Kombinatorik mit Mascherln

Wichtige Formeln zur Vorlesung

Mathematische Grundlagen für das Physikstudium 3

Franz Embacher
http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/
Institut für Theoretische Physik der Universität Wien

Permutationen

N (unterscheidbaren) Elementen sollen N Mascherln umgebunden werden. Dabei sind die Mascherln *unterscheidbar* (z.B. durchnummeriert), und jedes Element darf *höchstens ein* Mascherl bekommen. Anders ausgedrückt: N Elemente sollen auf N Plätze angeordnet (oder in eine Reihenfolge gebracht) werden. Das ist auf

$$N! = N(N-1)(N-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1$$

(unterscheidbare) Arten möglich.
Beispiel: Auf wie viele Arten können sich 5 Personen auf 5 Sesseln verteilen?

Kombinationen ohne Wiederholung

N (unterscheidbaren) Elementen sollen K Mascherln umgebunden werden. Dabei sind die Mascherln *nicht unterscheidbar*, und jedes Element darf *höchstens ein* Mascherl bekommen. Das ist auf

$$\binom{N}{K} \equiv \frac{N!}{K!(N-K)!} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-K+2)(N-K+1)}{K(K-1)(K-2)\ \dots\ \ 2\ \cdot\ 1}$$

(unterscheidbare) Arten möglich.
Beispiel: Auf wie viele Arten kann aus einer Gruppe von 20 Menschen ein 3-köpfiges Vertretungsgremium (dessen Mitglieder alle die gleichen Kompetenzen haben) gebildet werden?
Beispiel: Lotto „6 aus 45“ (ohne Berücksichtigung der Zusatzzahl) – wie viele verschiedene Tipps sind möglich?
Beispiel: Wie oft erklingen die Gläser, wenn 10 Personen einander zuprosten?

Kombinationen mit Wiederholung

N (unterscheidbaren) Elementen sollen K Mascherln umgebunden werden. Dabei sind die Mascherln *nicht unterscheidbar*, und jedes Element darf *mehrere* Mascherln bekommen. Das ist auf

$$\binom{N+K-1}{K} = \frac{(N+K-1)!}{K!(N-1)!}$$

(unterscheidbare) Arten möglich.
Beispiel: 50 Sportlerinnen nehmen an 7 Bewerben (bei denen es jeweils genau eine Siegerin gibt) teil. Auf wie viele Arten können die Preise verteilt werden?

Variationen ohne Wiederholung

N (unterscheidbaren) Elementen sollen K Mascherln umgebunden werden. Dabei sind die Mascherln *unterscheidbar* (z.B. durchnummeriert), und jedes Element darf *höchstens ein* Mascherl bekommen. Das ist auf

$$\frac{N!}{(N-K)!}$$

(unterscheidbare) Arten möglich.
Beispiel: Auf wie viele Arten kann aus einem 20-köpfigen Verein ein 3-köpfiger Vorstand, bestehend aus VorsitzendeR, SchriftführerIn und KassierIn, gebildet werden?
Beispiel: 100 Sportler nehmen an einem Bewerb teil. Einer gewinnt Gold, einer Silber, einer Bronze. Wie viele mögliche Ausgänge gibt es?
Spezialfall $K = N$: Die möglichen Mascherlkonfigurationen sind genau die Permutationen der N Elemente (s. o.).

Variationen mit Wiederholung

N (unterscheidbaren) Elementen sollen K Mascherln umgebunden werden. Dabei sind die Mascherln *unterscheidbar* (z.B. durchnummeriert), und jedes Element darf *mehrere* Mascherln bekommen. Das ist auf

$$N^K$$

(unterscheidbare) Arten möglich.
Beispiel: Wie viele „Wörter“ können zustande kommen, wenn 5 Buchstaben (nacheinander) aus einem Alphabet vom Umfang 26 gewählt werden?

In den bisherigen Szenarien waren alle N Elemente unterscheidbar. In der Praxis werden manchmal „identische" Elemente (z.B. Teilchen) betrachtet.

Permutationen mit Gruppen nicht unterscheidbarer Elemente

N (unterscheidbare) Elemente werden in m Gruppen der Größe N_1, N_2, ... N_m zusammengefasst ($N_1 + N_2 + ... + N_m = N$). Elemente innerhalb der gleichen Gruppe sind nicht unterscheidbar. Diesen N Elementen sollen N Mascherln umgebunden werden. Dabei sind die Mascherln *unterscheidbar* (z.B. durchnummeriert), und jedes Element darf *höchstens ein* Mascherl bekommen. Anders ausgedrückt: Die N Elemente sollen auf N Plätze angeordnet (oder in eine Reihenfolge gebracht) werden. Das ist auf

$$\frac{N!}{N_1!\,N_2!\,...\,N_m!}$$

(unterscheidbare) Arten möglich.

Beispiel: Auf wie viele (unterscheidbare) Arten können 10 weiße, 12 schwarze und 14 rote Kugeln auf 36 Plätze angeordnet werden? (Dabei wird angenommen, dass die Kugeln einer Farbe nicht voneinander unterschieden werden können). Die Mascherln, die den Kugeln umgebunden werden, bedeuten die Platznummern.

Spezialfall $m = 2$: Jede Mascherlkonfiguration ist eine Kombination ohne Wiederholung (s. o., mit der Bezeichnung $N_1 = K$, daher $N_2 = N - K$).

Beispiel: Auf wie viele (unterscheidbare) Arten können 10 weiße und 15 schwarze Kugeln auf 25 Plätze angeordnet werden? (Dabei wird angenommen, dass die Kugeln einer Farbe nicht voneinander unterschieden werden können). Diese Aufgabe kann auch so formuliert werden: Auf wie viele (unterscheidbare) Arten können 10 der 25 Plätze (auf denen die weißen Kugeln Platz nehmen) ausgewählt werden? (Jeder Platz, auf dem eine weiße Kugel liegt, bekommt ein Mascherl).