(Einige) astronomische Themen für den Mathematikunterricht

Außermathematische Anwendungen im Mathematikunterricht
WS 2011/12
Franz Embacher, Universität Wien

Eigenheiten der Astronomie

Die Astronomie besitzt einige Eigenheiten, die im Mathematikunterricht genutzt werden können:

- Viele Menschen, auch Kinder und Jugendliche, interessieren sich für den Weltraum.
- Astronomische Orte treten zunächst einmal als Winkeln auf dem „Himmelsgewölbe" auf. Winkeln spielen in der Astronomie daher eine zentrale Rolle.
- Astronomie ist mit *sehr großen* Entfernungen konfrontiert. Manche der beobachteten Winkeln sind *extrem klein*.
- Die reichhaltigste Informationsquelle ist das Licht (allgemeiner: das gesamte elektromagnetische Spektrum), das wir empfangen („sehen").

Im Folgenden wird es um Längen, Winkeln und Helligkeiten gehen, zum Schluss ergänzt durch einige Bemerkungen zum Problem der Massenbestimmung. Klarerweise können aus Zeitgründen (fast) unendlich viele Themen, die ebenfalls interessant wären, nicht behandelt werden. Insbesondere wird auf die Besprechung der astronomischen Koordinatensysteme (v. a. die Begriffe Rektaszension und Deklination) und auf die himmelsgeometrischen Phänomene, die aus dem Zusammenspiel der Neigung der Erdachse mit den Jahreszeiten herrühren, verzichtet.

Längeneinheiten

In der Astronomie übliche Längeneinheiten sind die Astronomische Einheit, das Lichtjahr und das Parsec. Mit astronomischen Entfernungsangaben kann der Umgang mit großen Zahlen, das Umrechnen von Einheiten und das sinnvolle Runden geübt werden.

Ein **Lichtjahr** (Lj) ist jene Entfernung, die das Licht (im Vakuum) in 1 Jahr zurücklegt, wobei die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit mit $c = 299792.458$ km/s festgelegt ist[1] und ein Jahr mit 365.25 Tagen veranschlagt wird.

[1] Der numerische Wert der Lichtgeschwindigkeit ist tatsächlich so *festgelegt*. Das Meter ist heute definiert als jene Strecke, die das Licht (im Vakuum) in einer Zeit von $1/299792458$ Sekunde zurücklegt. Der

Frage: Wie viele km sind ein Lichtjahr?

Antwort: 1 Lj = $c \cdot 1 \text{ Jahr} = 299792.458 \cdot \underbrace{365.25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}_{\text{Zahl der Sekunden pro Jahr}}$ km = 9460730472580.8 km

$\approx 9.46 \cdot 10^{12}$ km.

Analog können Lichtsekunden (interessant für die Entfernung Erde- Mond) und Lichtminuten (interessant für die Entfernung Erde-Sonne) in km ausgedrückt werden.

Eine **astronomische Einheit** (AE) ist die mit $149.597870691 \cdot 10^6$ km $\approx 149.6 \cdot 10^6$ km (also grob 150 Millionen km) festgelegte mittlere Entfernung der Erde von der Sonne.

Eine Längeneinheit, die in engem Zusammenhang mit astronomischen Messungen entstand, ist die Parallaxensekunde, verkürzt **Parsec** (pc). 1 pc ist jene Entfernung, in der 1 AE unter einem Winkel von 1 Winkelsekunde (1'') erscheint.

Frage: Wie viele AE bzw. km sind ein Parsec?

Antwort mit Winkelfunktionen: 1 pc $= \dfrac{1\text{AE}}{\tan(1'')} = 206264.806 \text{ AE} = 30.856776 \cdot 10^{12}$ km.

Antwort ohne Winkelfunktionen: 1 pc $= \dfrac{1\text{AE}}{1'' \text{ im Bogenmaß}} = \dfrac{1\text{AE}}{2\pi/(360/3600)} =$

$= 206264.806 \text{ AE} = 30.856776 \cdot 10^{12}$ km.

Ein *nicht allzu weit entfernter* Stern beschreibt aufgrund des Umlaufs der Erde um die Sonne im Laufe eines Jahres eine scheinbare ellipsenförmige Bewegung relativ zu *sehr weit entfernten* Sternen. Dieses Phänomen heißt **Parallaxe**. Aus der großen Halbachse der Ellipse (die ebenfalls Parallaxe genannt wird) kann die Entfernung bestimmt werden. Ist die Parallaxe eine Winkelsekunde, so beträgt die Entfernung (per definitionem) 1 pc. Ist die Parallaxe gleich α (ausgedrückt in Winkelsekunden), so beträgt die Entfernung

$$1 \text{ pc}/\alpha \approx 3.26 \text{ Lj}/\alpha,$$

wobei verwendet wurde, dass der Tangens für kleine Winkel mit seinem Argument übereinstimmt. Die historisch erste Bestimmung einer Sternparallaxe gelang Friedrich Wilhelm Bessel im Jahr 1838 für den Stern 61 Cygni mit $\alpha = 0.29$, was einer Entfernung von 11 Lichtjahren entspricht. Für den uns nächstgelegenen Stern Proxima Centauri ist $\alpha = 0.77$. Seine Entfernung beträgt daher 1 pc/0.77 = 1.3 pc = 4.2 Lj.

Die Beobachtungsgrenze liegt bei etwa 0.001'' (erreicht durch den europäischen Forschungssatelliten Hipparcos in den 1990er Jahren), was Entfernungen bis zu 1kp ($\approx$3000 Lichtjahren) entspricht. Jenseits dieser Grenze sind Entfernungsbestimmungen bislang nur mit indirekten Methoden möglich. Als Nachfolger von Hipparcos ist der ESA-Satellit Gaia (ab 2012) geplant, der eine 40-fache Genauigkeit erreichen soll.

Vollständigkeit halber: Eine Sekunde ist definiert als „das 9192631770-fache der Periodendauer der Strahlung, die dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands von ^{133}Cs entspricht“.

In der Kosmologie wird oft die Einheit Megaparsec (Mpc) verwendet (1 Mpc ≈ 3.26 Millionen Lichtjahre). Sie tritt beispielsweise in der Hubble-Konstante

$$H_0 \approx 71 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$$

auf, die die Expansionsrate des Universums beschreibt: Galaxien bewegen sich von umso schneller von uns weg, je weiter sie entfernt sind. Die „Fluchtgeschwindigkeit" einer Galaxie im Abstand d ist $H_0\, d$ (wobei dieses Gesetz unterhalb von einigen Mpc aufgrund lokaler Eigenbewegungen der Galaxien nicht gilt – so bewegt sich die Andromeda-Galaxie mit etwa 100 km/s auf die Milchstraße zu und wird nach Computersimulationen in 4 bis 10 Milliarden Jahren mit ihr kollidieren und schließlich verschmelzen). $1/H_0$ ist ein ungefähres Maß für das Alter des Universums.

Astronomische Entfernungen und Winkeln

Selbst die nächsten Sterne sind *sehr weit* von uns entfernt. Nur in wenigen Fällen können sie – auch mit den modernsten Teleskopen – als Scheiben erkannt werden. In astronomischen Beobachtungen treten oft *sehr kleine* Winkeln auf. Wie soll man sich diese Größenordnungen vorstellen? Hier in paar Vorschläge zu den Entfernungen, die nach oben fortschreitende Stufenleitern und maßstäbliche Verkleinerungen benutzen:

- Österreich ist knapp 600 km „lang".
- Legt man Österreich etwa 10 mal vertikal nach unten aneinander, so landet man im Erdmittelpunkt. Österreich ist also gar nicht so klein im Vergleich zur Erde!
- Die Sonne ist etwa 100 mal (genauer: 109 mal) so groß wie die Erde. Sie erscheint uns unter dem gleichen Winkel wie der Mond (der gefahrloser zu beobachten ist).
- Wird die Erde 10000 mal aneinander gelegt, so landet man in der Sonne.
- Wird die Erde maßstäblich auf einen Radius von 1 mm verkleinert (Reiskorn), so hat die Sonne einen Radius von 10 cm (Ball) und ist etwa 10 m entfernt.
- Das Licht benötigt zur Umrundung der Erde etwa 1/8 Sekunde, bis zum Mond etwa eineinhalb Sekunden und bis zur Sonne etwa 8 Minuten. Um ein Lichtjahr zurückzulegen, benötigt es ein Jahr – der nächste Stern ist etwa 4 mal so weit von uns entfernt! Das entspricht etwa 270000 mal der Entfernung von der Erde zur Sonne.
- Wird die Entfernung der Sonne von der Erde maßstäblich als 1 mm dargestellt, so ist der nächste Stern etwa 270 m entfernt.
- Die Milchstraße ist eine Scheibe aus 100 bis 300 Milliarden Sternen mit einem Durchmesser von etwa 100000 Lj und einer Dicke von etwa 3000 Lj. In dem zuvor vorgeschlagenen Verkleinerungsmaßstab (Entfernung Erde-Sonne $\hat{=}$ 1 mm) entspricht das einer Scheibe mit einem Durchmesser von 6200 km ($\approx$Erdradius!) und einer Dicke von 200 km (etwas kleiner als die Entfernung Wien-Salzburg).
- Im Universum gibt es sehr viele Galaxien. Die nächstgelegene größere Galaxie ist die Andromeda-Galaxie. Sie ist ein bisschen größer als die Milchstraße und etwa 2.5 Millionen

Lichtjahre entfernt, was etwa 25 mal der Größe der Milchstraße entspricht. Ist die Milchstraße eine Euro-Münze, so ist die Andromeda-Galaxie eine Zwei-Euro-Münze in etwa einem halben Meter Entfernung.

Bei den Größenangaben der Galaxien haben wir die dunkle Materie unter den Teppich gekehrt, die zwar unsichtbar ist, aber die Galaxien in Form eines „Halo" umgibt, der um Einiges größer ist als der von Sternen ausgefüllte Raum.

Und hier ein paar Vorschläge zu kleinen Winkeln:

- Die Durchmesser von Sonne und Mond erscheinen unter einem Winkel von etwa $0.5° \approx 30' \approx 2000''$.
- Daraus ergibt sich mit Hilfe einer einfachen geometrischen Überlegung: Sonne und Mond sind beide etwa 100 mal so weit weg wie sie groß sind. (Das zu begründen ist eine schöne Aufgabe, die mit oder ohne Winkelfunktionen gelöst werden kann).
- Eine Winkelsekunde ist etwa 1/2000 des Winkels, unter dem Sonne und Mond erscheinen. Unter dem gleichen Winkel erscheint ein halber Millimeter aus 100 m Entfernung.

Damit lassen sich weitere Aufgaben (mit und ohne Verwendung von Winkelfunktionen) mit astronomischem Anwendungsbezug (auch unter Verwendung von Planetendaten, auf die hier der Kürze halber verzichtet wird) formulieren.

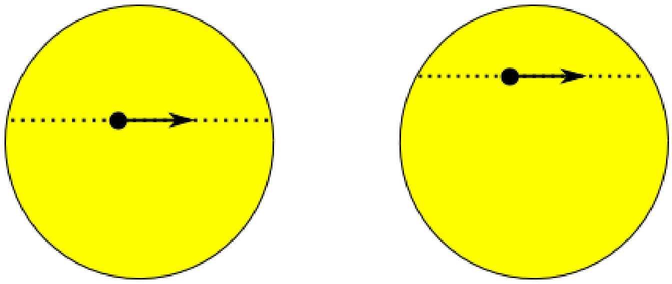
Für eine maßstäblich verkleinerte „Geographie" des gesamten sichtbaren Universums siehe http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/groessenordnungen.html.

Die Größe des Sonnensystems

Im 17. Jahrhundert, als mit Kepler und Newton die Grundlagen zu einem physikalischen Verständnis der Planetenbewegungen gelegt wurden, hatte man nur eine vage Vorstellung von der Größe des Sonnensystems! Die Newtonsche Gravitationstheorie, gefüttert mit den damals zur Verfügung stehenden Beobachtungsdaten, konnte zwar die relativen Längenverhältnisse angeben, nicht aber die Längen als solche.

Im Jahr 1716 hatte Edmond Halley die Idee, den Abstand zur Sonne zu messen, indem der Vorbeizug der Venus vor der Sonnenscheibe von verschiedenen Orten auf der Erde beobachtet wird. Ein solcher **Venustransit** ereignet sich nur sehr selten (die letzten Male in den Jahren 1769, 1874, 1882 und 2004 – der nächste wird am 6. Juni 2012 von 0:09 Uhr bis 6:49 Uhr MESZ stattfinden, also von Mitteleuropa aus nur in der Endphase nach Sonnenaufgang sichtbar sein. Für den darauf folgenden Venustransit müsste man bis zum Jahr 2117 warten). Beim Venustransit des Jahres 1769 wurde Halleys Idee durch eine international koordinierte Reihe von Beobachtungsexpeditionen (zu denen auch James Cooks erste Pazifikreise zählt) realisiert. Das damals ermittelte Ergebnis für die Entfernung Sonne-Erde war auf Anhieb recht genau: Es war nur um 2% größer als der heute gültige Wert von 149.6 Millionen Kilometer.

Die folgende Skizze zeigt (mit etwas abgeänderten Beobachtungsorten und stark übertrieben dargestelltem Effekt), was dabei beobachtet wurde:



Von zwei Beobachtungsorten unterschiedlicher geografischer Breite sieht der Transit verschieden aus. Ab hier ist nur noch ein bisschen Geometrie nötig: Bekannt ist das Verhältnis des Abstands Sonne-Erde zum Abstand Sonne- Venus, und bekannt sind die Entfernungen auf der Erde. Unbekannt sind die Entfernungen Sonne-Erde und Sonne- Venus, und unbekannt ist auch die Größe der Sonne. Wie lässt sich daraus die Entfernung Sonne-Erde bestimmen? Denken Sie darüber nach! Das ergäbe ein schönes Unterrichtsprojekt, in dem einfache geometrische Methoden zum Einsatz kommen.

Scheinbare Helligkeiten

Neben geometrischen Informationen ist das Licht von Himmelsobjekten eine der wichtigsten Quellen unserer Kenntnisse des Universums. In der Astronomie gibt es zwei Möglichkeiten, die **scheinbare Helligkeit** eines Himmelsobjekts (d.h. die Helligkeit mit der wir es sehen[2]) anzugeben:

- Die **Flussdichte des Lichtstroms** Φ ist die Energie (des gesamten elektromagnetischen Spektrums), die pro Flächeneinheit und pro Zeiteinheit vom betreffenden Objekt empfangen wird (gemessen in Joule pro Quadratmeter und Sekunde). Obwohl das elektromagnetische Spektrum auch für das menschliche Auge unsichtbare Anteile besitzt, entspricht Φ in den meisten Fällen ungefähr der Helligkeit, mit der wir ein Objekt am Himmel sehen.
- Daneben gibt es eine logarithmische Skala, unzutreffend auch als „Größenklasse" bezeichnet. In ihr wird die scheinbare Helligkeit eines Himmelsobjekts in **Magnituden** (mag) angegeben, wobei

$$m = -\frac{5}{2}\lg\left(\frac{\Phi}{\Phi_{\text{Wega}}}\right)\text{ mag}$$

definiert wird. Als Referenz dient hier der Stern **Wega** im Sternbild Leier. Per definitionem besitzt sie die scheinbare Helligkeit $m_{\text{Wega}} = 0\,\text{mag}$.

[2] „Sehen" kann hier bedeuten: mit dem Auge (gegebenenfalls unterstützt durch ein Teleskop) sehen oder mit Instrumenten „sehen", die das gesamte elektromagnetische Spektrum registrieren, also auch die für das Auge unsichtbaren Anteile. Ersteres führt auf die „visuelle", zweiteres auf die „bolometrische" Helligkeit. Wir wollen hier aber nicht zwischen diesen beiden unterscheiden. Die angegebenen Zahlenwerte beziehen sich auf die bolometrische Helligkeit.

Je kleiner m, umso heller ist das Objekt. Die Skala wurde so gewählt, dass eine Verminderung von m um 5 einer Zunahme der Flussdichte des Lichtstroms um den Faktor $10^2 = 100$ entspricht. Eine Verminderung von m um 1 entspricht einer Steigerung der Flussdichte des Lichtstroms um den Faktor $10^{2/5} \approx 2.512$. Ist die scheinbare Helligkeit m bekannt, so ist die Flussdichte des Leuchtstroms durch

$$\Phi = \Phi_{\text{Wega}} \cdot 10^{-\frac{2}{5}\frac{m}{1\,\text{mag}}}$$

gegeben. Das bedeutet: Ein Objekt der scheinbaren Helligkeit m ist um den Faktor

$$10^{-\frac{2}{5}\frac{m}{1\,\text{mag}}}$$

heller bzw. weniger hell (je nach dem Vorzeichen von m) als die Wega.

Hier einige Beispiele für scheinbare Helligkeiten:

Objektklasse	Objekt	(maximale) scheinbare Helligkeit in mag	(mittlere) Entfernung	(mittlere) Entfernung von der Sonne
Sterne	Sonne	-26.73	159.6 Mio. km	
	Sirius	-1.46	8.6 Lj	
	Canopus	-0.73	312 Lj	
	Alpha-Centauri	-0.27	4.4 Lj	
	Wega	0.0	25.3 Lj	
	Polarstern (Polaris)	1.97	431 Lj	
	Proxima Centauri	11.05	4.2 Lj	
Planeten und Monde	Mond	-12.73	$3.84 \cdot 10^5$ km	
	Venus	-4.67		0.72 AE
	Jupiter	-2.94		5.2 AE
	Mars	-2.91		1.5 AE
	Merkur	-9.1		0.39 AE
	Saturn	-0.47		9.6 AE
	Uranus	5.5		19 AE
	Neptun	7.8		30 AE
Zwergplaneten	Ceres[3]	6.6		2.8 AE
	Pluto	13.9		39 AE
	Eris	18.8		68 AE
Galaxien und AGNs[4]	Andromeda-Galaxie	4.3	2.5 Mio. Lj	
	Quasar 3C237	12.86	2.4 Mrd. Lj	

[3] Ceres ist ein Asteriod, der aber seit 2006 streng genommen nicht mehr zu den Asteroiden zählt, sondern zu den Zwergplaneten.
[4] AGN = *active galactic nucleus* = aktiver Galaxienkern = supermassives Schwarzes Loch im Zentrum einer Galaxie, in das Materie fällt und dabei extrem hell leuchtet.

Mit freiem Auge sind Sterne bis zu einer Magnitude von etwa 6 (im Gebirge) – das sind insgesamt einige Tausend – bzw. 4 (in der Großstadt) – das sind einige Hundert – zu sehen. Teleskope (und auch Feldstecher) erweitern diesen Bereich in Abhängigkeit von der Fläche ihrer Öffnung, die mehr Licht auffängt als das menschliche Auge. Sie erhöhen die maximale beobachtbare scheinbare Helligkeit um

$$5\,\lg(D/d)\ \text{mag},$$

wobei D der Durchmesser der Teleskopöffnung und $d \approx 7$ mm der Durchmesser des menschlichen Auges ist. Großteleskope schaffen es mit Hilfe von CCD-Sensoren (die empfindlicher als unsere Augen sind) bis 30 mg, das Hubble-Weltraumteleskop bis 31 mag. Die ESO plant für 2018 ein „Extremely Large Telescope“ (ELT), das Himmelsobjekte bis 36 mag auflösen können soll.

Absolute Helligkeiten

Die absolute (oder „wahre“) Helligkeit eines Objekts kann aus seiner scheinbaren Helligkeit und (sofern bekannt) aus seiner Entfernung berechnet werden. Im Rahmen des Magnituden-Systems wird sie mit M bezeichnet und ist definiert als die in Magnituden angegebene scheinbare Helligkeit, die das Objekt hätte, wenn es sich in einer Entfernung von 10 pc befinden würde. Ist m die scheinbare Helligkeit und d die Entfernung, so ist

$$M = m - 5\ \lg\left(\frac{d}{10\text{ pc}}\right)\ \text{mag}.$$

Beweis: Die Flussdichte des Lichtstroms Φ ist proportional zu $1/d^2$, da die pro Zeiteinheit vom dem Objekt wegfließende Gesamtenergie $= \Phi \cdot \text{Kugeloberfläche} = \Phi \cdot 4\pi\, d^2$ erhalten ist (sofern keine nennenswerten Anteile von ihr auf dem Weg verloren gehen). Wird ein Objekt von der Entfernung d in die Entfernung 10 pc gerückt, so ändert sich die auf der Erde eintreffende Flussdichte des Lichtstroms um den Faktor $(d/10\text{ pc})^2$. Mit

$\Phi_{10\text{ pc}} = \left(\frac{d}{10\text{ pc}}\right)^2 \Phi_d$ ist

$$M = -\frac{5}{2}\lg\left(\frac{\Phi_{10\text{ pc}}}{\Phi_{\text{Wega}}}\right)\text{mag} = -\frac{5}{2}\lg\left(\frac{d^2}{(10\text{ pc})^2}\frac{\Phi_d}{\Phi_{\text{Wega}}}\right)\text{mag}$$

$$= \underbrace{-\frac{5}{2}\lg\left(\frac{\Phi_d}{\Phi_{\text{Wega}}}\right)}_{m} \underbrace{-\frac{5}{2}\lg\left(\frac{d^2}{(10\text{ pc})^2}\right)}_{5\lg\left(\frac{d}{10\text{ pc}}\right)}\ \text{mag},$$

was die oben angegebene Formel ist.

Auf diese Weise lassen sich leicht absolute Helligkeiten ermitteln und vergleichen.

Aufgabe: Berechne die absoluten Helligkeiten von Sonne und Sirius und vergleiche!

Lösung: $M_{\odot} = -26.73 - 5\lg\left(\frac{1\,\mathrm{AE}}{10\,\mathrm{pc}}\right) = 4.83$ mag.

$M_{\mathrm{Sirius}} = -1.74 - 5\lg\left(\frac{8.6\,\mathrm{Lj}}{10\,\mathrm{pc}}\right) = 1.43$ mag.

Sirius ist (aus gleicher Entfernung betrachtet) um den Faktor

$\frac{\Phi_{10\,\mathrm{pc}}^{\text{Sirius}}}{\Phi_{10\,\mathrm{pc}}^{\text{Sonne}}} = \frac{10^{-\frac{2}{5}\cdot 1.43}}{10^{-\frac{2}{5}\cdot 4.83}} \equiv 10^{\frac{2}{5}\cdot(4.83-1.43)} \approx 23$ heller als die Sonne.

Die Differenz $m - M$ wird als Entfernungsmodul bezeichnet.

Massenbestimmung mit dem dritten Keplerschen Gesetz

Die Bestimmung der Masse eines Objekts (wie eines Sterns oder einer Galaxie) ist dann am einfachsten, wenn es gravitativ mit anderen Objekten wechselwirkt. Im einfachsten Fall besitzt es einen Satelliten, dessen Masse vernachlässigbar klein ist, und der es auf einer Kepler-Ellipse mit großer Halbachse a und Umlaufszeit T umrundet, wobei das zentrale Objekt in einem der Brennpunkte der Ellipse steht. Das **dritte Keplersche Gesetz** (in moderner Form angeschrieben) besagt dann

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi}{G\,M},$$

wobei M die Masse des Objekts und $G = 6.673 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ die Newtonsche Gravitationskonstante ist.

Wird ein solches System über längere Zeit beobachtet, so kann T leicht gemessen werden. Wenn wir die Entfernung kennen, können wir die Projektion der Bahnellipse auf eine Ebene normal zur Sichtlinie ebenfalls leicht vermessen. Falls wir aber schräg auf die Bahnellipse blicken, sitzt das zentrale Objekt nicht im Brennpunkt der projizierten Ellipse. Ein interessantes geometrisches Problem ergibt sich aus der Aufgabe, zuerst die Lage der Ellipse zu rekonstruieren, um ihre wahre Halbachse a bestimmen zu können. Eine solche Situation liegt bei der Radarquelle Sagittarius A* im Zentrum der Milchstraße (im Sternbild Schütze) vor, die sich als Schwarzes Loch von etwa 4 Millionen Sonnenmassen herausstellt.