

Computertomographie

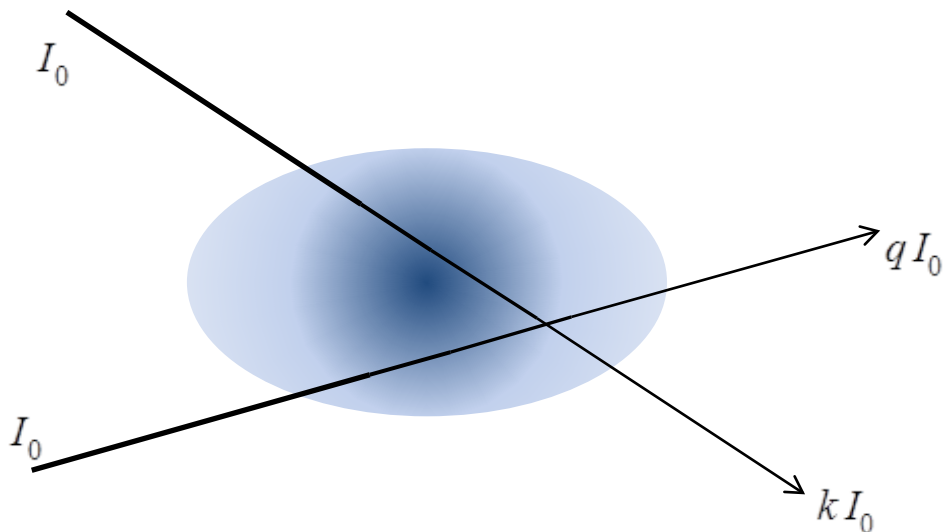
[Außermathematische Anwendungen im Mathematikunterricht](#)

WS 2011/12

[Franz Embacher](#), Universität Wien

Die Idee

Die Idee der Computertomographie besteht darin, aus der Abschwächung (Absorption) von Röntgenstrahlen entlang zahlreicher Sichtstrahlen, die durch einen Körper verlaufen, auf die lokalen, für die Abschwächung verantwortlichen Gewebeverhältnisse zu schließen. Sie wurde in den frühen 1970er Jahren auf der Basis der Forschungsarbeiten von Alan M. Cormack und Godfrey N. Hounsfield realisiert, die im Jahr 1979 dafür mit dem Nobelpreis für Physiologie oder Medizin ausgezeichnet wurden.



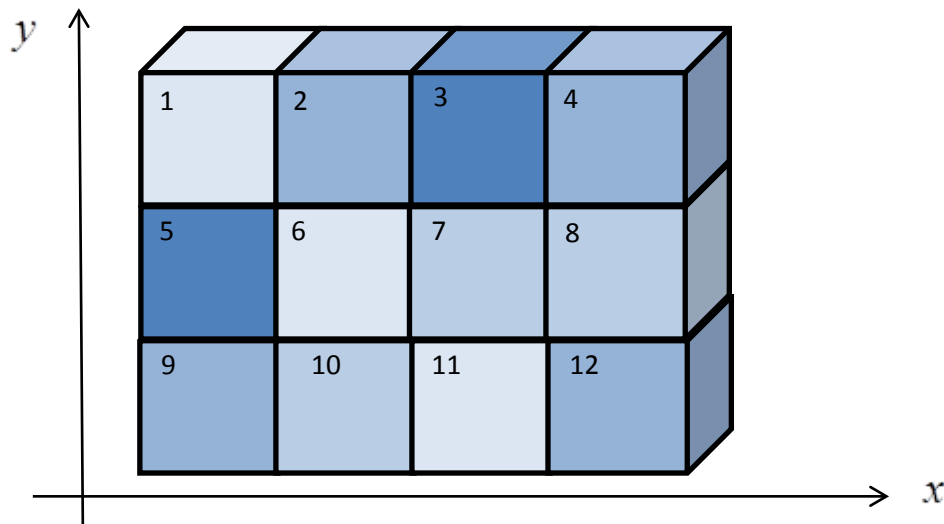
Das mathematische Problem besteht darin, aus zahlreichen gemessenen Abschwächungsfaktoren (in der obigen Skizze durch k und q vertreten) zu rekonstruieren, wie stark die Absorption an den einzelnen Stellen des Gewebes ist. Daraus ergibt sich die räumliche Verteilung unterschiedlicher Gewebetypen bzw. Gewebeeigenschaften.

Das der Computertomographie zugrunde liegende mathematische Verfahren wurde von Johann Radon (1887 – 1956) im Jahr 1917 an der Technischen Hochschule in Wien (heute: Technische Universität Wien) entwickelt. Nach Tätigkeiten in Wien, Göttingen, Brünn, Hamburg, Greifswald, Erlangen, Breslau und Innsbruck wurde Radon im Jahr 1946 Ordinarius am Mathematischen Institut der Universität Wien und war im Studienjahr 1954/55 Rektor.

Einfaches Modell

Bei der Computertomographie wird das zu untersuchende Gewebe schichtweise analysiert, so dass das mathematische Problem der Rekonstruktion de facto ein zweidimensionales ist.

Als vereinfachtes Modell, das die Grundidee der Rekonstruktion illustriert, zerlegen wir eine Schicht des Gewebes in kleine, gleich große würfelförmige Zellen, innerhalb derer wir das Gewebe als homogen ansehen können.



Die Zellen werden (in beliebiger Weise) nummeriert. Beim Durchgang eines Röntgenstrahls durch eine Zelle findet eine Abschwächung, d.h. eine Reduzierung der Intensität um einen bestimmten Faktor statt. Dieser Faktor hängt von der Beschaffenheit des Gewebes in der betreffenden Zelle und von der Länge des Strahlstücks, das in ihr liegt, ab. Ist λ der Absorptionskoeffizient des Gewebes und d die Länge des Strahlstücks, so ist der Abschwächungsfaktor durch $\exp(-\lambda d)$ gegeben.

Alle Strahlen, die eine Gewebeschicht vermessen, fallen parallel zu ihr ein. In der obigen Skizze sind sie parallel zur xy -Ebene, können aber unter beliebigen Winkeln einfallen. In der Praxis wird das dadurch bewerkstelligt, dass die Röntgenquelle um den Patienten herumgeführt wird.

Wir wollen nun der Einfachheit halber die Abhängigkeit von d ignorieren und nehmen an, dass ein durch die j -te Zelle verlaufender Röntgenstrahl um den Faktor $k_j = \exp(-\lambda_j a)$ abgeschwächt wird, wobei a die Kantenlänge der Zellen ist. Der Absorptionskoeffizient λ_j charakterisiert das Gewebe der j -ten Zelle. Das Ziel besteht also darin, alle k_j (oder, gleichbedeutend, alle λ_j) herauszufinden.

Ein Röntgenstrahl wird nun durch mehrere Zelle verlaufen und jedes Mal um den entsprechenden Faktor abgeschwächt. Verläuft ein Strahl etwa durch die Zellen 1, 5 und 9,

so wird er um den Faktor $k_1 k_5 k_9$ abgeschwächt. Die gemessene Intensität des austretenden Strahls ist durch $I_{\text{aus}} = k_1 k_5 k_9 I_{\text{ein}}$ gegeben, wobei I_{ein} die Intensität des einfallenden Strahls ist. I_{ein} ist bekannt, und I_{aus} wird gemessen, was bedeutet, dass das Produkt $k_1 k_5 k_9$ bekannt ist. Das Gleiche wird mit vielen Strahlen durchgeführt, so dass viele unterschiedliche Produkte von k 's bekannt sind. Wir erhalten also ein Gleichungssystem der Art

$$\begin{aligned} \text{Strahl durch die Zellen 1, 5, 9} & \quad k_1 k_5 k_9 = \text{bekannt} \\ \text{Strahl durch die Zellen 1, 2, 3, 4} & \quad k_1 k_2 k_3 k_4 = \text{bekannt} \\ \text{Strahl durch die Zellen 2, 7, 12} & \quad k_2 k_7 k_{12} = \text{bekannt} \\ \text{..... usw.} & \end{aligned}$$

aus dem die k 's berechnet werden müssen. Ist dieses Problem einmal gelöst, so kann ein (zweidimensionales) Bild erstellt werden, das den Gewebeschnitt visualisiert, und in dem jeder Zelle ein Pixel entspricht. Die räumliche Verteilung folgt dann aus der Zusammenführung dieser ebenen Schnitte.

Damit erheben sich einige Fragen. Wie kann ein Gleichungssystem dieser Art im Mathematikunterricht behandelt werden? Es sieht zwar ungewohnt aus, aber ein einfacher Trick hilft: Logarithmieren wir die obigen Gleichungen, bezeichnen $x_j = \ln k_j$ und verwenden die Rechenregeln für den Logarithmus, so nimmt das System die vertrautere Form

$$\begin{aligned} \text{Strahl durch die Zellen 1, 5, 9} & \quad x_1 + x_5 + x_9 = \text{bekannt} \\ \text{Strahl durch die Zellen 1, 2, 3, 4} & \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \text{bekannt} \\ \text{Strahl durch die Zellen 2, 7, 12} & \quad x_2 + x_7 + x_{12} = \text{bekannt} \\ \text{..... usw.} & \end{aligned}$$

eines *linearen* Gleichungssystems an, dessen Koeffizienten 0 oder 1 sind! Wegen $k_j = \exp(-\lambda_j a)$ gilt $x_j = -\lambda_j a$, d.h. aus den Werten der x_j folgen direkt die Absorptionskoeffizienten der Gewebetypen in den unterschiedlichen Zellen.

Wie viele Strahlen sind nötig, um die die k 's festzulegen? Auf den ersten Blick hat es den Anschein, man käme mit zueinander senkrechten Strahlen (etwa parallel zu den beiden Koordinatenachsen, die die Orientierung der Schnittebene definieren) aus. Tatsächlich aber reicht das nicht, wie sich durch simples Abzählen von Variablen und Gleichungen ergibt! Wir müssen daher auch „schräg“ liegende Strahlen betrachten. (So beschreibt beispielsweise die letzte der drei obigen Gleichungen einen solchen schrägen Strahl – er verläuft durch die Zellen 2, 7 und 12).

Wie viele Strahlen wir *genau* benötigen, ist insofern nicht so wichtig, als physikalische Messungen stets von Ungenauigkeiten geplagt sind und wir daher so viel Information nehmen, wie wir bekommen: möglichst viel! In einem einfachen (nicht zu großen) Modell kann man sich auf jene Strahlen beschränken, die parallel zu einer der beiden Achsen sind oder in einem Winkel von 45° zu diesen stehen. Im obigen Beispiel hätten wir damit 19

derartiger Strahlen zu berücksichtigen, was einem Gleichungssystem mit 12 Variablen und 19 Gleichungen entspricht. (Mit wachsender Zahl der Zellen ist auch eine größere Anzahl von Strahlen unter anderen Winkeln nötig, um die Zahl der Gleichungen nicht unter jene der Variablen fallen zu lassen).

Um sich vor Augen zu halten, wie ein solches System aussieht, können wir von einer möglichen Lösung ausgehen und obiger Skizze etwa folgende (der Farbtönung der Würfel entsprechende) Lösungswerte annehmen: $x_1 = x_6 = x_{11} = -0.1$, $x_7 = x_8 = x_{10} = -0.2$, $x_2 = x_4 = x_9 = x_{12} = -0.3$ und $x_3 = x_5 = -0.4$. Das entsprechende Gleichungssystem sieht dann so aus:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -1.1 \\
 x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= -0.9 \\
 x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &= -0.9 \\
 x_1 + x_5 + x_9 &= -0.8 \\
 x_2 + x_6 + x_{10} &= -0.6 \\
 x_3 + x_7 + x_{11} &= -0.7 \\
 x_4 + x_8 + x_{12} &= -0.8 \\
 x_1 &= -0.1 \\
 x_2 + x_5 &= -0.7 \\
 x_3 + x_6 + x_9 &= -0.8 \\
 x_4 + x_7 + x_{10} &= -0.7 \\
 x_8 + x_{11} &= -0.3 \\
 x_{12} &= -0.3 \\
 x_4 &= -0.3 \\
 x_3 + x_8 &= -0.6 \\
 x_2 + x_7 + x_{12} &= -0.8 \\
 x_1 + x_6 + x_{11} &= -0.3 \\
 x_5 + x_{10} &= -0.6 \\
 x_9 &= -0.3
 \end{aligned}$$

Nun vergessen wir die Lösung und stehen vor dem Problem, die x_j aus diesem Gleichungssystem zu finden. In der Praxis werden die Zahlen auf den rechten Seiten nicht genau die hier angegebenen (exakten) Werte besitzen, sondern manche werden aufgrund kleiner Messungenauigkeiten geringfügig davon abweichen, was bedeutet, dass die Gleichungen einander „geringfügig“ widersprechen und im mathematisch strengen Sinn gar keine Lösung existiert! In einem realistischeren Szenario hätten wir nicht $4 \times 3 = 12$ Variable, sondern eher etwas in der Gegend von $1000 \times 1000 = 1$ Million Variable (was einem Bild mit einer Million Pixel entspricht)!

Wir müssen also damit rechnen, ein lineares Gleichungssystem zu erhalten,

- (i) dessen Koeffizienten 0 oder 1 sind,
- (ii) das **mehr Gleichungen als Variable** enthält,
- (iii) und das **sehr viele** Variablen und Gleichungen enthält.

Falls es aufgrund von Messfehlern im strengen Sinn keine Lösung gibt, hätten wir gern eine „ungefähre Lösung“, die die Gleichungen zumindest „so gut wie möglich“ erfüllt. Für derartige Situationen gibt es ein faszinierend einfaches Näherungsverfahren.

Näherungsverfahren

Das Verfahren besteht darin, zuerst alle Variablenwerte $x_j = 0$ zu setzen und dann alle Gleichungen nacheinander nach dem folgenden Schema abzuarbeiten:

Die Variablen werden wie üblich auf die linke Seite geschrieben, die (bekannten) inhomogenen Koeffizienten auf die rechte. Die Differenz „rechte Seite – linke Seite“ wird gleichmäßig auf alle Variable mit Koeffizienten 1 aufgeteilt.

Beispiel: Lautet die Gleichung $x_1 + x_3 = -0.5$, so wird (ausgehend von den aktuellen Werten für x_1 und x_3)

$$x_1^{neu} = x_1 + \frac{-0.5 - x_1 - x_3}{2}$$
$$x_3^{neu} = x_3 + \frac{-0.5 - x_1 - x_3}{2}$$

gesetzt. Diese neuen Werte werden hinfort anstelle von x_1 und x_3 verwendet.

Das Ganze wird – wieder beginnend mit der ersten Gleichung – so oft wiederholt, bis sich die Variablenwerte

- entweder [falls eine Lösung existiert] praktisch nicht mehr ändern (dann ist die Lösung näherungsweise gefunden)
- oder [falls im strengen Sinn keine Lösung existiert] geringfügig um Werte oszillieren, die dann die gesuchte „ungefähre Lösung“ darstellen.

Siehe dazu auch das *Mathematica*-Notebook

<http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/aussermathAnw2011/Computertomographie.nb>.

Achtung: Für allgemeine lineare Gleichungssysteme (mit beliebigen Koeffizienten) funktioniert dieses Verfahren manchmal, aber nicht immer!

Aufgabe 12:

Führen Sie das besprochene Näherungsverfahren für das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 = -0.4$$

$$x_1 + x_3 = -0.2$$

$$x_2 + x_3 = -0.2$$

durch! Wenden Sie es

(i) für die ersten zwei Durchgänge aller 3 Gleichungen „**händisch**“

(ii) und für insgesamt 20 Durchgänge aller 3 Gleichungen mit einem

Tabellenkalkulationsprogramm (inklusive Visualisierung der Konvergenz)
an!