Erdbeben

Außermathematische Anwendungen im Mathematikunterricht
WS 2012/13
Franz Embacher, Universität Wien

Entstehung von Erdbeben

Siehe http://geol43.uni-graz.at/08W/GEO521/seismologie.pdf.

Das Magnituden-System

Das bekannteste System zur Angabe der Stärke eines Erdbebens ist die **Richter-Skala**, entwickelt in den 1930er Jahren von Charles Francis Richter (1900 – 1985) am California Institute of Technology. Sie benutzt die so genannte **Lokal-Magnitude**, die folgendermaßen definiert ist: In einer Entfernung von 100 km vom Epizentrum wird der durch das Beben verursachte Maximalausschlag A eines Seismometers nach Wood und Anderson[1] gemessen und in Mikrometer (1 µm = 10^{-6}m) angegeben. Dann ist[2]

$$M = \lg A,$$

wobei $\lg$ der Logarithmus zur Basis 10 ist. Ist die Lokal-Magnitude bekannt, so bestimmt sich der Ausschlag in 100 km Entfernung (in µm) zu

$$A = 10^M .$$

Daraus ergibt sich: Eine Steigerung der Lokal-Magnitude um 1 entspricht einer **Verzehnfachung** des Ausschlags (denn $10^{M+1} = 10 \cdot 10^M$). Nicht nur der Ausschlag, sondern praktisch alle physikalisch interessanten Größen hängen exponentiell von M ab. So ist die bei einem Beben **freigesetzte Energie** näherungsweise proportional zu $A^{3/2}$ und daher zu[3]

$$10^{3M/2} = (10^{3/2})^M \approx 32^M .$$

Eine Steigerung der Magnitude um 1 entspricht ungefähr einer **Verzweiunddreißigfachung** der Energie! Die Magnitude wird daher als „logarithmisches Maß" bezeichnet.

---

[1] Dieses Gerät wird heute nicht mehr verwendet. Die Lokal-Magnitude wird auf der Basis von Messwerten modernerer Geräte ermittelt bzw. hochgerechnet.

[2] In der Literatur wird diese Größe mit M_L bezeichnet.

[3] Etwas genauer: Die freigesetzte Energie ist $E \approx k \cdot 10^{3M/2}$, wobei $k \approx 6 \cdot 10^4\,\text{Joule}$.

Die Lokal-Magnitude wird üblicherweise mit einer Nachkommastelle angegeben und dient bis zu Werten von $M \approx 6$ als Maß für die Stärke eines Erdbebens.[4]

Das Magnituden-System nach Richter illustriert sehr schön die **Nützlichkeit des Logarithmus**: Würde man etwa den Ausschlag A (in µm) als Maß für die Stärke eines Erdbebens verwenden, so ergäben sich Werte, die viele Größenordnungen überstreichen. Zudem können einfache Aufgaben die Grundlagen des **Rechnens mit Logarithmen und Potenzen** anhand einer für viele Menschen relevanten Anwendung veranschaulichen.

> **Frage**: Welche Magnitude hat ein Beben, das einen (in 100 km Entfernung gemessenen) Ausschlag von 0.1 mm (= 100 µm) verursacht?
> **Antwort**: $M = \lg 100 = 2$. (Idee des Logarithmus als „Zahl der Nullen".)
>
> **Frage**: Welche Magnitude hat ein Beben, das einen (in 100 km Entfernung gemessenen) Ausschlag von 0.5 mm (= 500 µm) verursacht?
> **Antwort**: $M = \lg 500 \approx 2.7$.
>
> **Frage**: Welchen Ausschlag verursacht ein Beben der Stärke 3 in 100 km Entfernung?
> **Antwort**: 10^3 µm =1000 µm = 1 mm.
>
> **Frage**: Welchen Ausschlag verursacht ein Beben der Stärke 3.5 in 100 km Entfernung?
> **Antwort**: $10^{3.5}$ µm =3161 µm $\approx$ 3.2 mm.
>
> **Frage**: Gibt es Beben mit negativer Magnitude?
> **Antwort**: Theoretisch ja, das sind die Beben, die einen kleineren Ausschlag als 1 µm verursachen. Man kann aber sprachlich die Konvention treffen, eine derart kleine Erschütterung nicht als Erdbeben zu bezeichnen.

Da sich selten in genau 100 km Entfernung ein Seismometer befindet, muss die Lokal-Magnitude in der Regel aus dem (ebenfalls in µm angegebenem) Ausschlag $A(d)$ in einer Entfernung d bestimmt werden, die man sich nicht aussuchen kann. Da erfahrungsgemäß für Beben verschiedener Stärke die Abhängigkeiten der Ausschläge von der Entfernung zueinander proportional sind (d.h. $A_{\text{Beben 2}}(d) = C\, A_{\text{Beben 1}}(d)$, wobei C von den Stärken der beiden Beben, aber nicht von d abhängt), wird die Lokal-Magnitude üblicherweise in der Form

$$M = \lg\left(\frac{A(d)}{A_0(d)}\right)$$

definiert, wobei $A(d)$ der Ausschlag eines Wood-Anderson-Seismometers[5] in der Entfernung d vom Epizentrum und $A_0(d)$ der von einem Beben der Magnitude 0 in

---

[4] Die höchste gemessene Lokal-Magnitude war $M = 8.6$, und viel größer kann M aus physikalischen Gründen nicht werden. Aufgrund dieser „Sättigung" werden oberhalb von $M \approx 6$ andere Systeme verwendet (siehe weiter unten).

Entfernung d verursachte Ausschlag ist. Die Funktion $A_0(d)$ wird vorab für eine Region (z.B. Südkalifornien) bestimmt und steht dann, wenn ein neuerliches Beben auftritt, zur Verfügung.

Damit ergeben sich weitere Aufgabenstellungen, die ein bisschen Rechnen mit Logarithmen und Potenzen erfordern.

Frage: Wie groß ist $A_0(100\text{ km})$?
Antwort: 1 (d.h. der Ausschlag beträgt 1 µm).

Frage: Für eine bestimmte Region sei $A_0(d) = 10^{0.3\left(1-\frac{d}{100\text{ km}}\right)}$. (Das ist ein für Entfernungen bis zu einigen Hundert Kilometern einigermaßen realistisches Modell). Nun ereignet sich ein Beben, das in 300 km Entfernung zu einem Ausschlag von 1 cm (= 10^4 µm) führt. Bestimme die Magnitude!
Antwort: $M = \lg\left(\dfrac{A(300\text{ km})}{A_0(300\text{ km})}\right) = \lg\left(\dfrac{10^4}{10^{0.3(1-3)}}\right) = 4.6$.

Frage: Für eine bestimmte Region sei $A_0(d) = 10^{0.3\left(1-\frac{d}{100\text{ km}}\right)}$. Nun ereignet sich ein Beben der Magnitude 5.2. Wie groß ist der Seismometer-Ausschlag in 200 km Entfernung vom Epizentrum?
Antwort: Aus $M = \lg\left(\dfrac{A(d)}{A_0(d)}\right)$ folgt $A(d) = 10^M A_0(d)$.
Daher ist $A(200\text{ km}) = 10^{5.2} A_0(200\text{ km}) = 10^{5.2} \cdot 10^{0.3(1-2)} = 10^{5.2-0.3} \approx 8 \cdot 10^4$.
Der Ausschlag beträgt $8 \cdot 10^4 \mu\text{m} = 8\text{ cm}$.

Frage: Zwei Erdbeben ereignen sich mit dem gleichen Epizentrum. In 250 km Entfernung ist der vom ersten Beben verursachte Ausschlag doppelt so groß wie der vom zweiten verursachte Ausschlag. (i) In welchem Verhältnis stehen die Ausschläge der beiden Beben in einer Entfernung von 500 km? (ii) Was lässt sich über die Magnituden der beiden Beben sagen?
Antwort: (i) im gleichen! (ii) Mit $A_1(d) = 10^{M_1} A_0(d)$ und $A_2(d) = 10^{M_2} A_0(d)$ folgt, und zwar ganz unabhängig von d,

$$2 = \frac{A_1(d)}{A_2(d)} = \frac{10^{M_1} A_0(d)}{10^{M_2} A_0(d)} = 10^{M_1 - M_2},$$

daher $M_1 - M_2 = \lg 2 \approx 0.3$. Die Magnitude des ersten Bebens ist um 0.3 größer als jene des ersten.
(Diese Aufgabe zeigt: Ist ein Beben in einer bestimmten Entfernung – gemessen am verursachten Ausschlag – um einen bestimmten Faktor stärker als ein anderes mit dem gleichen Epizentrum, so gilt dies für *jede* Entfernung).

[5] Vgl. Fußnote 1.

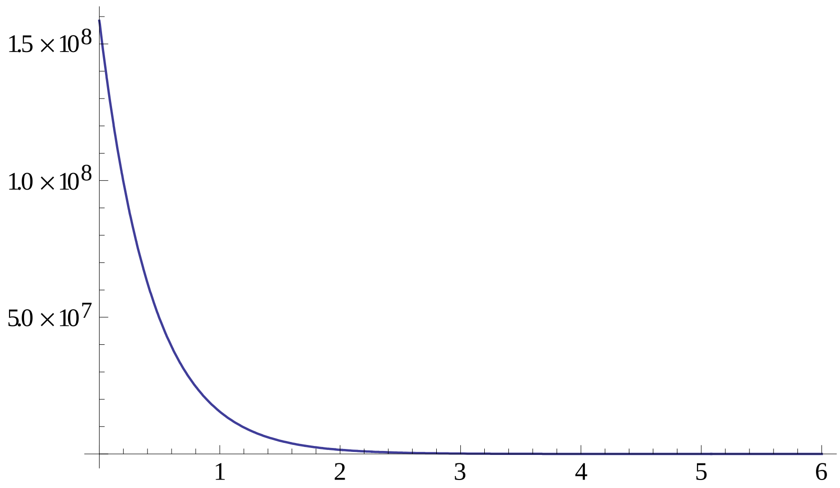
Neben der Richter-Skala gibt es noch andere Maße für die Stärke eines Erdbebens, die jeweils in verschiedenen Stärkebereichen verwendet und als „die Magnitude eines Erdbebens" zusammengefasst werden (siehe etwa http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/glossary.php#magnitude). Die größte jemals gemessene Magnitude betrug 9.6 (Chile 1960). Wir wollen hier zwischen diesen Systemen nicht unterscheiden und ab nun einfach von „der Magnitude" sprechen.

Häufigkeit von Erdbeben

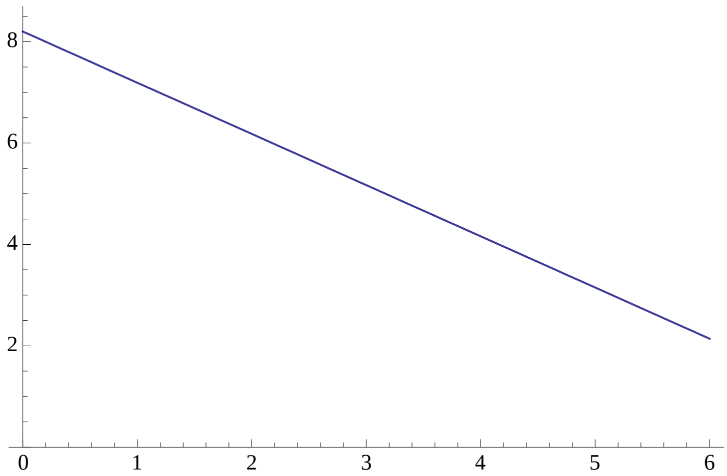
Im Jahr 1954 fanden Beno Gutenberg (1889 – 1960) und Charles Francis Richter durch statistische Auswertung von Erdbeben in Kalifornien einen Zusammenhang zwischen der Häufigkeit und der Stärke von Erdbeben, das sich später als sehr allgemeine Beziehung herausstellte: das **Gutenberg-Richter-Gesetz**: Ist $N(M)$ die Zahl der in einer bestimmten Region pro Jahr stattfindenden Erdbeben mit einer Magnitude von mindestens M, so gilt näherungsweise

$$\lg N(M) = a - b\,M\ ,$$

wobei a und b Konstanten sind. Die Konstante b liegt nahe bei 1, die Konstante a hängt von der Region ab und kennzeichnet deren Seismizität. Das Gesetz gilt auch weltweit, mit $a \approx 8.2$ und $b \approx 1.01$.



Plot der Funktion $M \to N(M)$ für weltweite Erdbeben. Er zeigt, einerseits, dass große Beben sehr selten auftreten ist, illustriert aber auch, dass der Verzicht auf den Logarithmus seine Nachteile besitzt: Für $M > 2.5$ kann man praktisch nichts mehr ablesen.



Plot der Funktion $M \to \lg N(M)$ für weltweite Erdbeben.

Einige Rechenbeispiele:

Frage: Wie viele Erdbeben (positiver Magnitude) finden weltweit pro Jahr statt?
Antwort: $N(0) = 10^{a} \approx 10^{8.2} \approx 1.6 \cdot 10^{8}$.
Dabei überwiegen allerdings die *ganz* schwachen Beben, die nicht immer registriert werden.

Frage: Wie viele Erdbeben mit Magnitude mindestens 6 finden weltweit pro Jahr statt?
Antwort: $N(8) = 10^{a-6b} \approx 10^{8.2-6.06} \approx 140$.
Beben der Magnitude 6 finden etwa alle 3 Tage statt.

Frage: Wie viele Erdbeben mit Magnitude mindestens 8 finden weltweit pro Jahr statt?
Antwort: $N(8) = 10^{a-8b} \approx 10^{8.2-8.08} \approx 1.3$.
Es ist also weltweit ca. einmal pro Jahr mit einem *sehr* starken Beben zu rechnen.

Die Zahl der Beben mit Magnitude zwischen M und $M + dM$ ist durch

$$dN = N(M) - N(M + dM) = 10^{a-bM} - 10^{a-b(M+dM)} \approx -\,dM \frac{d}{dM} 10^{a-bM} =$$

$$= -\,dM \frac{d}{dM} e^{(a-bM)\ln 10} = b \cdot \ln 10 \cdot e^{(a-bM)\ln 10}\, dM \equiv b \cdot \ln 10 \cdot 10^{a-bM}\, dM$$

gegeben.[6] Damit ergibt sich die **Häufigkeitsverteilung** zu

$$\frac{dN}{dM} = b \cdot \ln 10 \cdot e^{(a-bM)\ln 10} \equiv b \cdot \ln 10 \cdot 10^{a-bM}\,.$$

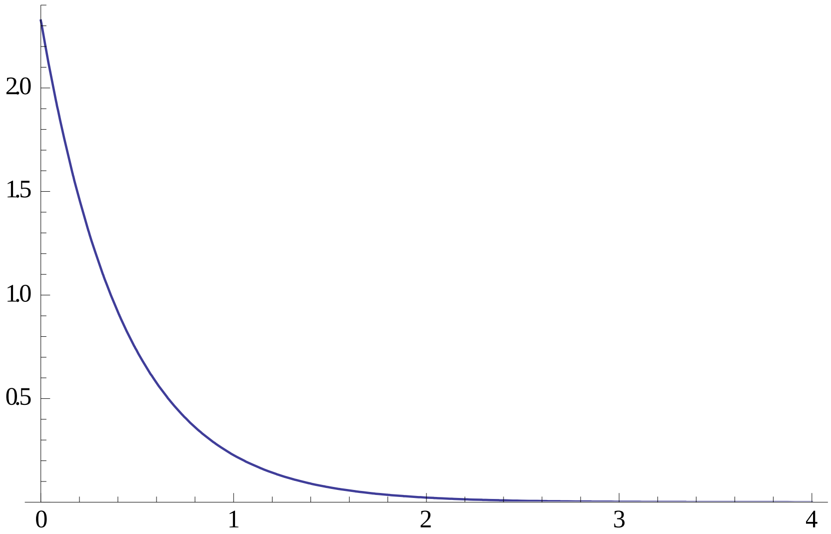
---

[6] Dabei wurde die für alle $a \geq 0$ und für alle reellen x geltende Beziehung $a^{x} = e^{x \ln a}$ verwendet.

Für $M \to -\infty$ (sehr schwache Beben) wird dies beliebig groß. Werden Beben negativer Magnitude außer Acht gelassen, so ist die entsprechende, nun auf $[0,\infty)$ definierte die **Wahrscheinlichkeitsdichte** durch

$$\rho(M) = b \cdot \ln 10 \cdot e^{-b \cdot \ln 10 \cdot M} \equiv b \cdot \ln 10 \cdot 10^{-b\,M}$$

gegeben. Die Magnituden von Erdbeben sind **exponentialverteilt**.



Plot der Wahrscheinlichkeitsdichte $M \to \rho(M)$ für weltweite Erdbeben.

Einige Rechenbeispiele:

> **Frage**: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das nächste irgendwo auf der Erde stattfindende Erdbeben eine Magnitude zwischen 1 und 2 hat?
>
> **Antwort**: $\int_1^2 dM \;\rho(M) = b \cdot \ln 10 \int_1^2 dM \; e^{-b \cdot \ln 10 \cdot M} \approx 2.32 \int_1^2 dM \; e^{-2.32 \cdot M} \approx 0.09$.
>
> **Frage**: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das nächste irgendwo auf der Erde stattfindende Erdbeben eine Magnitude zwischen 3 und 4 hat?
>
> **Antwort**: $\int_3^4 dM \;\rho(M) = b \cdot \ln 10 \int_3^4 dM \; e^{-b \cdot \ln 10 \cdot M} \approx 2.32 \int_3^4 dM \; e^{-2.32 \cdot M} \approx 0.0009$.

Schwache Beben sind bei Weitem die häufigsten. Mit jeder Steigerung der Magnitude um 1 nimmt die Wahrscheinlichkeit (und daher die Häufigkeit) um den Faktor 10 ab (Eigenschaft der Exponentialverteilung).