Zufallsprozesse, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten – die Grundlagen

Wichtige Tatsachen und Formeln zur Vorlesung

Mathematische Grundlagen für das Physikstudium 3

Franz Embacher
http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/
Institut für Theoretische Physik der Universität Wien

Als Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung verwenden wir das nützliche Gedankenmodell eines (idealen) **Zufallsexperiments**, das eine endliche Zahl von Versuchsausgängen zulässt.

Beispiele für (ideale) Zufallsexperimente mit einer endlichen Zahl von Versuchsausgängen

- Einmaliges Würfeln (mit einem idealen Würfel). Die möglichen Versuchsausgänge sind die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6.
- Zweimaliges Würfeln (hintereinander und unabhängig voneinander, jeweils mit einem idealen Würfel). Die möglichen Versuchsausgänge sind (geordnete) Paare von Augenzahlen: (1,1), (1,2), (1,3), ... und (6,6).
- Werfen einer Münze. Die möglichen Versuchsausgänge sind Kopf (K) und Zahl (Z).
- Es wird unabhängig voneinander eine Münze geworfen und einmal gewürfelt. Die möglichen Versuchsausgänge sind die Paare (K,1), (K,2), (K,3), (K,4), (K,5), (K,6), (Z,1), (Z,2), (Z,3), (Z,4), (Z,5), (Z,6).
- Aus einer Urne mit 20 weißen und 30 schwarzen Kugeln wird eine Kugel (zufällig) herausgezogen. Die möglichen Versuchsausgänge sind „Es wird eine weiße Kugel gezogen“ und „Es wird eine schwarze Kugel gezogen“.

Es ist nun wichtig, zwei Begriffe zu unterscheiden:

- Ein **Elementarereignis** ist ein möglicher Versuchsausgang.
- Ein **Ereignis** ist eine Menge (Zusammenfassung) von möglichen Versuchsausgängen.

  Beispiele für Ereignisse:

  - Beim Würfeln:
    - „Die Augenzahl ist 1, 2 oder 3“.
    - „Die Augenzahl ist 3“. Dieses Ereignis ist zugleich ein Elementarereignis.
    - „Die Augenzahl ist gerade“. Dieses Ereignis kann auch in der Form „Die Augenzahl ist 2, 4 oder 6“ beschrieben werden.
  - Beim zweimaligen Würfeln:
    - „Die Summe der Augenzahlen ist gerade“. Dieses Ereignis kann auch in der Form „Die Augenzahlen sind (1,1) oder (1,3) oder (1,5) oder (2,2) oder ... oder (6,6)“ beschrieben werden.
  - Beim gleichzeitigen (unabhängigen) Münzwurf/Würfeln:
    - „Die Münze zeigt Kopf und die Augenzahl ist ungerade“. Dieses Ereignis kann auch durch die Angabe der Elementarereignisse „(K,1) oder (K,3) oder (K,5)“ beschrieben werden.

- Aus einer Urne mit 20 weißen und 30 schwarzen Kugeln wird eine Kugel (zufällig) herausgezogen, zurückgelegt und danach nochmals eine Kugel (zufällig) herausgezogen:
    - „Zuerst wird eine weiße, dann eine schwarze Kugel gezogen". Dieses Ereignis ist zugleich ein Elementarereignis. Wir können es abgekürzt in der Form (W,S) anschreiben.
    - „Die beiden gezogenen Kugeln haben verschiedene Farbe". Dieses Ereignis kann auch durch die Angabe der Elementarereignisse „(W,S) oder (S,W)" beschrieben werden.

Nun wird jedem Ereignis eine **Wahrscheinlichkeit** („für sein Eintreten") zugeschrieben. Dabei wollen wir uns zunächst auf solche (ideale) Zufallsexperimente beschränken, für die *alle Versuchsausgänge „gleich wahrscheinlich" sind*.

> Aufgabe: Welche der oben genannten Beispiele sind von diesem Typ, welche nicht?
> Lösung: Alle bis auf die beiden Urnenbeispiele sind von diesem Typ.

Definition: Sei A ein Ereignis. Unter der Voraussetzung, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, wird die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A als

$$p(A) = \frac{\text{Zahl der Elementarereignisse, die zu } A \text{ gehören}}{\text{Zahl der Elementarereignisse}} \tag{1}$$

definiert. Dieser Quotient wird oft auch in der Form

$$\frac{\text{Zahl der günstigen Fälle}}{\text{Zahl der möglichen Fälle}}$$

angeschrieben. Für jedes Ereignis gilt $0 \le p(A) \le 1$.

> Beispiel:
>
> - Beim Würfeln: $p(\text{„Die Augenzahl ist gerade"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
>
>   Der Zähler 3 ergibt sich daraus, dass zum Ereignis „Die Augenzahl ist gerade" genau 3 Elementarereignisse gehören, nämlich die Augenzahlen 2, 4 und 6. Der Nenner 6 ist die Gesamtzahl aller Elementarereignisse, d.h. die Gesamtzahl aller möglichen Versuchsausgänge.

Es ist nützlich, die Definition (1) mathematisch etwas kompakter zu formulieren: Die Menge aller möglichen Versuchsausgänge eines Zufallsexperiments (d.h. die Menge R aller Elementarereignisse) heißt **Ereignisraum**.

- Ein **Elementarereignis** ist daher ein Element des Ereignisraums.
- Ein **Ereignis** ist eine Teilmenge des Ereignisraums.

Unter der Voraussetzung, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, ist die einem Ereignis $A \subseteq R$ zugeordnete Wahrscheinlichkeit durch

$$p(A) = \frac{|A|}{|R|} \qquad (1')$$

gegeben, wobei $|\;|$ die Zahl der Elemente einer Menge bezeichnet[1]. Man beachte, dass die Formeln (1) und (1') gleichwertig sind. Sie definieren die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Versuchsausgang zu A gehört (d.h. ein Element von A ist).

> Beispiel: Beim (einmaligen) Würfeln ist der Ereignisraum $R = \{1,2,3,4,5,6\}$. Zwei Beispiele für Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen sind:
>
> - Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses „Die Augenzahl ist 3" ist $p(\{3\}) = \frac{|\{3\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{1}{6}$. Anstelle von $p(\{3\})$ können wir genauso gut $p(3)$ oder, noch kürzer, p_3 schreiben.
> - Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses „Die Augenzahl ist gerade" ist $p(\{2,4,6\}) = \frac{|\{2,4,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Anstelle von $p(\{2,4,6\})$ können wir genauso gut
>   - $p($„Die Augenzahl ist gerade"$)$ oder
>   - $p(2 \text{ oder } 4 \text{ oder } 6)$
>
> schreiben.
>
> Beispiel: Der Ereignisraum für zweimaliges Würfeln ist $\{(1,1),(1,3),...(6,6)\}$. Er besteht aus 36 Elementen. Die Wahrscheinlichkeit
>
> $$p(\text{„Die Summe der Augenzahlen ist gerade"})$$
>
> kann gemäß Formel (1) oder (1') durch Abzählen der Anzahl jener Elementarereignisse (d.h. jener *Paare* von Augenzahlen), für die die Summe der Augenzahlen gerade ist, berechnet werden (→ Aufgabe).

Im Prinzip ist es gleichgültig, ob ein Ereignis verbal als Bedingung an einen Versuchsausgang (wie „Die Summe der Augenzahlen ist gerade") oder formal als Teilmenge des Ereignisraums beschrieben wird – wichtig ist es, zwischen diesen beiden Gesichtspunkte übersetzten zu können. Im Folgenden wird eher die zweite Möglichkeit bevorzugt.

Ereignisse können miteinander kombiniert werden. Insbesondere ist die Vereinigung $A \cup B$ zweier Ereignisse $A, B \subseteq R$ wieder ein Ereignis und entspricht dem Eintreten von A **oder** B. Anstelle von $A \cup B$ wird manchmal auch $A \vee B$ geschrieben. Man beachte, dass $A \cup B = \{x \in R \mid x \in A$ **oder** $x \in B\}$. Die Vereinigung von Ereignissen entspricht also dem „logischen Oder".

---

[1] Damit wird der leeren Menge die Wahrscheinlichkeit $p(\{\}) = 0$ zugeordnet.

Zwei Ereignisse $A, B \subseteq R$ heißen **disjunkt** (oder **einander ausschließend**), wenn $A \cap B = \{\}$ gilt, d.h. wenn sie keine Elemente gemeinsam haben. Für disjunkte Ereignisse gilt[2]

$$p(A \text{ oder } B) \equiv p(A \cup B) = p(A) + p(B). \tag{2}$$

Der Beweis ist ganz einfach: $p(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|R|} = \frac{|A| + |B|}{|R|} = \frac{|A|}{|R|} + \frac{|B|}{|R|} = p(A) + p(B)$.

Formel (2) lässt sich auf beliebig viele zueinander disjunkte Ereignisse übertragen: $p(A_1 \cup A_2 \cup ...) = p(A_1) + p(A_2) + ...$

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, die Augenzahl 3 oder eine gerade Auganzahl zu würfeln, ist $p(3) + p(\{2,4,6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

Da wegen (1') $p(R) = \frac{|R|}{|R|} = 1$ ist, und da R die Vereinigung aller Elementarereignisse ist, gilt aufgrund von (2) die **Normierungsbedingung**

$$\sum_{j \in R} p(j) = 1. \tag{3}$$

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist stets 1. Anstelle von $p(j)$ wird oft auch p_j geschrieben. Oft werden die Elementarereignisse einfach durchnummeriert, womit j von 1 bis $|R|$ läuft.

Ereignisse können auch in einer anderen Weise miteinander kombiniert werden: Zufallsexperimente bestehen in der Praxis oft aus mehreren, parallel verlaufenden und *voneinander unabhängigen* Teil-Zufallsexperimenten. Betrachten wir das anhand eines Beispiels: Es wird

- eine Münze geworfen (Ereignisraum $R_M = \{K, Z\}$ für „Kopf" und „Zahl") und
- gleichzeitig gewürfelt (Ereignisraum $R_W = \{1,2,3,4,5,6\}$ für die sechs möglichen Augenzahlen).

Der Ereignisraum R des zusammengesetzten Zufallsexperiments ist nun gegeben durch das Schema

	Würfel	1	2	3	4	5	6
Münze							
K		(K,1)	(K,2)	(K,3)	(K,4)	(K,5)	(K,6)

---

[2] Für Ereignisse, die *nicht* notwendigerweise disjunkt sind, gilt $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, wobei $A \cap B = \{x \in R \,|\, x \in A \text{ und } x \in B\} \equiv A \wedge B$ für „A **und** B" steht.

Z	(Z,1)	(Z,2)	(Z,3)	(Z,4)	(Z,5)	(Z,6)

Mengentheoretisch ist er das „kartesische Produkt" $R = R_M \times R_W = \{(x,y) \mid x \in R_M, y \in R_W\}$.
Ist nun $A \subseteq R_M$ (d.h. A ist ein Ereignis des Münzen-Experiments) und $B \subseteq R_W$ (d.h. B ist ein Ereignis des Würfel-Experiments), so ist heißt $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$ ein **Verbundereignis**. Es besteht aus zwei (oder mehreren) Ereignissen, die mit voneinander unabhängigen Wahrscheinlichkeiten eintreten können.

Die Wahrscheinlichkeit eines Verbundereignisses $A \times B$ (die so genannte **Verbundwahrscheinlichkeit**) ist, sofern die beiden Teil-Zufallsexperimente statistisch voneinander unabhängig sind, durch

$$p(A \times B) = p(A)\, p(B) \tag{4}$$

gegeben. Für höhere Verbundwahrscheinlichkeiten gilt in analoger Weise $p(A_1 \times A_2 \times \ldots) = p(A_1)\, p(A_2) \ldots$.

Beispiel: Es wird

- mittels eines Zufallsgenerator eine der drei Farben „Rot", „Grün" oder „Blau" gewählt (der Ereignisraum dieses Zufallsexperiments ist daher $\{R, G, B\}$) und
- gleichzeitig gewürfelt (Ereignisraum $\{1,2,3,4,5,6\}$).

Nun betrachten wir das aus $A = \{R, G\}$ und $B = \{2,3,4\}$ konstruierte Verbundereignis $A \times B = \{(R,2),(R,3),(R,4),(G,2),(G,3),(G,4)\}$. Es entspricht der Aussage „Es wird die Farbe R oder G gewählt und die Augenzahl 2, 3 oder 4 gewürfelt".
Jene Elementarereignisse, die Elemente von $A \times B$ sind, sind im folgenden Schema hervorgehoben:

	Würfel 1	**2**	**3**	**4**	5	6
Farbe						
R	(R,1)	**(R,2)**	**(R,3)**	**(R,4)**	(R,5)	(R,6)
G	(G,1)	**(G,2)**	**(G,3)**	**(G,4)**	(G,5)	(G,6)
B	(B,1)	(B,2)	(B,3)	(B,4)	(B,5)	(B,6)

Sie bilden ein „Rechteck" mit Seitenlängen 2 und 3. Die Menge $A \times B$ besteht daher aus $2 \cdot 3 = 6$ Elementen. Das ist ein Spezialfall der Beziehung $|A \times B| = |A|\,|B|$. Aus dieser Beobachtung ergibt sich der allgemeine Beweis von (4).

Bisher haben wir (ideale) Zufallsexperimente betrachtet, deren Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind. Manche (idealen) Zufallsexperimente erfüllen diese Forderung nicht, lassen sich aber auf derartige Zufallsexperimente zurückführen. Eine typische Klasse von Beispielen dafür sind die „Urnenaufgaben". Wird etwa aus einer Urne mit 20 weißen (W) und 30 schwarzen (S) Kugeln eine Kugel (zufällig) herausgezogen, so besteht der Ereignisraum nur aus zwei Elementen: $R = \{W, S\}$, entsprechend den möglichen Versuchsausgänge „Es wird eine weiße Kugel gezogen" und „Es wird eine schwarze Kugel gezogen". Es leuchtet ein, dass die beiden Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind, da ja mehr schwarze als weiße Kugeln in der Urne liegen. Dieses Zufallsexperiment kann durch einen kleinen Trick auf eines mit gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen zurückgeführt werden: Werden alle Kugel voneinander unterschieden (z.B. durchnummeriert), so hat das entsprechend modifizierte Zufallsexperiment 50 (durch die Nummern der Kugel unterscheidbare) mögliche Versuchsausgänge. Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „Es wird eine weiße Kugel gezogen“ und „Es wird eine schwarze Kugel gezogen“ (und damit die Wahrscheinlichkeiten für *alle* Ereignisse) lassen sich dann mit Hilfe der Formel (1) oder (1’) berechnen (→ Aufgabe).

Das **allgemeinste Szenario** eines (idealen) Zufallsexperiments mit endlichen vielen möglichen Versuchsausgängen benötigt

- Die Festlegung eines Ereignisraums R (d.h. eine Menge von Elementarereignissen) und
- die Festlegung einer Wahrscheinlichkeit $p(A)$ für jedes Ereignis $A \subseteq R$.

Es gelten dann die Regeln (2), (3) und (4). Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses A kann mit Hilfe der Formel

$$p(A) = \sum_{j \in A} p(j) \qquad (5)$$

auf die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse zurückgeführt werden.

Wird ein solches Zufallsexperiment N mal (in identischer Weise) durchgeführt, und ist $n(A)$ die Zahl jener Versuchsdurchgänge, in denen das Ereignis A eintritt, so wird der Quotient

$$h(A) = \frac{n(A)}{N} \qquad (6)$$

als **relative Häufigkeit** (des Eintretens von A) bezeichnet. Für wachsende N wird sich die relative Häufigkeit $h(A)$ der (vorausgesagten) Wahrscheinlichkeit $p(A)$ annähern. In diesem Sinn kann die Wahrscheinlichkeit als die „vorausgesagte relative Häufigkeit für eine gegen ∞ strebende Zahl von Versuchsdurchgängen“ definiert werden.

Mit Hilfe dieser theoretischen Grundlagen können nun auch komplexere – für die Physik relevante – Zufallsprozesse betrachtet werden. Die Hauptschwierigkeit beim Berechnen von Wahrscheinlichkeiten besteht oft darin, dass die Ermittlung der „Zahl der günstigen Fälle“ und der „Zahl der möglichen Fälle“, d.h. von Zähler und Nenner in (1), nicht leicht ist. Probleme dieser Art gehören in das Gebiet der **Kombinatorik** (d.h. der Lehre von den **Abzählmethoden**).

Link-Tipps zur Kombinatorik:

- http://www.phil.uni-sb.de/~jakobs/seminar/tutorium/kombinatorik/
- http://de.wikipedia.org/wiki/Stirlingsche_Formel

Die hier beschriebenen Grundlagen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, zusammen mit einigen Grundkenntnissen in Kombinatorik, sollten eine gute Basis für weiterführende Themen (Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Fehlerrechnung) und die wichtigsten Anwendungen in der statistischen Physik darstellen.