Random Walk in einer Dimension

Außermathematische Anwendungen im Mathematikunterricht
WS 2012/13
Franz Embacher, Universität Wien

Zufallsbewegungen (Random Walks)

dienen als Modelle für Prozesse wie die **Brownsche Bewegung** (etwa die unter dem Mikroskop sichtbare und durch Molekülstöße bewirkte „Zitterbewegung" von Pollenkörnern in einem Wassertropfen oder Fetttröpfchen in der Milch, die sich bei längerer Beobachtung als scheinbar regelloses „Umherwandern" herausstellt (siehe dazu das Video http://www.youtube.com/watch?v=ra1mRVzqqck) und für Diffusionsvorgänge verantwortlich ist) oder das **Roulettspiel** „ohne 0" (wobei stets der gleiche Einsatz auf rot oder schwarz gesetzt wird). Es sind dies Vorgänge, die wir uns leicht „vorstellen" können. Ihre quantitative Beschreibung bietet anschauliche Einsichten in wahrscheinlichkeits-theoretische Begriffe wie jene der **Wahrscheinlichkeitsverteilung** und des **Erwartungswerts** und kann zudem mit einigen Überraschungen aufwarten.

Random Walk in einer Dimension

Die einfachste Variante des Random Walk, auf die wir uns hier beschränken wollen, findet in einer einzigen Dimension mit fixer Schrittlänge a statt, wobei – bildlich gesprochen – mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit ein Schritt nach links oder rechts gemacht wird. Um dies zu modellieren, bedienen wir uns einer Folge von **Zufallsvariablen** d_1, d_2, d_3,... (entsprechend dem ersten, zweiten, dritten,... Schritt), die jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2 den Wert $-a$ oder a annehmen können und unabhängig voneinander „gewürfelt" werden (also statistisch unabhängige Zufallsvariablen darstellen).

Die Zufallsbewegung selbst entsteht dann durch Aufsummierung dieser Zufallsvariablen. Wir beginnen beim Startwert $x_0 = 0$ und gehen dann eine beliebige Zahl von „Schritten" weiter:

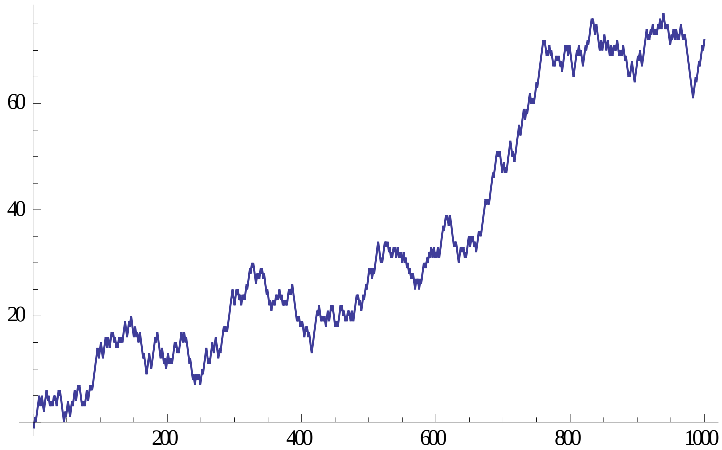
$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_0 + d_1 = d_1 \\
&x_2 = x_1 + d_2 = d_1 + d_2 \\
&x_3 = x_2 + d_3 = d_1 + d_2 + d_3 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Die Werte x_0, x_1, x_2, ... können als Position eines Pollenkorns in einem (eindimensional modellierten) Wassertropfen oder als Kontostand beim Roulettespiel gedeutet werden. Nach n Schritten sind wir bei

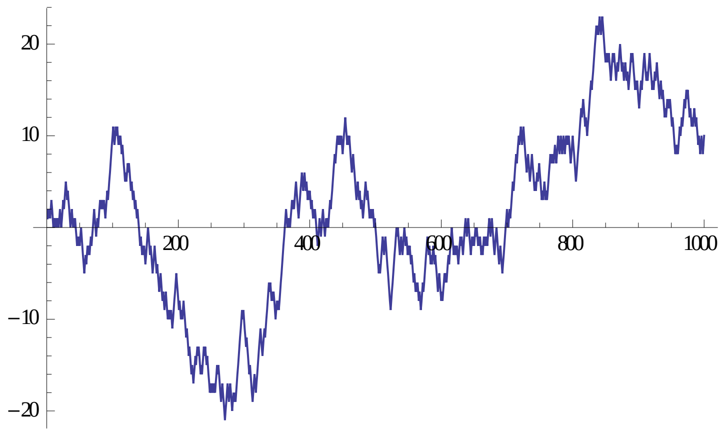
$$x_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n \equiv \sum_{j=1}^{n} d_j$$

angelangt. Wichtig ist, dass jedes x_n eine Funktion der elementaren Zufallsvariablen d_1, d_2, d_3, … ist.

Um von „Statistik“ und „statistischen Eigenschaften“ sprechen zu können, ist es nützlich, sich vorzustellen, dass dieser abstrakt definierte Zufallsprozess sehr oft ***„realisiert“*** wird, d.h. dass sehr oft konkrete Werte aller d_j „gewürfelt“ werden. Die sich ergebenden Zufallsbewegungen werden alle verschieden sein und beispielsweise so



oder so



aussehen (hier ist jeweils n nach rechts und x_n nach oben aufgetragen, die Schrittlänge ist $a = 1$). Das von vielen (theoretisch allen, also unendlich vielen) Realisierungen dieses Prozesses gebildete „statistische Ensemble“ ist die Grundlage zur Beantwortung von Fragen nach Wahrscheinlichkeiten oder nach dem „typischen“ Verhalten.

Die obigen Grafiken illustrieren die „Gedächtnislosigkeit“ (**Markov-Eigenschaft**) der Zufallsbewegung: Die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Schritt nach rechts oder links (bzw. nach oben oder unten) zu wandern, hängt nicht von der Vorgeschichte ab. Ein einmal erreichter Wert kann als neuer Anfangspunkt definiert werden, was einfach bedeutet, das Kurvenstück links dieses Punktes wegzulassen und die abgeschnittene Kurve so zu verschieben, dass sie wieder im Ursprung beginnt. An der neuen Kurve ist nicht zu erkennen, dass sie auf eine solche Weise zustande gekommen ist.

Wie weit kommen wir nach n Schritten?

Die wichtigste Frage eines Roulettespielers, der, ausgehend vom „Kontostand“ $x_0 = 0$, vorhat, stets den gleichen Betrag a auf rot oder schwarz zu setzen (und dabei die 0, die die Bank ja letztlich immer zum Gewinner macht, ignoriert), lautet: Werde ich gewinnen oder verlieren? Wie hoch wird mein Gewinn oder Verlust nach n Spielen sein?

Grundsätzlich ist es möglich, nach 10 Spielen einen Gewinn von $10a$ einzustreichen. Das ist allerdings nicht sehr wahrscheinlich. (Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt mit 2^{-10} ungefähr ein Tausendstel). Welche Erwartung wäre realistischer? Um Fragen nach der *Erwartung* einer stochastischen (d.h. durch Zufall zustande kommenden) Größe präzise stellen zu können, wurde der Begriff des **Erwartungswerts** erfunden. Dazu stellen wir uns eine große Zahl von Realisierungen unseres Prozesses vor. Die Größe, um die es geht, beispielsweise der Ort bzw. Kontostand x_n, wird in den verschiedenen Realisierungen unterschiedliche Werte annehmen. Der Erwartungswert ist der *Mittelwert* dieser Werte (im Grenzfall einer unendlich großen Anzahl von Realisierungen). Wir schreiben ihn mit spitzen Klammern: Der Erwartungswert von x_n wird in der Form $\langle x_n \rangle$ notiert. Berechnen wir ihn:

$$\langle x_n \rangle = \langle d_1 + d_2 + \ldots + d_n \rangle = \underbrace{\langle d_1 \rangle}_{0} + \underbrace{\langle d_2 \rangle}_{0} + \ldots \underbrace{\langle d_n \rangle}_{0} = 0$$

oder, kompakter angeschrieben:

$$\langle x_n \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} d_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\langle d_j \rangle}_{0} = 0 . \qquad (1)$$

Dabei haben wir verwendet, dass der Erwartungswert (Mittelwert über viele Realisierungen) einer Summe die Summe der Erwartungswerte ist, und dass der Erwartungswert jedes einzelnen d_j verschwindet. Letzteres ergibt sich daraus, dass für jedes gegebene j in ungefähr der Hälfte der Realisierungen $d_j = a$ und in den verbleibenden Realisierungen $d_j = -a$ sein wird (und zwar umso genauer, je größer die Zahl der Realisierungen ist). Der Mittelwert ist daher gleich 0:

$$\langle d_j \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad j = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (2)$$

Das Ergebnis (1) ist intuitiv klar: „Im Mittel“ wird der Spieler weder gewinnen noch verlieren. Das resultiert einfach daraus, dass Gewinn und Verlust (bzw. Bewegung nach links und Bewegung nach rechts) gleich wahrscheinlich sind. In der Praxis können die Gewinne oder Verluste aber beträchtlich sein! Um abzuschätzen, wie groß sie „im Mittel“ sein werden, könnten wir fragen, „wie weit weg vom Ausgangspunkt“ x_n typischerweise sein wird. Das wäre die Frage nach dem Erwartungswert $\langle |x_n| \rangle$. Mathematisch leichter in den Griff bekommen lässt sich der Erwartungswert $\langle x_n{}^2 \rangle$, dessen Quadratwurzel $\sqrt{\langle x_n{}^2 \rangle}$ ein ungefähres Maß für die erwartete „Entfernung" vom Ausgangspunkt ist. Berechnen wir ihn:

$$\begin{aligned} \langle x_n{}^2 \rangle &= \langle d_1{}^2 + \ldots + d_n{}^2 + 2d_1 d_2 + 2d_1 d_3 + \ldots \rangle = \\ &= \underbrace{\langle d_1{}^2 \rangle}_{a^2} + \ldots + \underbrace{\langle d_n{}^2 \rangle}_{a^2} + 2\underbrace{\langle d_1 d_2 \rangle}_{0} + 2\underbrace{\langle d_1 d_3 \rangle}_{0} + \ldots = n\,a^2 \end{aligned}$$

oder, kompakter angeschrieben:

$$\langle x_n{}^2 \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} d_j{}^2 + 2\sum_{j<k} d_j d_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\langle d_j{}^2 \rangle}_{a^2} + 2\sum_{j<k} \underbrace{\langle d_j d_k \rangle}_{0} = n\,a^2 . \tag{3}$$

Dabei haben wir die für alle j und für alle Paare (j,k) mit $j \neq k$ geltenden Beziehungen

$$\langle d_j{}^2 \rangle = a^2 \quad \text{und} \quad \langle d_j d_k \rangle = 0$$

verwendet. Die erste rührt daher, dass in jeder Realisierung $d_j = (\pm a)^2 = a^2$ gilt, die zweite verdankt sich der statistischen Unabhängigkeit der d_j für verschiedene j. Wir könnten sie auch in der Form

$$\langle d_j d_k \rangle = \underbrace{\langle d_j \rangle}_{0} \underbrace{\langle d_k \rangle}_{0} = 0 \quad \text{für} \quad j \neq k$$

anschreiben. Ziehen wir die Wurzel aus (3), so erhalten wir das Ergebnis

$$\sqrt{\langle x_n{}^2 \rangle} \;=\; a\sqrt{n} . \tag{4}$$

Das Quadrat der „Entfernung vom Ausgangspunkt" nach n Schritten nimmt also *im Mittel* wie n zu (wobei *„im Mittel"* eben bedeutet: als Mittelwert über eine große Zahl von Realisierungen). Die „Entfernung vom Ausgangspunkt" nach n Schritten nimmt *im Mittel* grob wie $\sqrt{n}$ zu (zumindest in dem Sinn, in dem $\sqrt{\langle x_n{}^2 \rangle}$ ein Ersatz für $\langle |x_n| \rangle \equiv \left\langle \sqrt{x_n{}^2} \right\rangle$ ist). Für die Brownsche Bewegung heißt das, dass die Zufallsbewegung das Pollenkorn während der Zeitspanne t (im Mittel) in einen Abstand gebracht hat, der ungefähr proportional zu $\sqrt{t}$ ist.

> Zwischenbemerkung: $\sqrt{\langle x_n{}^2 \rangle}$ ist gerade die die **Standardabweichung** (oder **Schwankung**) von x_n. Ganz allgemein ist die Standardabweichung einer statistischen Größe durch

$$\Delta f=\sqrt{\left\langle \left(f-\langle f\rangle\right)^2\right\rangle}\equiv\sqrt{\left\langle f^2\right\rangle-\langle f\rangle^2}$$

definiert. Da $\langle x_n\rangle=0$ ist, folgt $\Delta x_n=\sqrt{\left\langle {x_n}^2\right\rangle}=a\sqrt{n}$.

Aber was nützt es unserem Roulettespieler, dass er nach 100 Spielen „im Mittel" mit einen Gewinn oder Verlust von etwa $10a$ rechnen kann? Dass er im Voraus nicht weiß, ob er gewinnen oder verlieren wird, ist klar – die entscheidende Frage ist aber, ob er *typischerweise* mit einen Gewinn oder Verlust von etwa $10a$ rechnen kann. Dabei müssen wir bedenken, dass „im Mittel" nicht das Gleiche bedeutet wie „typischerweise".

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von x_n

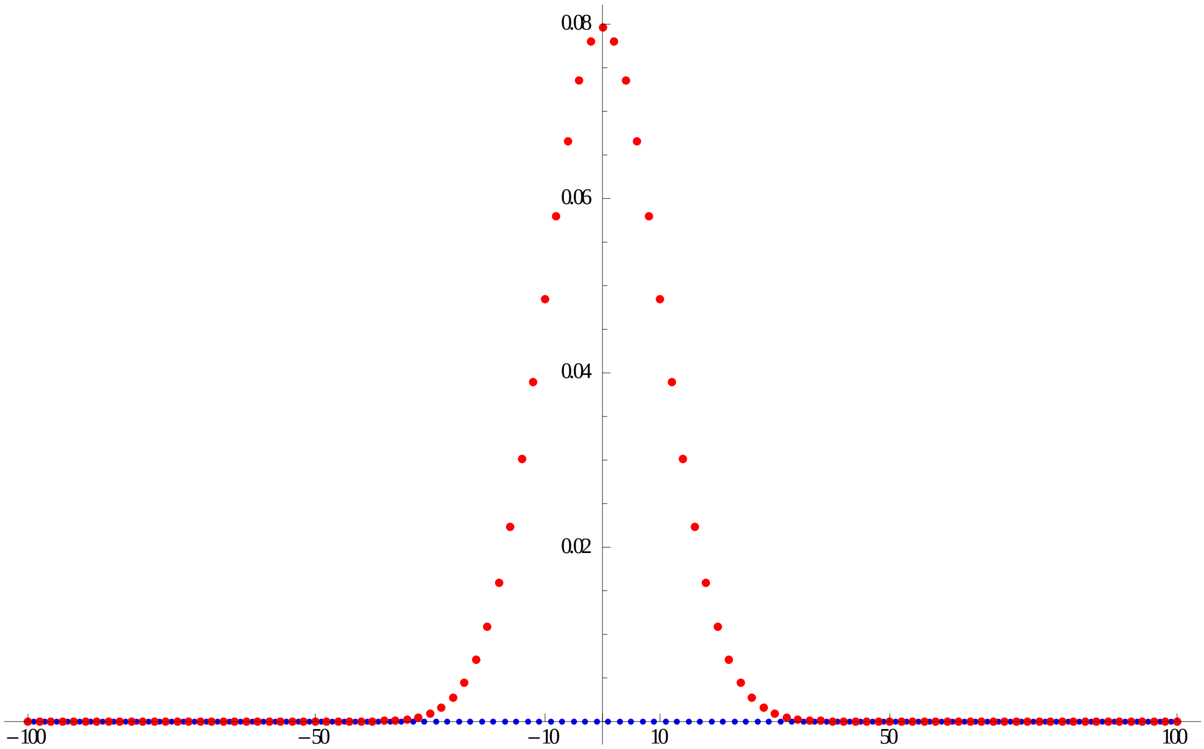
Um die Situation aufzuklären, sehen wir uns am besten nicht einzelne Kennzahlen an, sondern gleich die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung. Wir halten n, die Zahl der Schritte, bis zu der wir gehen wollen, fest, betrachten den Ort $k\,a$ (k ganzzahlig) und fragen: Wie groß ist $\mathrm{Prob}\left(x_n=k\,a\right)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass wir nach n Schritten gerade beim Wert $k\,a$ angelangt sind? Tritt beim „Würfeln" der d_1 bis d_n genau x mal das negative und daher $n-x$ mal das positive Vorzeichen auf, so kommen wir genau bis $x_n=(n-2x)\,a$. Damit das gleich $k\,a$ ist, muss $n-2x=k$ und daher $x=\frac{n-k}{2}$ sein, was nur dann ganzzahlig ist, wenn $n-k$ gerade ist.

- Ist $n-k$ ungerade, so ist $\mathrm{Prob}\left(x_n=k\,a\right)=0$. Das ist keine Überraschung: Nach zwei Schritten kann man nicht an den Ort a gelangen!
- Ist $n-k$ gerade, so erkennen wir eine bekannte Situation: Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen und gleichwahrscheinlichen Ausgängen (das Würfeln der d_j) wird n mal wiederholt. $\mathrm{Prob}\left(x_n=k\,a\right)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer der beiden Ausgänge genau $\frac{n-k}{2}$ mal (und daher der andere genau $n-\frac{n-k}{2}=\frac{n+k}{2}$ mal) eintritt. Das ist gerade die **Binomialverteilung**:

$$\mathrm{Prob}\left(x_n=k\,a\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+k}{2}}\begin{pmatrix}n\\ \frac{n-k}{2}\end{pmatrix}=2^{-n}\begin{pmatrix}n\\ \frac{n-k}{2}\end{pmatrix},$$

wobei anstelle von $\begin{pmatrix}n\\ \frac{n-k}{2}\end{pmatrix}$ auch $\begin{pmatrix}n\\ \frac{n+k}{2}\end{pmatrix}$ geschrieben werden kann. (Die beiden sind aufgrund der Symmetrie des Pascalschen Dreiecks gleich).

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von x_{100} (für $a=1$) sieht daher so aus:



Dabei sind markierten die Werte ± 10 genau $a\sqrt{n}$ für $a = 1$ und $n = 100$. Die blauen Punkte auf der k-Achse entsprechen den Fällen, in denen $n - k$ ungerade ist.

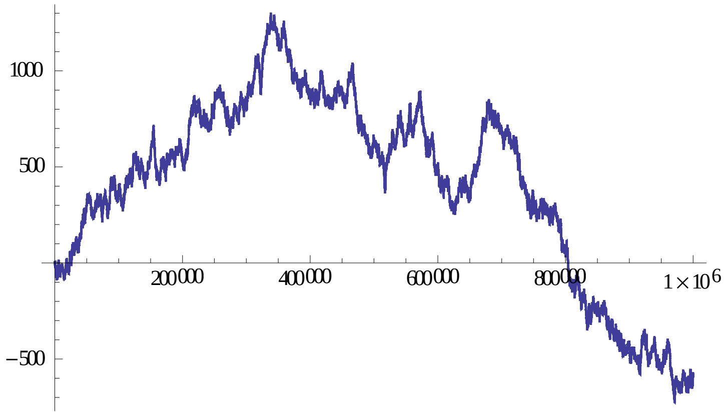
Müssten wir also einen Tipp abgeben, welchen Kontostand unser Spieler nach 100 Schritten hat, so wäre $x_n = 0$ die beste Wette!

Für große n geht die Binomialverteilung in die **Normalverteilung** über. Dieser Übergang ist insbesondere für die Brownsche Bewegung sinnvoll: Der Ort des Pollenkorns zur Zeit t, nun besser mit $x(t)$ bezeichnet, ist normalverteilt. Dieser Sachverhalt ist eine schöne Illustration des **zentralen Grenzwertsatzes**, der (ein bisschen locker formuliert) besagt: Eine Summe aus vielen Zufallsvariablen ist normalverteilt. In physikalischer Hinsicht ist er die Grundlage für den Zusammenhang zwischen Diffusionsprozessen und der Normalverteilung. (Eine – allerdings dreidimensionale – experimentelle Veranschaulichung ist das langsame „Zerfließen" eines Tropfens Tinte in Wasser, bei dem die Tintenkonzentration einer dreidimensionalen Normalverteilung ähnelt, deren Breite wie $\sqrt{t}$ zunimmt).

Rückkehrwahrscheinlichkeit

Wie wahrscheinlich ist es, dass unsere Zufallsbewegung wieder zum Ausgangspunkt zurückführt? Es lässt sich zeigen (Georg Polya, 1887 – 1985), dass die Wahrscheinlichkeit, dass sie *nie wieder* zum Ausgangspunkt zurückkehrt, gleich 0 ist! Das gleiche gilt für eine analoge Zufallsbewegung in der Ebene, nicht aber für Zufallsbewegungen in höheren Dimensionen. („Ein betrunkener Mann findet immer heim, ein betrunkener Vogel nicht").

Daraus folgt für unsere eindimensionale Zufallsbewegung: Die Wahrscheinlichkeit, *irgendwann* wieder zum Ausgangspunkt zurückzukehren, ist gleich 1. Wenn unser Spieler genug Geduld (und Geld) hat, wird er also irgendwann wieder den Kontostand 0 haben. Und wenn er weiterspielt, wird er danach wieder irgendwann den Kontostand 0 haben, usw.! So hätte dieser Spieler besser früher aufhören sollen:



Das ist ein Ergebnis, das man sich intuitiv nicht erwarten würde!

Nun die (theoretische) Überraschung: *Grundsätzlich* kann der Fall eintreten, dass die Zufallsbewegung nie zum Ausgangspunkt zurückkehrt (beispielsweise, wenn jedes Mal $d_j = a$ gewürfelt wird). Wir haben hier also Ereignisse vor uns, deren Wahrscheinlichkeit gleich 0 ist, die aber trotzdem (wie gesagt *grundsätzlich*) eintreten können!

Selbstähnlichkeit

Führen wir Simulationen unserer Zufallsbewegung bis zu sehr großen Schrittzahlen n durch, so scheinen sich die erhaltenen Kurven (sofern die Schrittweite a grafisch nicht mehr aufzulösen ist) nicht mehr zu unterscheiden. Vergleichen Sie etwa die letzte Grafik mit den ersten beiden! Aus einer grafischen Darstellung, in der die Schrittweite a zu klein ist, um aufgelöst zu werden (wobei wir annehmen, dass die waagrechte Achse keine Markierungen enthält, aus denen a hervorgeht), lässt sie sich nicht rekonstruieren!

Diese Eigenschaft rührt von der Gedächtnislosigkeit der Zufallsbewegung her. Sie erlaubt es, den Grenzübergang $a \to 0$ durchzuführen, also „kontinuierliche Zufallsbewegungen" zu betrachten, die auch dann selbstähnlich sind, wenn man sich mikroskopisch in die Graphen hineinzoomt. Das führt auf den so genannten **Wiener-Prozess**, der nicht nur in der Physik (von Albert Einstein und Marian Smoluchowski unabhängig voneinander definiert), sondern auch in den Wirtschaftswissenschaften zur Simulation zufälliger (etwa Markt- und Börsen-) Ereignisse benutzt wird und gegenüber der hier betrachteten diskreten Zufallsbewegung den Vorteil hat, durch eine partielle Differentialgleichung beschrieben zu werden.

Nachbemerkung zum Mathematikunterricht

Einige der hier vorgeführten formalen Begriffe und Argumentationen (insbesondere die Auffassung der Zufallsbewegung als *ein* Zufallsprozess, die Bedeutung des statistischen Ensembles aller möglichen Realisierungen, die Berechnung von $\langle x_n \rangle$ und $\langle {x_n}^2 \rangle$ und deren Interpretation sowie der Zusammenhang mit der Binomialverteilung) sollten im Rahmen des Mathematikunterrichts zu behandeln sein. Gleichzeitig erlauben Computeralgebrasysteme (oder entsprechende andere Programme) die Erstellung von Simulationen und Visualisierungen auch für große Schrittzahlen durch die SchülerInnen selbst.

Lernziel sollte es sein, diese beiden Ansätze (den Formalismus und die Simulation – letztere kann durchaus auch spielerische Züge annehmen) „zusammendenken“ zu können.