

Satz von Euler und RSA-Verfahren

[Außermathematische Anwendungen im Mathematikunterricht](#)

WS 2012/13

[Franz Embacher](#), Universität Wien

Satz von Euler

(in einer für das RSA-Verfahren zurechtgeschneiderten Form):

Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen, k eine natürliche Zahl und x eine natürliche Zahl $< p q$. Dann gilt

$$x^{k(p-1)(q-1)+1} \bmod p q = x.$$

(Wir beweisen ihn nicht, sondern erwähnen nur, dass er eine Verallgemeinerung des „kleinen Fermatschen Satzes“ ist.)

Beispiel:

Mit $p = 13, q = 11, k = 2, x = 97$ lautet die Aussage des Satzes

$$97^{2 \cdot 12 \cdot 9 + 1} \bmod 13 \cdot 11 \equiv 97^{241} \bmod 143 = 97.$$

Anwendung im RSA-Verfahren:

1. Alice wählt zwei verschiedene Primzahlen p und q .
2. Sie berechnet
$$n = p q$$
$$m = (p-1)(q-1)$$
3. Sie wählt eine zu m teilerfremde natürliche Zahl a .
4. Sie gibt die Zahlen n und a als „öffentlichen Schlüssel“ bekannt.
5. Bob drückt seine Nachricht (den „Klartext“) als natürliche Zahl $x < n$ aus.
(Beachten Sie: Der Schlüssel n muss genügend lang sein!)
6. Bob verschlüsselt seine Nachricht gemäß der Formel $y = x^a \bmod n$.
7. Er gibt y (den „Geheimtext“) öffentlich bekannt.

8. Alice ermittelt $b = a^{-1} \bmod m$.

b existiert genau dann, wenn a und m teilerfremd sind – was laut Voraussetzung der Fall ist – und ist jene (eindeutig bestimmte) natürliche Zahl zwischen 1 und $m-1$, für die $ab \bmod m = 1$ gilt. In der Praxis wird b mit Hilfe des **erweiterten Euklidischen Algorithmus** berechnet.

Als Folge gibt es eine natürliche Zahl k mit $ab = km + 1$.

9. Alice berechnet $X = y^b \bmod n$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} X &= y^b \bmod n = (x^a \bmod n)^b \bmod n = \\ &= x^{ab} \bmod n = x^{km+1} \bmod n \stackrel{\text{Satz von Euler}}{=} x \end{aligned}$$

Das ist aber genau Bobs Klartext!

Der wesentliche Punkt ist, dass zur Entschlüsselung die Zahl m bekannt sein muss! Da n öffentlich bekannt ist, ist das wegen

$$\begin{aligned} n &= p q \\ m &= (p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = n + (p+q) - 1 \end{aligned}$$

de facto gleichbedeutend damit, p und q , also die Primfaktoren von n , zu kennen.