Dynamische Prozesse

Außermathematische Anwendungen im Mathematikunterricht
WS 2014/15
Franz Embacher, Universität Wien

Wachstums- und ähnliche Prozesse

Mit der diskreten Beschreibung von Wachstums- und ähnlichen dynamischen Prozessen werden etliche für den Mathematikunterricht wichtigen Themen, Techniken und Kompetenzen angesprochen (Differenzengleichungen, Folgen und rekursive Folgendarstellung, Modellierung, Abhängigkeit eines Modells von Parametern, Vorhersage, Interpretation).

Das Setting

Wir stellen uns irgendeine Population vor (etwa von Tieren oder anderen Organismen in einem Ökosystem; die Details sind dabei zunächst nicht wichtig), deren Größe wir über einen bestimmten Zeitraum in **diskreten Schritten** verfolgen wollen:

- Zu einem Anfangszeitpunkt soll die Zahl der Individuen der Population a_0 betragen,
- einen Zeitschritt später beträgt sie a_1,
- wieder einen Zeitschritt später beträgt sie a_2,
- usw.

Um welche Zeitintervalle es sich dabei handelt, ist im allgemeinen Setting unerheblich – es kann sich um Stunden handeln (etwa, wenn es um eine Bakterienkultur geht), um Jahre (wenn man beispielsweise an die Zahl der Mücken in einem Augebiet denkt) oder um Generationen (bei menschlichen Populationen oder auch bei wildlebenden Tieren oder Nutztieren mit einem mehrjährigen Fortpflanzungszyklus).

Was auch immer die Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3, ... bedeuten, sie bilden eine Folge, deren n-tes Glied wir als a_n bezeichnen. Da es sich bei den a_n um Individuenzahlen einer Population handelt, sollten sie natürliche Zahlen sein, aber das werden wir nicht so genau nehmen. (Schließlich kann man auch ohne weiteres sagen, dass in einer Stadt mit hunderttausend erwachsenen Einwohnern jeder Siebente die Zeitung XY liest, ohne sich daran zu stoßen, dass 100000/7 keine natürliche Zahl ist.)

Wir werden nun im Folgenden einige Szenarien durchspielen, bei denen wir jeweils mit der Formulierung eines dynamischen **Veränderungsgesetzes** beginnen, das „im Kleinen“, also nur für einen oder für wenige Zeitschritte wirkt, und in der Folge – unterstützt durch Tabellenkalkulation – das sich daraus ergebende dynamische Verhalten für gewisse Anfangszustände über längere Zeiten berechnen und visualisieren.

Exponentielle Prozesse

Wir beginnen mit einem sehr einfachen und wohlbekannten Szenario: Von einem Zeitpunkt zum nächsten soll die Population um einen relativen Anteil q der bisher erreichten Größe wachsen. Etwas genauer: Um aus dem bis zum ($n-1$)-ten Zeitpunkt erreichten Wert a_{n-1} den nächsten Wert a_n zu erhalten, wird qa_{n-1} zu a_{n-1} addiert. Daher ist

$$a_n = a_{n-1} + q\,a_{n-1}$$

oder

$$a_n = (1+q)\,a_{n-1}\ .$$

Der Parameter q ist die Wachstumsrate. Er kann auch in Prozent angegeben werden (eine Wachstumsrate von 3% entspricht $q = 0.03$) und soll positiv sein, um seinem Namen *Wachstums*rate gerecht zu werden. Beginnen wir mit einem beliebigen Anfangswert a_0, so ist

$$a_1 = (1+q)\,a_0\ ,$$
$$a_2 = (1+q)\,a_1 = (1+q)^2\,a_0\ ,$$
$$a_3 = (1+q)\,a_2 = (1+q)^3\,a_0\ ,$$
usw.,

allgemein

$$a_n = (1+q)^n\,a_0\ .$$

Der Prozess vollzieht sich daher als allseits bekanntes **exponentielles Wachstum**. Das Wachstumsgesetz $a_n = (1+q)\,a_{n-1}$, zusammen mit der Angabe eines Anfangswerts a_0, ist eine **rekursive Folgendarstellung**. Wir können es auch in der Form

$$a_n - a_{n-1} = q\,a_{n-1}$$

anschreiben. Da hier eine Aussage über die Differenz $a_n - a_{n-1}$, also über die absolute Änderung der Populationsgröße beim Übergang vom ($n-1$)-ten zum n-ten Zeitpunkt vorliegt, heißt eine solche Darstellung **Differenzengleichung**.

Theoretisch könnte der Parameter q in den obigen Beziehungen auch negativ gewählt werden. In diesem Fall stellt die Folge (a_n) kein Wachstum, sondern einen Prozess der **exponentiellen Abnahme** (Schrumpfen) dar.

In einer konkreten Modellierung der Entwicklung einer Population wird q aus mehreren Teilen bestehen. Für eine natürlich lebende Population wird man im einfachsten Fall

$$q = \text{Geburtsrate} - \text{Sterberate}$$

setzen. Bei wirtschaftlich genutzten Tierpopulationen könnte an die Stelle der Sterberate ein Wert treten, der die regelmäßige Entnahme eines bestimmten Anteils der Population beschreibt.

Bei der Modellierung ist natürlich vorausgesetzt, dass q nicht von der Größe der Population beeinflusst wird. Es gilt dann:

- Ist $q > 0$, so wird die Population (exponentiell) wachsen,
- ist $q = 0$, so wird sie stabil bleiben, und
- ist $q < 0$, so wird sie (exponentiell) schrumpfen.

Die Dynamik, die sich aus der rekursiven Darstellung (bzw. der Differenzengleichung) ergibt, wird durch die oben erhaltene Beziehung $a_n = (1+q)^n a_0$ explizit als Funktion von n angegeben, womit eigentlich alles gelöst ist. Die Funktion $n \mapsto a_n$ kann (etwa mit GeoGebra) als Punktgraph visualisiert werden. Das liefert zwar hier nichts Neues, stellt aber die Methode der Wahl bei komplizierteren Änderungsgesetzen dar, die auf Folgen führen, die unter Umständen gar keine geschlossene Termdarstellung besitzen.

> GeoGebra-Datei:
> http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/aussermathAnw2014/dynamischerProzess_01.ggb
> Als Ausgangseinstellung wird hier verwendet: $q = 0.4$ (ein großer Wert, der aber für die nachfolgenden Modifikationen günstig ist) und $a_0 = 100$.

Exponentielle Modelle haben – so wie andere Modelle auch – bestimmte Gültigkeitsgrenzen: Während sich exponentielles Schrumpfen quasi von selbst begrenzt (sobald a_n in der Größenordnung von 1 oder kleiner ist, würde man davon sprechen, dass die Population ausgestorben ist), sprengt exponentielles Wachstum jede Grenze. In der Praxis wird es beschränkende Faktoren geben, denen wir uns nun zuwenden.

Logistisches Wachstum

Betrachten wir eine Population, die, solange sie klein ist, durch einen Wachstumsparameter $q>0$ charakterisiert ist (also zunächst exponentiell wächst), bei der sich aber mit zunehmender Größe auch begrenzende Faktoren einstellen. Wie könnten derartige Begrenzungen modelliert werden? Ein einfacher Ansatz besteht in der Annahme, dass in der Population irgendeine Form von **Konkurrenz** (beispielsweise um Nahrungsressourcen) stattfindet. Wir modellieren sie folgendermaßen: In einem gewissen Zeitraum wird jedes Individuum irgendwann mit jedem anderen Individuum um eine Ressource konkurrieren oder auf andere Weise bei einer Begegnung bedroht sein. Bei einer Populationszahl a_n werden $\frac{1}{2}a_n(a_n-1)$ derartige Begegnungen stattfinden. (Warum?) Das Modell besteht nun darin, anzusetzen, dass bei einem bestimmten relativen Anteil dieser Ereignisse Opfer zu beklagen sind. Das kann in der Praxis vielerlei bedeuten:

- Nahrungskonkurrenz: Die modellierte Konkurrenzsituation besteht darin, dass zwei Individuen auf eine Nahrungsressource stoßen, die nur für einen reicht. Der andere verhungert oder – weniger drastisch gedacht – hat aufgrund von Nahrungsmangel zu wenig Ressourcen für eine erfolgreiche Fortpflanzung.
- Eine Population von Tieren, die einander aus dem Weg gehen wollen, aber in einem begrenzten Ökosystem leben. Je dichter sie leben, umso häufiger kommt es zu Aggressionshandlungen, die manchmal tödlich enden.
- Eine Population von Tieren in einem begrenzten Ökosystem, die von Parasiten, die ihre Fruchtbarkeit beeinträchtigen, geplagt werden und einander anstecken. Die modellierte Konkurrenzsituation besteht darin, dass bei einer Begegnung Ansteckung stattfindet, die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu Unfruchtbarkeit führt.

Unsere Überlegung führt also auf den Ansatz, dass beim Übergang vom Zeitpunkt $n-1$ zum Zeitpunkt n ein Teil der Population ausscheidet, der proportional zu $a_{n-1}(a_{n-1}-1)$ ist. Da Populationszahlen meist sehr viel größer als 1 sind, nähern wir das als $a_{n-1}{}^2$ an.[1] Daher veranschlagen wir als Änderungsgesetz „im Kleinen" eine Differenzengleichung der Form

$$a_n - a_{n-1} = q\,a_{n-1} - k\,a_{n-1}{}^2$$

mit $q,k>0$ oder, anders ausgedrückt, eine rekursive Folgendarstellung der Form

$$a_n = (1+q)\,a_{n-1} - k\,a_{n-1}{}^2 \ .$$

[1] Eine Alternative bestünde darin, $a_{n-1}(a_{n-1}-1) = a_{n-1}{}^2 + a_{n-1}$ zu schreiben und den zweiten Summanden dem Wachstumsterm qa_{n-1} zuzuschlagen, was einfach darauf hinausläuft, q geringfügig zu verkleinern.

Der hier auftretende Term $-k\,a_{n-1}{}^2$ wirkt aufgrund seines Vorzeichens der Vergrößerung der Population entgegen. Je größer a_{n-1} ist, umso stärker wird er sich auswirken. (In der Praxis muss man den Parameter k klein genug wählen, um nicht gleich mit einem Sprung der Populationszahl ins Negative zu beginnen). Ein solches Modell heißt **logistisches Wachstum**. Wir verzichten auf eine analytische Behandlung, sondern überlegen, welche Dynamik man aufgrund des Veränderungsgesetzes erwarten würde: Zu Beginn wird angenommen, dass $q\,a_{n-1}$ über $k\,a_{n-1}{}^2$ dominiert, d.h. dass zunächst näherungsweise exponentielles Wachstum stattfindet. Während die Population wächst, wird der Zuwachs $q\,a_{n-1} - k\,a_{n-1}{}^2$ (also die rechte Seite der Differenzengleichung) immer kleiner. (Warum ist diese Tendenz unaufhaltsam?). Das bedeutet aber, dass auch die Differenz $a_n - a_{n-1}$ (die linke Seite der Differenzengleichung) immer kleiner wird. Für nicht allzu extreme Werte der Parameter q und k und des Anfangswerts a_0 erwarten wir daher, dass die Entwicklung langsam zum Stillstand kommt. Formal bedeutet das: Für $n \to \infty$ erwarten wir, dass $a_n \to a$, d.h. dass die Folge gegen einen bestimmten Wert $a > 0$ konvergiert. Ist das tatsächlich der Fall, so finden wir den Grenzwert, indem wir $\lim\limits_{n\to\infty}$ von beiden Seiten der Differenzengleichung bilden. Wir erhalten

$$q\,a - k\,a^2 = 0\,,\quad \text{daher (mit } a>0\text{)}\ \ q - k\,a = 0\,,\quad \text{folglich}\ \ a = \frac{q}{k}\,.$$

Treffen diese Erwartungen zu, so wird sich die Population dem Wert q/k annähern, der dann die **Kapazitätsgrenze** (das „Fassungsvermögen“) des betreffenden Ökosystems angibt. Die Visualisierung der Dynamik dieses Modells mit nicht extremen Zahlenwerten für q, k und a_0 bestätigt die Erwartungen.[2]

> GeoGebra-Datei:
> http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/aussermathAnw2014/dynamischerProzess_02.ggb
> Aus Ausgangseinstellung wird hier verwendet: $q = 0.4$, $k = 0.0001$ und $a_0 = 100$. (Es ist nicht ganz trivial, Werte für q, k und a_0 zu finden, die zu einer Dynamik führen, deren wesentliche Charakteristika nach nicht allzu vielen Zeitschritten erkennbar werden). Die Kapazitätsgrenze beträgt $q/k = 0.4/0.0001 = 4000$ Individuen. Größer wird die Population nicht.

Zeitliche Entwicklungen wie diese können näherungsweise bei den verschiedensten Populationen beobachtet werden. Sie treten aber auch in anderen Zusammenhängen (aufgrund anderer Ursachen) auf, beispielsweise bei der Ausbeutung von Ressourcen wie Erdöl (summiert über eine größere Zahl von Erdölfeldern, vermutlich auch für die Summe über alle Erdölvorkommen eines gewissen Typs). In diesem Fall gibt a_n die bis zum Zeitpunkt

[2] Extreme Werte für die beiden Parameter und für den Anfangswert führen auf ein chaotisches Verhalten, das hier nicht das Thema ist.

n geförderte Ölmenge an, $a_n - a_{n-1}$ entspricht der jährlichen Fördermenge. Trifft das Modell zu, so ist die Ölfördermenge gerade dann maximal, wenn ungefähr die Hälfte des Öls bereits gefördert wurde. Dieser Zeitpunkt („Peak Oil") ist nach ExpertInnenmeinung beim konventionellen Erdöl bereits überschritten.

Zeitverzögertes logistisches Wachstum

Ausgerüstet mit dem Konzept der rekursiven Folgendarstellung (bzw. der Differenzengleichung) können nun auch andere Modelle behandelt werden. Eine mögliche Modifikation ist folgende: Wir nehmen an, dass die begrenzende Wirkung, die beim logistischen Wachstum durch den Term $-k\,{a_{n-1}}^2$ dargestellt wird, erst mit einer gewissen **zeitlichen Verzögerung** auftritt. Konkret soll sie sich erst einen Zeitschritt später auswirken als beim logistischen Wachstum. Wir setzen daher als Änderungsgesetz an:

$$a_n = (1+q)\,a_{n-1} - k\,{a_{n-2}}^2$$

Jetzt müssen wir beim Beginn des Prozesses ein bisschen aufpassen: Das obige Gesetz kann nur für $n = 2, 3, 4, \ldots$ gelten, denn für $n = 1$ würde es auf einen Wert a_{-1} verweisen, den es nicht gibt. Für $n = 1$ setzen wir stattdessen an

$$a_1 = (1+q)\,a_0 \ .$$

Zusammen mit der Angabe eines Anfangswerts a_0 ist damit die Dynamik festgelegt. Als weitere Vorgangsweise bei der Behandlung eines solchen Modells bietet sich an

- Anstellen von Vermutungen, wie die Dynamik aussehen wird. (Was meinen Sie?)
- Mit GeoGebra visualisieren.
- Interpretieren, was wir sehen!

Hier wieder eine fertige Bearbeitung:

GeoGebra-Datei:
http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/aussermathAnw2014/dynamischerProzess_03.ggb
Aus Ausgangseinstellung wird hier wieder verwendet: $q = 0.4$, $k = 0.0001$ und $a_0 = 100$.

Das Ergebnis mag überraschend sein: Eine Population, die „über ihre Verhältnisse" lebt (genauer: über die Verhältnisse ihres Ökosystems), die Folgen aber erst mit einer zeitlichen Verzögerung gewärtigen muss, schießt über die Kapazitätsgrenze hinaus, wird in der Folge unter diese gedrückt und steigt (sofern sie nicht bis zum Aussterben reduziert wird) danach wieder an, woraus sich ein oszillierendes Verhalten ergibt. Es handelt sich also bei dieser Dynamik – trotz ihres Namens – nicht um ein ständiges Wachstum, und der Begriff „Kapazitätsgrenze" muss präzisiert werden, etwa als „nachhaltige Kapazitätsgrenze".

Zeitliche Entwicklungen wie diese wurden in natürlichen Populationen beobachtet, etwa bei Lemmingen in Kanada. Es gibt Stimmen (beispielsweise die ExtertInnen vom *Club of Rome*), die warnen, dass für die Menschheit bei ihrem heutigen Umgang mit den Ressourcen der Erde ein ähnliches Gesetz gilt und der Wert q/k bereits überschritten ist!

Weitere Modifikationen

Lassen Sie ihre Phantasie spielen und probieren Sie weitere Varianten von Änderungsgesetzen aus! Beispiele wären:

- $a_0 =$ gegeben

  $a_1 = (1+q)\,a_0$

  $a_n = (1+q)\,a_{n-1} - r\,a_{n-2}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$

  Was könnte zu einem solchen Änderungsgesetz führen? Welche Dynamik würde man erwarten?
- $a_0 =$ gegeben

  $a_n = (1+q)\,a_{n-1} - s\,n\,a_{n-1}$ für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

  Was könnte zu einem solchen Änderungsgesetz führen? Welche Dynamik würde man erwarten?
- $a_0 =$ gegeben

  $a_n = (1+q)\,a_{n-1} - \left(1 - \exp\left(-(n-10)^2/\sigma^2\right)\right) u\,a_{n-1}$ für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

  Was könnte zu einem solchen Änderungsgesetz führen? Welche Dynamik würde man erwarten?
- Wechselspiel zweier Populationen (a_n) und (b_n). Die erst besteht aus „Räubern“, die sich hauptsächlich von der zweiten ernähren. Die zweite („Beute“) hat zwar an sich eine hohe Geburtenrate, wird aber von der ersten gejagt:

  $a_0 =$ gegeben

  $b_0 =$ gegeben

  $a_n = a_{n-1} + \alpha\,b_{n-1}a_{n-1} - k\,a_{n-1}$ für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

  $b_n = (1+q)\,b_{n-1} - \beta\,a_{n-1}b_{n-1}$ für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

  Wie sind die Parameter α, k, q und β zu interpretieren? Welche Dynamik würde man erwarten?