandte) Denkmuster (Denkformen) vorstellen, durchspielen. Denken und Erkenntnisse gewinnen kann spannend sein!
  - Beispiel: Abraham Wald

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Diese Präsentation
gibt‘s am Web unter

http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/MatheDidaktik/FDKoll2014/

universität
wien