

Weltbild der modernen Physik: Relativistische Astrophysik und Kosmologie

Skriptum – z. T. in Stichworten

SS 2010

Franz Embacher

Fakultät für Physik der Universität Wien

1 Ein bisschen Spezielle Relativitätstheorie

- Raumzeit (Minkowskiraum)
Ereignis = (hier, jetzt). Für einen Beobachter, der/die sich auf ein Inertialsystem bezieht: $(t, x, y, z) \equiv (t, \vec{x})$
Minkowskiraum = Menge aller Ereignisse. Mathematisch: \mathbb{R}^4 .
- Lorentztransformationen (Poincarétransformationen)
Alice und Bob beobachten und beschreiben den *gleichen* Prozess, verwenden dabei jeweils "ihre" Raum-Zeit-Koordinaten. Lorentz-Boost in x -Richtung:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.1)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.2)$$

$$y' = y \quad (1.3)$$

$$z' = z \quad (1.4)$$

- Flache Metrik (Minkowski-Metrik), Kausalstruktur (Raumzeit-Diagramme, Lichtkegel)
Die Minkowski-Metrik

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \quad (1.5)$$

ist unter Lorentztransformationen invariant ($c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2$).

- Relativistische Mechanik (Energie und Impuls)
Freies Teilchen mit Masse m :
Relativistische Energie: $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

nichtrelativistisch: $E \approx mc^2 + \frac{m\vec{v}^2}{2}$ bzw. $E \approx \frac{m\vec{v}^2}{2}$
 Relativistischer Impuls: $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
 nichtrelativistisch: $\vec{p} \approx m\vec{v}$
 Energie-Impuls-Beziehung: $E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$
 nichtrelativistisch: $E \approx mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m}$ bzw. $E \approx \frac{\vec{p}^2}{2m}$
 ultrarelativistisch: $E \approx c|\vec{p}|$

- Massendefekt

Insbesondere in Kernreaktionen: Teilchen 1 + Teilchen 2 → Teilchen 3. Massen: m_1, m_2, m_3 . Ist $\Delta m = m_1 + m_2 - m_3 > 0$, so wird bei diesem Prozess eine Energie (Bindungsenergie)

$$E = \Delta m c^2 \tag{1.6}$$

frei.

- Spin, Bosonen, Fermionen

- Spezielle Relativitätstheorie + Quantentheorie ⇒ Spin-Statistik-Theorem, Pauli-Prinzip für Fermionen: $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$, daher $\psi(\vec{x}, \vec{x}) = 0$. Fermionen "verdrängen" einander.

2 Ein bisschen Thermodynamik, Quantentheorie und Kernphysik (Verhalten von Materie unter extremen Bedingungen)

Wir betrachten Materie – der Einfachheit halber nehmen wir an, es handelt sich um atomarem Wasserstoff¹ (mit der Teilchenmasse $m = m_{\text{H-Atom}} \approx m_p \approx m_n \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg und einer kleinen Beimengung an Deuterium, d. h. ${}^2_1\text{H}$) –, die, ausgehend von "normalen" Bedingungen, unter einen sukzessive vergrößerten Druck p gesetzt wird. Die Elektronen ($m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg) spielen zunächst keine Rolle.

- **Nichtrelativistische und klassische thermodynamische Beschreibung**

Zustandsgleichung des idealen Gases: Die übliche Form $pV = nRT$ mit $n =$ Zahl der Mole wird mit $\rho = \frac{M}{V} = \frac{Nm}{V}$ und $nR = Nk$ umgeschrieben in $\frac{pNm}{\rho} = NkT$. Nach Division durch Nmc^2 nimmt sie die Form

$$\frac{p}{\rho c^2} = \frac{kT}{mc^2} \equiv f(T) \tag{2.1}$$

¹ Ein wenig realistischer für die Anwendung in der stellaren Astrophysik wäre es, ein Gemisch aus Wasserstoff und Helium anzunehmen, aber für unsere Zwecke macht das nicht viel Unterschied.

an. Die linke und die rechte Seite sind dimensionslos. Mit $\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2}kT$ ist $f \approx \frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{Ruhe}}}$, bezogen auf ein Proton der Masse m . Wird (2.1) auf ein Gas angewandt, das auch schwerere Elemente enthält, so ist m durch eine mittlere Teilchenmasse zu ersetzen.

Mit $E_{\text{kin}} \approx mv^2$ ist $f \approx \frac{v^2}{c^2}$. Die nichtrelativistische Näherung ist gut erfüllt, solange $v \ll c$, d. h. $f \ll 1$, m.a.W.

$$kT \ll mc^2 \approx 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ kg m}^2/\text{s}^2, \quad \text{d. h. } T \ll 10^{13} \text{ K} \quad (2.2)$$

und (siehe weiter unten) solange die Elektronen keine Rolle spielen. Der Druck p rührt vor allem von der kinetischen Energie der Teilchen her. Bei steigender Temperatur werden die Atome ionisiert, was aber an der Hauptursache für den Druck nichts ändert: Er kommt dann durch die kinetische Energie der schweren Teilchen, d. h. der Protonen zustande, so dass wir die Elektronen in der Zustandsgleichung nicht berücksichtigen müssen.

Bei Erhöhung des Drucks (und damit der Dichte und der Temperatur) setzen die ersten *Kernreaktionen* ein (und *bestimmen* in der Folge weitgehend die herrschende Temperatur):

- Bereits ab etwa $T \gtrsim 6 \cdot 10^5 \text{ K}$ (was der Temperatur in Protosternen entspricht) beginnt als erster Kernprozess das so genannte Deuteriumbrennen² (${}^2_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He}$).
- Ab etwa $\rho \gtrsim 6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ und $T \gtrsim 3 \cdot 10^6 \text{ K}$ Wasserstoffbrennen³ ($\text{H} \rightarrow \text{He}$). Zum Vergleich die Daten für die Sonne: $\langle \rho \rangle \approx 1408 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{Zentrum}} \approx 1.5 \cdot 10^5 \text{ kg/m}^3$, $T_{\text{Oberfläche}} \approx 5778 \text{ K}$ und $T_{\text{Zentrum}} \approx 1.56 \cdot 10^7 \text{ K}$. Die zur Aufrechterhaltung der Temperatur nötige Wärmeenergie wird durch die Kernreaktionen geliefert. Sie entstammt dem Massendefekt

$$\frac{2m_p + 2m_n - m_{\text{He-Kern}}}{m_{\text{He-Kern}}} \approx 0.0073. \quad (2.3)$$

² Ist – hypothetisch angenommen – kein Deuterium vorhanden, so findet diese Reaktion nicht statt. Ein bisschen später, beim Wasserstoffbrennen, würde es aber in jedem Fall erzeugt werden. Wir merken noch an, dass andere leichte Elemente wie Li, Be und B, sofern sie von Beginn an vorhanden sind, ab $T \gtrsim 2 \cdot 10^6 \text{ K}$ zu Protoneneinfang neigen und auf diese Weise zur Bildung von ${}^4_2\text{He}$ und ${}^{12}_6\text{C}$ führen.

³ Um es etwas genauer zu sagen: Das Wasserstoffbrennen besteht aus einer Reihe von Prozessen. Die p-p-Reaktion (Proton-Proton-Kette, die in der Sonne wichtigste Reaktion) beginnt mit ${}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^2_1\text{H} + e^+ + \nu_e + 0.42 \text{ MeV}$, gefolgt von ${}^2_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + \gamma + 5.49 \text{ MeV}$ und etlichen Reaktionen, die ${}^4_2\text{He}$ erzeugen, wie ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H} + 12.68 \text{ MeV}$. Es handelt sich hier um einen komplexen Mehrstufenprozess, der *im Endeffekt* aus vier Protonen und zwei Elektronen einen Heliumkern macht, dabei eine Energie von etwa 26 MeV freisetzt, und in dessen Verlauf bereits schwerere Elemente (wie Be und Li) entstehen, aber wieder aufgebraucht werden. Die Energieerzeugungsrate ist proportional zu T^6 , d. h. sie hängt sehr empfindlich von der Temperatur ab. Der Bethe-Weizsäcker-Zyklus (oder CNO-Zyklus), der in der Sonne eine untergeordnete Rolle spielt, aber in schwereren Sternen wesentlich ist, hat den gleichen Nettoeffekt (mit einer Energiefreisetzung von 25 MeV), ist aber auf das Vorhandensein von Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff angewiesen.

- Ab etwa $\rho \gtrsim 10^6 \text{ kg/m}^3$ und $T \gtrsim 2 \cdot 10^8 \text{ K}$ Heliumbrennen ($\text{He} \rightarrow \text{Be} \rightarrow \text{C}$), auch Drei-Alpha-Prozess genannt. In einer Folgereaktion werden Elemente bis zum Sauerstoff erzeugt. Für diese Prozesse ist es in der Sonne noch zu kalt. Sie werden erst in etwa 4 Milliarden Jahren beginnen.

Dadurch reichern sich die ersten Elemente (d. h. Atomkerne) an, die schwerer sind als Wasserstoff. Die Elektronen spielen weder für die Dynamik dieser Kernprozesse noch für die thermodynamische Beschreibung eine wesentliche Rolle.

Exkurs

Mit (2.3) kann die gesamte bisher in der Sonne durch Kernprozesse (d. h. vor allem durch Wasserstoffbrennen) erzeugte Energie unter der Annahme, dass die Sonne zu Beginn nur aus Wasserstoff bestanden hat, zu

$$E_{\odot} \approx 0.0073 M_{\text{He}} c^2 \quad (2.4)$$

abgeschätzt werden, wobei M_{He} die Masse des solaren Heliums ist. Da die Sonne zu 73.5% aus Wasserstoff, zu 25% aus Helium und zu 1.5% aus schwereren Elementen besteht, ergibt sich (mit $M_{\odot} \approx 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$) die Abschätzung

$$E_{\odot} \approx 0.0018 M_{\odot} c^2 \approx 3.2 \cdot 10^{44} \text{ W s}. \quad (2.5)$$

Demnach hätte die Sonne eine Energie dieser Größenordnung während ihrer bisherigen Lebenszeit von $\tau_{\odot} \approx 4.6$ Milliarden Jahren durch Abstrahlung verloren. Das entspricht einer durchschnittlichen Strahlungsleistung von

$$\langle P_{\odot} \rangle = \frac{E_{\odot}}{\tau_{\odot}} \approx 2.2 \cdot 10^{27} \text{ W}. \quad (2.6)$$

Die (aus der Solarkonstante bestimmte) heutige Strahlungsleistung der Sonne ist aber mit etwa $3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$ um den Faktor 0.17 kleiner. Aus dieser Diskrepanz können wir schließen, dass nur etwa ein Sechstel des solaren Heliums tatsächlich in der Sonne entstanden ist! (Ein anderer Hinweis, der darauf hin deutet, ist das Vorhandensein schwererer Elemente in der Sonne – auch sie müssen in der Mehrzahl bereits vor der Entstehung der Sonne vorhanden gewesen sein, da sie nicht in ihr produziert werden können). Tatsächlich hat sich nach heutiger Ansicht der Großteil des solaren Heliums nicht erst in der Sonne, sondern in den ersten 3 Minuten nach dem Urknall gebildet. Ein Teil dieses Heliums ging verloren, indem schwerere Elemente gebildet wurden (allerdings unter extremeren Bedingungen als sie in der Sonne herrschen, siehe unten), ein Teil wird beim Wasserstoffbrennen nachgeliefert. Die gesamte bisher durch Kernfusion in der Sonne produzierte Energie wird heute als $\approx 4.7 \cdot 10^{34} \text{ W s}$ abgeschätzt, was etwa dem Massendefekt von 15% des

vorhandenen solaren Heliums entspricht. Eine genauere Abschätzung muss berücksichtigen, dass die Sonne früher kälter war als heute (sie ist heute etwa um 40% heller als bei ihrer Entstehung) und dass noch andere Prozesse mitspielen, die wir hier gar nicht betrachtet haben. heutige Strahlungsleistung der Sonne durchgeführt, so ergibt sich mit 5760 K ziemlich genau ihre heutige Oberflächentemperatur. (Da "die Oberfläche" der Sonne aus mehreren Schichten unterschiedlicher Temperaturen besteht – eine Feinheit, die wie viele andere hier unter den Teppich gekehrt wird –, sollten an derartige Zahlen keine übertriebenen Genauigkeitserwartungen gestellt werden).

- **Entartete Materie, nichtrelativistisch**

Weitere Erhöhung des Drucks und damit der Dichte \Rightarrow Entartung der Materie (genauer: der Elektronen). Ab $\rho \approx 10^7 \text{ kg/m}^3$ nimmt (ziemlich jede) Materie metallische Eigenschaften an. Die Elektronen verhalten sich wie ein freies Elektronengas. Hauptursache des Drucks ist das Pauliprinzip für die Elektronen, die ja Fermionen sind. (Entartungsdruck oder Fermidruck). Die Temperatur spielt keine wesentliche Rolle mehr.

Heuristische Herleitung: Der mittlere Elektronenabstand sei d . Die Dichte ist $\rho \approx \frac{m}{d^3}$, daher $d \approx (m/\rho)^{1/3}$. (Auch wenn bereits – in geringem Umfang – schwere Kerne vorliegen, ist die Zahl der Nukleonen, die für die Dichte verantwortlich ist, gleich geblieben. Die Zahl der Elektronen ist aber – schon aus Gründen der Ladungserhaltung – kleiner als vorher, da jetzt auch Neutronen vorliegen und unter dem Strich für jedes in einer Kernreaktion entstehende Neutron ein Elektron wegfällt. Da es sich dabei aber nur um keine Mengen handelt, fällt dieser Umstand in unserer größenordnungsmäßigen Betrachtung nicht ins Gewicht. Wir wollen daher weiterhin annehmen, dass es gleichviele Nukleonen der Masse m wie Elektronen der Masse m_e gibt, so dass in den Zusammenhang zwischen d und ρ lediglich die Nukleonenmasse m eingeht). Jedes Elektron beschränkt sich also auf ein Raumgebiet der Größe d^3 , ist über dieses "ausgeschmiert" und teilt es nicht mit anderen Elektronen. Dadurch bekommt es eine minimale Impulsunschärfe p_F (den so genannten Fermi-Impuls), die mit Hilfe der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation zu

$$p_F d \approx \hbar \tag{2.7}$$

abgeschätzt werden kann. Sie dient uns als Größenordnung für den mittleren Impuls der Elektronen. Die zugehörige Energie (Fermi-Energie) ist zunächst⁴ (nichtrelativistisch)

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{m_e d^2} \approx \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{\rho}{m} \right)^{2/3}. \tag{2.8}$$

⁴ Da es sich bei p_F um den *minimalen* Impuls handelt, könnte man die Elektronenenergie als $\varepsilon_F + E_{\text{kin}}$ veranschlagen, d. h. einen Anteil, der der eigentlichen kinetischen Energie entspricht, hinzunehmen. Ist dieser klein, so kann die Temperatur vernachlässigt werden (was wir hier tun).

Die Zustandsgleichung für entartete Materie wird aus (2.1) durch die Ersetzung⁵ $kT \rightarrow \varepsilon_F$ gewonnen:

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{\varepsilon_F}{m c^2}. \quad (2.9)$$

Die rechte Seite ist $\approx \frac{\hbar^2}{m_e m c^2} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2/3}$. Mit

$$\rho_0 = \frac{m m_e^3 c^3}{\hbar^3} = \frac{m}{(\lambda_e/(2\pi))^3} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ kg/m}^3 \quad (2.10)$$

(der Dichte, die herrscht, wenn der typische Elektronenabstand gleich der reduzierten Compton-Wellenlänge $\lambda_e/(2\pi)$ des Elektrons ist) lautet die *Zustandsgleichung für entartete nichtrelativistische Materie*:

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{m_e}{m} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3} \quad (2.11)$$

Die Zustandsgleichung ist von nun an von der Form $\frac{p}{\rho c^2} = f(\rho)$, was mit der idealen Gasgleichung (2.1) zu vergleichen ist, die von der Form $\frac{p}{\rho c^2} = f(T)$ ist. (2.11) beschreibt die Verhältnisse bis $\rho \lesssim \rho_0$, was gleichbedeutend ist mit $p_F \lesssim m_e c$, d. h. mit der Bedingung, dass die Elektronen noch (eher) nichtrelativistische Energien haben. Wird (2.11) auf Materie angewandt, die auch schwerere Elemente enthält, so ist m durch die mittlere Teilchenmasse pro Elektron zu ersetzen. Da diese den Wert $2m_p$ selten übersteigt⁶, ändert das im Rahmen unserer näherungsweisen Betrachtungen nicht viel.

Kernreaktionen⁷:

- Ab etwa $\rho \gtrsim 2 \cdot 10^8 \text{ kg/m}^3$ und $T \gtrsim 8 \cdot 10^8 \text{ K}$ Kohlenstoffbrennen ($\text{C} \rightarrow \text{O}$, Mg , Na , Ne).

⁵ Das ist natürlich ebenfalls eine heuristische Vorgangsweise. Sie kann dadurch gerechtfertigt werden, dass der Term kT in (2.1) bis auf einen Faktor $\frac{2}{3}$ die mittlere Energie jener Teilchen darstellt, die den Druck, also den "Widerstand gegen das Zusammengedrückt-Werden" bewirken. Handelt es sich dabei in (2.1) um die Atome oder Protonen, so bildet nun die Tendenz der Elektronen, einander zu "verdrängen", die Hauptursache für den Druck, und dementsprechend ist kT durch die Fermi-Energie der Elektronen zu ersetzen.

⁶ Die interessantesten Elemente, die in diesen Zustand geraten – wir werden ihn in den Weißen Zwergen vorfinden – sind ${}^4_2\text{He}$, ${}^{12}_6\text{C}$ und ${}^{16}_8\text{O}$, in denen genau 2 Nukleonen auf ein Elektron fallen, und ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ mit gerade einmal 2.154 Nukleonen pro Elektron.

⁷ Kernreaktionen tendieren in Sternen aufgrund der von ihnen erzeugten hohen Temperaturen dazu, die Entartung der Materie zu verhindern bzw. wieder aufzuheben, bis die dafür nötigen Elemente aufgebraucht sind. Dem dramatischen Tauziehen zwischen Kernfusion und Entartung werden wir später in den Endstadien von Sternen begegnen.

- Ab etwa $\rho \gtrsim 4 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^3$ und $T \gtrsim 1.5 \cdot 10^9 \text{ K}$ Neonbrennen (Ne \rightarrow O, Mg).
- Ab etwa $\rho \gtrsim 10^{10} \text{ kg/m}^3$ und $T \gtrsim 2 \cdot 10^9 \text{ K}$ Sauerstoffbrennen (O \rightarrow Ne, S, P, Si, Mg).

Exkurs

Zustandsgleichungen der Form $\frac{p}{\rho c^2} = f(\rho)$ sind ein Geschenk des Himmels, denn sie machen die Beschreibung des Verhaltens der Materie *einfacher*: Während bei dem durch (2.1) beschriebenen nichtentarteten Gas von den drei Zustandsgrößen p , ρ und T *zwei* gewählt werden können (und sich die dritte daraus ergibt), kann im Fall der durch (2.11) beschriebenen entarteten Materie nur *eine* Zustandsgröße (nämlich p oder ρ) gewählt werden. Überlegen Sie, wie das physikalisch verstanden werden kann! Worin besteht der Unterschied?

• Entartete Materie, relativistisch

Bei weiterer Erhöhung des Drucks werden die Elektronen ab $\rho \gtrsim \rho_0$ relativistisch. Es ist dann

$$\varepsilon_F \approx p_F c \approx \frac{\hbar c}{d} \approx \hbar c \left(\frac{\rho}{m} \right)^{1/3}. \quad (2.12)$$

Damit wird die *Zustandsgleichung für entartete relativistische Materie*:

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{m_e}{m} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/3} \quad (2.13)$$

Sie gilt für Dichten bis etwa $10^{11} \text{ kg/m}^3 \approx 3\rho_0$. Wird (2.13) auf Materie angewandt, die auch schwerere Elemente enthält, so ist m durch die mittlere Teilchenmasse pro Elektron zu ersetzen, was aber nicht viel ändert⁸.

Kernreaktionen:

- Ab etwa $\rho \gtrsim 3 \cdot 10^{10} \text{ kg/m}^3$ und $T \gtrsim 3.5 \cdot 10^9 \text{ K}$ Siliziumbrennen (Si \rightarrow Ni, Co, Fe, Al, Mg).
- Ab etwa $\rho \gtrsim 10^{13} \text{ kg/m}^3$ und $T \gtrsim 10^{10} \text{ K}$ Kernfusion schwerster Elemente (Bedingungen einer Supernova).

• Neutronenmaterie

Weitere Erhöhung des Drucks. Durch $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ werden die Elektronen in die Protonen "hineingedrückt" (inverser Betazerfall). In einem Dichtebereich $10^{11} \text{ kg/m}^3 \lesssim \rho \lesssim 10^{16} \text{ kg/m}^3$ werden neutronenreiche Elemente aufgebaut (wie

⁸ Siehe Fussnote 6 auf Seite 6.

${}_{28}^{62}\text{Ni}$ und ${}_{39}^{122}\text{Y}$). Ab etwa $\rho \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ kg/m}^3$ existieren freie Neutronen neben Atomkernen, und ab $\rho \approx 3 \cdot 10^{16} \text{ kg/m}^3$ liegt ein Neutronengas vor. Die Elektronen verschwinden nach und nach und somit auch der von ihnen verursachte Entartungsdruck – aber an seine Stelle tritt der Entartungsdruck der Neutronen, die ja ebenfalls Fermionen sind. Die Identität der Atomkerne und damit der chemischen Elemente wird ausgelöscht – Neutronenmaterie ist eine einheitliche Zustandsform der Materie (was ihre Physik wiederum einfach macht). In der Zustandsgleichung übernimmt die Neutronenmasse m die Rolle, die die Elektronenmasse m_e in (2.10), (2.11) und (2.13) innehatte, woraus sich mit

$$\rho_1 = \frac{m^4 c^3}{\hbar^3} = \frac{m}{(\lambda_n / (2\pi))^3} \approx 10^{20} \text{ kg/m}^3 \quad (2.14)$$

die *Zustandsgleichung für Neutronenmaterie* ergibt:

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{2/3} \quad (2.15)$$

für $\rho \lesssim \rho_1$ (die Neutronen sind nichtrelativistisch) und

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{1/3} \quad (2.16)$$

für $\rho \gtrsim \rho_1$ (die Neutronen sind relativistisch). Zum Vergleich: Die Dichten der beobachteten Neutronensterne liegen zwischen 10^{17} kg/m^3 (was größenordnungsmäßig der Dichte von Atomkernen entspricht) und 10^{19} kg/m^3 .

Eine weitere Erhöhung des Drucks führt auf Effekte, die nur von der Allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben werden (nicht aufzuhaltender Gravitationskollaps).

3 Ein bisschen Allgemeine Relativitätstheorie

- Nichtverträglichkeit von Newtons Gravitationstheorie mit der Speziellen Relativitätstheorie
- Äquivalenzprinzip
- Einsteins Idee: Schwerkraft als Geometrie einer *gekrümmten Raumzeit* und ihre Beziehung zur Speziellen Relativitätstheorie

- Postulate: Einsteinsche Feldgleichungen (Materie beeinflusst – “krümmt” – die Raumzeit, wobei Energie, Impuls und Druck zu dieser Wirkung beitragen), Weltlinien freier Teilchen sind Geodäten (die Geometrie der Raumzeit bestimmt die Bewegung von Materie). Die Allgemeine Relativitätstheorie mit ihrer geometrischen Sichtweise gilt vielen als die “schönste Theorie der Physik”.
- Was ist Krümmung? Krümmung impliziert nicht notwendigerweise höhere Dimensionen! Die Wanze auf der heißen Ofenplatte.
- Metrik gekrümmter Räume, Rolle der Koordinaten.
Beispiel: Metrik der Sphäre mit Radius R in den durch die stereographische Projektion (Ebene liegt auf Nordpol) definierten Koordinaten:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\left(1 + \frac{1}{4R^2}(x^2 + y^2)\right)^2}. \quad (3.1)$$

Der Nordpol entspricht $x = y = 0$, der Äquator entspricht dem Kreis $x^2 + y^2 = 4R^2$, der Südpol entspricht dem “Unendlichen”.

- Allgemeine Metrik der Raumzeit (Koordinaten x^0, x^1, x^2 und x^3)

$$ds^2 = g_{00}(x)(dx^0)^2 + g_{11}(x)(dx^1)^2 + 2g_{01}(x)dx^0dx^1 + \dots \quad (3.2)$$

$$\equiv g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \quad (3.3)$$

Die hier auftretenden Funktionen $g_{\mu\nu}(x)$ heißen *metrische Koeffizienten*. Sie beschreiben die Geometrie der Raumzeit (und damit auch das Gravitationsfeld). Die Einsteinschen Feldgleichungen sind ein System von (nichtlinearen) Differentialgleichungen für diese Koeffizienten.

Kausalstruktur: $x \equiv (x^\mu)$ und $x + dx \equiv (x^\mu + dx^\mu)$ liegen zueinander zeitartig, lichtartig bzw. raumartig, wenn $ds^2 > 0, = 0$ bzw. < 0 ist.

Bewegung freier Teilchen: Weltlinien sind Geodäten bezüglich der durch die Metrik definierten Geometrie der Raumzeit (und zwar zeitartige Geodäten für massive Teilchen und lichtartige Geodäten für masselose Teilchen, d. h. für Photonen = Lichtstrahlen).

Beispiele:

- Minkowskiraum (“flache Raumzeit”, keine Gravitation):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.4)$$

oder, in Kugelkoordinaten:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.5)$$

– Schwarzschildmetrik (wird später besprochen):

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.6)$$

Die Angabe “eines Gravitationsfeldes” ist im Rahmen der Newtonschen Theorie die Angabe eines Vektorfelds, das die Gravitationsfeldstärke⁹ beschreibt und in der Allgemeinen Relativitätstheorie die Angabe einer Raumzeit-Metrik! Liegt eine solche vor, so kann analysiert werden, welche physikalische Situation sie beschreibt (und auch welche physikalische Bedeutung die in ihr verwendeten Koordinaten haben).

- Metrik schwach gekrümmter Raumzeiten, “lineare Näherung”

$$ds^2 = c^2 \left(1 + \frac{2\phi(t, \vec{x})}{c^2} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi(t, \vec{x})}{c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.7)$$

wobei ϕ das Newtonsche Gravitationspotential¹⁰ ist. Gilt mit guter Näherung, wenn $|\phi| \ll c^2$.

Für schwache Gravitationsfelder vorausgesagte Effekte (Ganggeschwindigkeit von Uhren, Verhalten von Maßstäben) können mit Hilfe der entsprechenden Formeln aus der Speziellen Relativitätstheorie nach der Ersetzung

$$\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{\Delta\phi(t, \vec{x})}{c^2}} \quad (3.8)$$

berechnet werden¹¹, wobei $\Delta\phi$ die Potentialdifferenz von Beobachter zu beobachtetem Objekt ist.

Heuristische Herleitung: Ein System rotiere mit Winkelgeschwindigkeit ω . Es tritt eine Scheinkraft (“Zentrifugalkraft”) auf, die dem Potential $\phi(r) = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2$ entspricht. Ein Körper im Abstand r vom Rotationszentrum bewegt sich mit Geschwindigkeit $v = \omega r$. Für ihn gelten aus der Sicht eines im Zentrum ruhenden

⁹ Nennen wir sie $\vec{G} \equiv \vec{G}(t, \vec{x})$, so ist die Kraft auf einen Probekörper der Masse m durch $\vec{F} = m\vec{G}$ gegeben. Anstelle des Vektorfelds \vec{G} kann auch das Newtonsche Gravitationspotential $\phi \equiv \phi(t, \vec{x})$ (ein Skalarfeld) angegeben werden, das mit der Feldstärke in der Beziehung $\vec{G} = -\vec{\nabla}\phi$ steht. Ist eine Massenverteilung durch ihre Dichte $\rho \equiv \rho(t, \vec{x})$ gegeben, so folgt das Potential aus der Newtonschen Feldgleichung $\Delta\phi = 4\pi G\rho$. In der Allgemeinen Relativitätstheorie treten an ihre Stelle die Einsteinschen Feldgleichungen.

¹⁰ Im Außenraum eines kugelförmigen Sterns der Masse M hängt es nur von der Radialkoordinate r (Abstand vom Sternzentrum) ab, und es gilt $\phi(r) = -\frac{GM}{r}$.

¹¹ Bewegt sich das Objekt, so kann

$$\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} - \frac{\Delta\phi(t, \vec{x})}{c^2}} \quad (3.9)$$

gesetzt werden, was speziell-relativistische Effekte mit Effekten schwacher Gravitationsfelder kombiniert.

(und daher nichtrotierenden) Beobachters speziell-relativistische Effekte, die von einer Relativgeschwindigkeit $v = \omega r$ herrühren. Nun ist $-2\phi = \omega^2 r^2 = v^2$, und für diesen Beobachter ist $\Delta\phi = -\phi$, d. h. in den entsprechenden Formeln kann v^2 durch $2\Delta\phi$ ersetzt werden. Aufgrund des Äquivalenzprinzips wird zwischen dem Potential einer Scheinkraft und dem Potential der Schwerkraft nicht unterschieden. (Achtung: Diese Argumentation ist nicht ganz lupenrein, da es sehr wohl einen physikalischen Unterschied zwischen Scheinkräften und Gravitationskräften gibt! Sie kann daher die volle Theorie nicht ersetzen).

- Einige von der Allgemeinen Relativitätstheorie vorausgesagte Effekte:
 - Frequenzverschiebung im statischen Gravitationsfeld: Licht wird an einem Ort mit Gravitationspotential ϕ_e emittiert und an einem Ort mit Gravitationspotential ϕ_a absorbiert. Frequenzunterschied: $\frac{f_a}{f_e} = \frac{1+2\phi_e/c^2}{1+2\phi_a/c^2}$, d. h. $\Delta f/f = -\Delta\phi/c^2$. (“Uhren gehen in der Nähe schwerer Körper langsamer”). Nahe der Oberfläche eines kugelförmigen Himmelskörpers mit Masse M und Radius R gilt, wenn $|\Delta r| \ll R$ ist,

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{GM\Delta r}{c^2 R^2} \equiv -\frac{g\Delta r}{c^2}. \quad (3.10)$$

Für aufsteigendes Licht ist $\Delta r > 0$, daher $\Delta f < 0$ (Rotverschiebung), für absteigendes Licht ist $\Delta r < 0$, daher $\Delta f > 0$ (Blauverschiebung). Mit dem so genannten *Schwarzschildradius*

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.11)$$

der Masse M wird (3.10) zu

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{R_S}{2R} \frac{\Delta r}{R}. \quad (3.12)$$

Für die Erde gilt $R_S = 0.89 \text{ cm}$. Dieser Effekt wurde im Jahr 1959 von Robert Pound und Glen Rebka für Gammastrahlen in einem 22.6 m hohen Turm (daher $|\Delta f/f| \approx 2.47 \cdot 10^{-15}$) an der Harvard University mit Hilfe des Mößbauer-Effekts nachgewiesen.

- Lichtablenkung durch einen Stern: Ein an einem Stern vorbeilaufender Lichtstrahl wird um den Winkel

$$\Delta\alpha = \frac{4GM}{b c^2} = \frac{2R_S}{b} \quad (3.13)$$

abgelenkt, wobei b die minimale Entfernung zum Sternmittelpunkt (der so genannte *Stoßparameter*) und R_S der Schwarzschildradius des Sterns ist. Für Licht, das am Sonnenrand vorbeiläuft (der Radius der Sonne beträgt

$6.957 \cdot 10^8$ m, ihr Schwarzschildradius $2.954 \cdot 10^3$ m), gilt $\Delta\alpha = 1.75''$. Der Nachweis dieses von Einsteins Theorie vorhergesagten Werts während der totalen Sonnenfinsternis am 29. Mai 1919 durch Arthur Stanley Eddington stellte den entscheidenden Durchbruch der Allgemeinen Relativitätstheorie dar und machte Einstein über Nacht berühmt.

- Lichtlaufzeiten im Sonnensystem (Shapiro-Experiment, 1964): Ein von der Erde ausgesandtes und von der Venus reflektiertes Radarsignal trifft verzögert ein, wenn es nahe der Sonne vorbeiläuft.
- Perihelverschiebung oder Periheldrehung: Das Perihel (der sonnennächste Punkt) einer Planetenbahn verschiebt sich pro Umlauf um einen (vom Zentralstern aus gemessenen) Winkel

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 a (1 - \varepsilon^2)}, \quad (3.14)$$

wobei a die große Halbachse der Bahn und $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ (das Verhältnis der Brennweite zur großen Halbachse) die numerische Exzentrizität der Bahn ist. Für nicht allzu große Exzentrizitäten ist $\Delta\varphi$ von der Größenordnung $20R_S/a$, wobei R_S der Schwarzschildradius der Sonne ist. Die Planeten bewegen sich daher genau genommen auf "Rosettenbahnen", wobei das Perihel im gleichen Umlaufsinn fortschreitet wie der Planet. Für den Merkur (dessen Bahn unter allen Planeten mit $\varepsilon \approx 0.2056$ die größte Exzentrizität besitzt) ist $\Delta\varphi = 0.104''$, d. h. das Merkur-Perihel wandert in 100 (Erd-)Jahren um $43''$.

- Zeitdilatation (Hafele-Keating-Experiment, 1971): Vergleich der Ganggeschwindigkeit von Cäsium-Atomuhren auf der Erde und in Verkehrsflugzeugen in Ost- und Westflug. Speziell-relativistischer und allgemein-relativistischer Anteil tragen bei.
 - GPS
 - Thirring-Lense-Effekt
 - Gravitationswellen
 - Astrophysikalische Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie (vor allem betreffend den berühmten Hulse-Taylor-Doppelpulsar PSR 1913+16) werden später besprochen.
- Generell ist das Verhältnis R_S/R , d. h. Schwarzschildradius zu Radius eines Sterns, ein Maß für die Größe allgemein-relativistischer Effekte in seiner Nähe und in seinem Inneren. Aber Achtung: Im Fall *sehr starker* Gravitationsfelder verlieren viele der oben genannten Begriffe (beispielsweise das Newtonsche Gravitationspotential ϕ) vollends ihre Bedeutung.

- Gravitation und Quantentheorie, Planck-Skala.

In einer Quantentheorie der Gravitation (die es bis jetzt noch nicht gibt) sind Unbestimmtheiten (“Fluktuationen”) der Raumzeit zu erwarten. Wenn die physikalische Bedeutung einer Zeitvariablen t davon abhängt, an welchem Ort \vec{x} sich etwa ein massiver Körper befindet, sind quantenmechanische Wellenfunktion der Form $\psi \equiv \psi_t(\vec{x})$ sinnlos. Das ist (stark verkürzt) der Grund, warum die Allgemeine Relativitätstheorie und die Quantentheorie nicht “zusammenzupassen” scheinen. Aus den Naturkonstanten c , G und \hbar lassen sich die Größen

$$\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.61625 \cdot 10^{-35} \text{ m} \quad \text{Planck-Länge} \quad (3.15)$$

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = \frac{\ell_P}{c} = 5.39124 \cdot 10^{-44} \text{ s} \quad \text{Planck-Zeit} \quad (3.16)$$

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \frac{\hbar}{\ell_P c} = 2.17644 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \quad \text{Planck-Masse} \quad (3.17)$$

bilden. ℓ_P und t_P sind die (“natürlichen”) Kandidaten jener raumzeitlichen Größenordnung, ab der die Beschreibung der Raumzeit als ein klassisches Kontinuum zusammenbricht. Was an deren Stelle treten soll, ist bis heute unklar.

4 Die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung

Wir betrachten eine selbstgravitierende radialsymmetrische nichtrotierende Materiekonfiguration (“Gaskugel”), die einen Stern oder eine interstellare Gaswolke modelliert. Mit $\mathcal{M}(r)$ wird die Masse innerhalb einer Kugel vom Radius r bezeichnet, mit $\rho(r)$ die Dichte im Abstand r vom Zentrum. Ist R ihr Radius, so ist ihre Masse gleich $M = \mathcal{M}(R)$.

Die Gaskugel sei im hydrostatischen Gleichgewicht. Nun ist Druck = Kraft/Fläche. In einem Abstand r vom Zentrum herrsche der Druck $p(r)$. Auf einer im Abstand r liegenden Fläche dA lastet eine bestimmte Masse. Auf einer im Abstand $r + dr$ (dr infinitesimal) liegenden Fläche dA lastet eine um $dA dr \rho(r)$ verringerte Masse. Deren Gewicht (d. h. der Betrag der Kraft auf die Fläche im Abstand r) ist durch

$$\frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2} dA dr \rho(r) \quad (4.1)$$

gegeben. Der Bruchterm ist die durch die Masse innerhalb von r bewirkte Schwerebeschleunigung. (Die Masse außerhalb von r trägt zu dieser Größe nichts bei). Der Druckunterschied ist daher gegeben durch

$$dp \equiv p(r + dr) - p(r) = - \frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2} dr \rho(r), \quad (4.2)$$

woraus nach Division durch dr die *hydrostatische Gleichgewichtsbedingung*

$$\frac{dp(r)}{dr} = - \frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2} \rho(r) \quad (4.3)$$

folgt. Sie ist – neben der Zustandsgleichung der Materie, aus der die Gaskugel besteht – die wichtigste Grundgleichung für die Modellierung der Sterndynamik.

Wird die Dichte ρ (näherungsweise) als konstant angenommen, so ist

$$\mathcal{M}(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \quad (4.4)$$

und daher

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{4\pi}{3} G r \rho^2, \quad (4.5)$$

woraus sofort der Druckverlauf

$$p(r) = p(0) - \frac{2\pi}{3} G r^2 \rho^2 \quad (4.6)$$

folgt. (Der Graph dieser Funktion ist eine nach unten offene Parabel). Am Sternradius verschwindet der Druck, d. h. es muss $p(R) = 0$ gelten, was den Druck im Zentrum der Kugel zu

$$p(0) = \frac{2\pi}{3} G R^2 \rho^2 \quad (4.7)$$

bestimmt. Daher ist

$$\frac{p(0)}{\rho c^2} = \frac{\pi}{3} \frac{2G}{c^2} R^2 \rho = \frac{1}{4} \frac{2GM}{c^2 R} \equiv \frac{R_S}{4R}, \quad (4.8)$$

wobei $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$ verwendet wurde und R_S der Schwarzschildradius (3.11) der Masse M ist. Wie bereits früher bemerkt, gibt das Verhältnis R_S/R die Größe allgemein-relativistischer Effekte an. Liegt es in der Größenordnung 1, so muss zur Beschreibung des Sterns die Allgemeine Relativitätstheorie herangezogen werden, aber auch für kleinere Werte von R_S/R machen sich (kleine) allgemein-relativistische Effekte bemerkbar, die als Test der Theorie dienen können (davon später).

In einer etwas gröberen Näherung dient der Druck $p(0)$ im Zentrum als Maß für den im Inneren der Gaskugel (des Sterns) herrschenden *mittleren* Druck, der nun einfach mit p bezeichnet wird. Unter Weglassung numerischer Faktoren der Größenordnung 1 wird die Gleichgewichtsbedingung damit:

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{GM}{c^2 R} \approx \frac{R_S}{R} \equiv \frac{\text{Schwarzschildradius}}{\text{Radius}} \quad (4.9)$$

Diese Größe bestimmt den in einem Stern – im Gleichgewicht – herrschenden (mittleren) Druck, der unter dem Einfluss der Eigengravitation des Sterns zustande kommt. Sie ist gerade die linke Seite der Zustandsgleichungen (2.1), (2.11), (2.13), (2.15) und (2.16) und kann daher in diese eingesetzt werden.

5 Stabilität und Instabilität

Wir schreiben die Zustandsgleichungen (2.1), (2.11), (2.13), (2.15) und (2.16) alle einheitlich in der Form

$$\frac{p}{\rho c^2} = f(\rho, T). \quad (5.1)$$

Die verschiedenen Zustandstypen der Materie werden dann durch die jeweilige Funktion f beschrieben. Das p auf der linken Seite können wir uns als jenen Druck im Inneren der Gaswolke vorstellen, der von der Teilchenbewegung (Temperatur) oder von der Entartung der Materie herrührt. Das p in der Gleichgewichtsbedingung (4.9) ist der von der Schwerkraft auf den Stern ausgeübte Druck. Wir können uns diesen beiden p 's als "Druck und Gegendruck" vorstellen. Im hydrostatischen Gleichgewicht müssen sie übereinstimmen, d. h. es muss dann gelten

$$\frac{GM}{c^2 R} \approx f(\rho, T). \quad (5.2)$$

In der Sternentwicklung tritt aber oft der Fall ein, dass sich die Grösse f aufgrund des Verhaltens der Materie (Beginn und Ende von Kernreaktionen, Entartung) ändert. Stellen wir uns (modellhaft) vor, dass sie sich abrupt ändert. Dann findet sich der Stern in einem Zustand, in dem (5.2) plötzlich nicht mehr gilt! Was geschieht dann?

- Ist

$$\frac{GM}{c^2 R} < f(\rho, T), \quad (5.3)$$

so ist der von der (Selbst-)Gravitation herrührende Druck *kleiner* als der von der Materie ausgeübte Gegendruck. Der Stern *expandiert*, d. h. er wird größer. Erst wenn (bzw. falls) zu einem späteren Zeitpunkt wieder die Bedingung für ein Gleichgewicht erfüllt ist, kann die Expansion zum Stillstand kommen.

- Ist

$$\frac{GM}{c^2 R} > f(\rho, T), \quad (5.4)$$

so ist der von der (Selbst-)Gravitation herrührende Druck *größer* als der von der Materie ausgeübte Gegendruck – die Materie kann dem Zusammengedrückt-Werden durch die Schwerkraft nicht widerstehen. Der Stern *kontrahiert* (*kollabiert*), d. h. er wird kleiner. Erst wenn (bzw. falls) zu einem späteren Zeitpunkt wieder die Bedingung für ein Gleichgewicht erfüllt ist, kann die Kontraktion zum Stillstand kommen.

6 Sternentstehung

Sterne entstehen durch die selbstgravitative Kontraktion interstellarer H-I-Wolken, die überwiegend aus neutralem (atomarem und molekularem) Wasserstoff (sowie kleinen Mengen Helium und Spuren schwererer Elemente) bestehen, und für die größenordnungsmäßig $\rho \approx 10^{-19} \text{ kg/m}^3$ (100 Atome pro Kubikzentimeter) und $T \approx 100 \text{ K}$ gilt.

Gemäß (5.4) mit $f = kT/(mc^2)$ wird eine solche Wolke instabil und beginnt zu kontrahieren, wenn $R < GMm/(kT)$ gilt¹², was mit $M \approx \rho R^3$ in der Form

$$R > R_J \equiv \sqrt{\frac{kT}{Gm\rho}} \approx 4 \cdot 10^{17} \text{ m} \approx 40 \text{ Lichtjahre} \quad (6.1)$$

ausgedrückt werden kann. R_J heißt *Jeans-Radius* und legt die ungefähre Größe einer kollabierenden Gaswolke fest¹³. Die zugehörige Masse ist die *Jeans-Masse*

$$M_J \approx \rho R_J^3 \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{kT}{Gm} \right)^{3/2} \approx 5 \cdot 10^{33} \text{ kg} \approx 2000 M_\odot, \quad (6.2)$$

mit deren Hilfe die Bedingung für den Einsatz der Kontraktion $M > M_J$ lautet. Die Sternentstehung beginnt also mit Wolken von einigen hundert oder tausend Sonnenmassen. Wir können die Dauer des Kontraktionsprozesses grob abschätzen durch den Ansatz

$$R(t) \approx \frac{GM}{R(t)^2} t^2 \quad (6.3)$$

(modelliert gemäß dem Fallgesetz $R \approx \frac{g}{2} t^2 \approx gt^2$ mit $g \approx GM/R^2$), woraus sich die Größenordnung

$$t \approx \sqrt{\frac{R_J^3}{GM_J}} \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \approx 10^7 \text{ Jahre} \quad (6.4)$$

ergibt. Der Sternbildungsprozess dauert einige Millionen Jahre. Tatsächlich entsteht aus einer derartigen Wolke nicht ein einziger Stern: Da die Jeans-Masse mit steigender Dichte kleiner wird, erfüllen auch kleinere Teile der Wolke das Kriterium der Instabilität, wodurch diese in getrennte Kondensationskeime (so genannte Globulen, die räumlich voneinander abgegrenzt sind) zerfällt. Letzlich kommt es dadurch zur Ausbildung eines *Sternhaufens* (von einigen hundert oder tausend Sternen). Zu Beginn des Prozesses steigt die Temperatur zunächst nicht an, da die frei werdende Energie in Form von Strahlung entweicht¹⁴. Mit fortschreitender Kontraktion werden die Fragmente optisch dicht. Die Energie kann

¹² Eine stabile Gaswolke kann beispielsweise durch die Druckwelle einer nahen Supernova, Dichtewellen in der interstellaren Materie oder den Strahlungsdruck bereits vorhandener junger Sterne instabil werden.

¹³ Er hängt genau genommen nicht nur von der Dichte und der Temperatur der Wolke ab, sondern auch von ihrer chemischen Zusammensetzung, d. h. vom Heliumanteil und der so genannten *Metallizität*. (In der Astrophysik werden manchmal alle Elemente außer Wasserstoff und Helium als "Metalle" bezeichnet). Um den Anteil schwererer Elemente als Wasserstoff zu berücksichtigen, muss die Größe m in (6.1) – als mittlere Teilchenmasse interpretiert – entsprechend größer als die Masse des Wasserstoffatoms gewählt werden. Das ändert aber nicht viel an unseren Schlussfolgerungen.

¹⁴ Durch die Strahlung werden die Moleküle der Wolke aufgebrochen und ihre Atome ionisiert – es entsteht ein so genanntes H-II-Gebiet aus ionisiertem atomarem Wasserstoff, das sich durch ultraviolette Strahlung bemerkbar macht. Einige H-II-Gebiete in der Milchstraße können wir mit dem bloßen Auge sehen (wie beispielsweise den Orionnebel). Die Untersuchung derartiger Gebiete in anderen Galaxien hilft bei der Bestimmung deren Entfernung und chemischer Zusammensetzung.

dann nicht mehr entweichen und die Temperatur steigt an, was – wegen des wachsenden Faktors $T^{3/2}$ in (6.2) – die Abnahme der Jeans-Masse stoppt. Erreicht die Jeans-Masse größenordnungsmäßig die Sonnenmasse, was bei einer (immer noch sehr kleinen) Dichte von etwa

$$\rho \approx \frac{1}{M_{\odot}^2} \left(\frac{kT}{Gm} \right)^3 \approx 5 \cdot 10^{-13} \text{ kg/m}^3 \quad (6.5)$$

der Fall ist, kommt zunächst die Fraktionierung zum Stillstand. Aus den Fragmenten werden *Protosterne*, die weiterhin kollabieren und dabei aufgeheizt werden. (Ihr typischer Abstand beträgt einige Lichtjahre). Bei einer Temperatur von etwa $T \gtrsim 6 \cdot 10^5$ K setzen mit dem Deuteriumbrennen die ersten Kernreaktionen ein. Bei einer Temperatur von $T \gtrsim 3 \cdot 10^6$ K beginnt das Wasserstoffbrennen, mit dem die meisten Sterne den Großteil ihres Lebens zubringen, und die Kontraktion kommt zum Stillstand. Sobald die Materie vom Strahlungsdruck stabilisiert wird und sich im Gleichgewicht befindet, spricht man von einem *Stern*¹⁵.

Begleitet werden diese Vorgänge durch die lokale Gravitations- und Strahlungsdynamik, die einen anfänglichen Drehimpuls der Gaswolke (der durch die relative Eigenbewegung der Materie immer vorhanden ist) in zunehmend schnellere Rotation der zusammenstürzenden Materie umwandelt, die Details des Fraktionierungsprozesses (und somit auch die Massen der einzelnen Sterne) bestimmt und zur Bildung von Mehrfachsternsystemen und Planeten¹⁶ führt.

7 Hauptreihensterne (“normale Sterne”)

Während der ersten (und längsten) Phase seines Lebens kann die Materie eines Sterns recht gut mit Hilfe der idealen Gasgleichung (2.1), also $f(\rho, T) = \frac{kT}{mc^2}$, beschrieben werden. Mit (4.9) erhalten wir die *Gleichgewichtsbedingung für normale Sterne*:

$$\frac{GM}{c^2 R} \approx \frac{kT}{mc^2} \quad (7.1)$$

Da der Materieverlust eines normalen Sterns vernachlässigt werden kann (seine Masse M bleibt praktisch konstant), folgt unmittelbar, dass sein Radius sich im Laufe seines Lebens

¹⁵ Wichtig dabei ist allerdings, dass ein Stern aus eigener Kraft leuchtet und die dafür nötige Energie aus Kernfusionsprozessen in seinem Inneren bezieht. In Fragmenten, deren Masse kleiner als etwa $0.08 M_{\odot}$ ist, reicht der Druck nicht aus, um die zum Einsetzen der Kernfusion nötige Temperatur zu erzeugen. Daher gibt es keine Sterne, die leichter als etwa ein Zwölftel der Sonnenmasse sind.

¹⁶ Die Entstehung von Planeten – für die die Ausbildung einer *Akkretionsscheibe* und die Trennung von leichten und schweren Elementen von Bedeutung ist – ist ein weiteres spannendes astrophysikalisches Thema, bei dem sich die strukturbildende Wirkung der Gravitation zeigt.

umgekehrt proportional zur Temperatur verhält: $R \sim T^{-1}$. Wird ein Stern heißer (was die meiste Zeit seiner Lebensdauer der Fall ist), so zieht er sich zusammen. Dehnt er sich aus, so kühlt er ab (Rotes Riesenstadium gegen Ende seiner Entwicklung, wobei die Abkühlung in der Praxis auf die sich ausdehnenden Außenschichten beschränkt bleibt). Weiters folgt $\rho \sim R^{-3} \sim T^3$. Verdoppelt (bzw. halbiert) sich seine Temperatur, so erfährt seine Dichte eine Verachtfachung (bzw. einen Abfall auf ein Achtel). Da die linke Seite von (7.1) mit (4.9) gleich dem Verhältnis R_S/R ist, ist die Größe allgemein-relativistischer Effekte allein durch die Temperatur (die durch die Kernprozesse bestimmt wird) und die Protonenmasse festgelegt – also durch kernphysikalische Größen. Bemerkenswerterweise ist sie unabhängig vom Wert der Gravitationskonstante. Für einen Stern in der Phase des Wasserstoffbrennens beträgt die Temperatur typischerweise einige 10^7 K, womit sich größenordnungsmäßig

$$\frac{R_S}{R} \approx \frac{kT}{mc^2} \approx \frac{10^{-13} T}{\text{K}} \approx 10^{-6} \quad (7.2)$$

ergibt. Um die Dynamik normaler Sterne wie unserer Sonne zu verstehen, muss die Allgemeine Relativitätstheorie daher nicht verwendet werden. Obwohl wir noch weit vom eigentlichen Gegenstand dieser Vorlesung (*relativistische Astrophysik*) entfernt sind, hier einige wichtige physikalische Eigenschaften normaler Sterne:

- **Masse**

Die zentrale Kenngröße, die die Entwicklung eines Hauptreihensterns bestimmt, ist seine Masse. Hauptreihensterne existieren im Bereich

$$0.08 M_\odot \lesssim M \lesssim 120 M_\odot . \quad (7.3)$$

Unterhalb von $0.08 M_\odot$ ist keine anhaltende Kernfusion möglich. Sterne mit mehr als 120 Sonnenmassen können vermutlich gar nicht entstehen, da der von ihnen ausgehende Strahlungsdruck die umgebende Wolke wegblasen würde. Die Durchschnittsmasse dürfte bei etwa $0.6 M_\odot$ liegen¹⁷.

- **Leuchtkraft**

Die Leuchtkraft P eines Sterns ist definiert als seine Strahlungsleistung über das gesamte elektromagnetische Spektrum ($P_\odot \approx 3.845 \cdot 10^{26}$ W). Über das Stefan-Boltzmann-Gesetz¹⁸

$$P = 4\pi\sigma R^2 T_{\text{eff}}^4 \quad (7.4)$$

wird die *effektive Temperatur* T_{eff} definiert¹⁹, die im Wesentlichen die Oberflächentemperatur des Sterns ist und nicht mit T , der Durchschnittstemperatur im Sterninneren, verwechselt werden darf. Eine in der Astronomie gängige Klassifizierung

¹⁷ Schwere Sterne entstehen seltener als leichte. Die Entstehung mittelschwerer Sterne kann durch eine Massenverteilung der Form $dN \sim M^{-2.35} dM$ angenähert werden.

¹⁸ Ein schwarzer Strahler der Temperatur T und Fläche A emittiert über das gesamte elektromagnetische Spektrum eine Strahlungsleistung $P = \sigma AT_{\text{eff}}^4$, wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante ist. Im Fall eines Sterns ist A gleich seiner Oberfläche $4\pi R^2$ zu setzen.

¹⁹ T_{eff} ist jene Temperatur, die ein schwarzer Strahler haben müsste, um die gleiche Leuchtkraft zu erzielen. Hauptreihensterne sind in der Regel mit guter Genauigkeit schwarze Strahler, aber da auch aus etwas tieferen – und daher heißeren – Schichten Strahlung emittiert wird, keine exakten.

von Bereichen der effektiven Temperatur sind die *Spektralklassen* O, B, A, F, G, K, M, L, T der Sterne. Die Sonne ist ein Hauptreihenstern der Spektralklasse G2. Weiters gilt für Hauptreihensterne angenähert die *Masse-Leuchtkraft-Beziehung* $P \sim M^{3.5}$, die wir auch in der Form

$$\frac{P}{P_{\odot}} \approx \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.5} \quad (7.5)$$

anschreiben können, und die zur Abschätzung der Masse von Sternen aus der Beobachtung ihrer Leuchtkraft genutzt wird. Der Exponent 3.5 ist empirisch angepasst, die Theorie liefert den Wert 3. Die effektive Temperatur (Farbe!) eines Sterns kann relativ leicht gemessen werden²⁰. Ist zusätzlich seine Entfernung bekannt, so kann aus seiner scheinbaren Helligkeit die Leuchtkraft und mit Hilfe des Stefan-Boltzmann-Gesetzes (7.4) sein Radius bestimmt werden. Ein Schätzwert für seine Masse ergibt sich dann aus der Masse-Leuchtkraft-Beziehung (7.5).

Beispiel: Sirius A, der hellste Stern am Nachthimmel, ist vom Spektraltyp A1 ($T_{\text{eff,Sirius A}} \approx 1.7 T_{\text{eff},\odot} \approx 9900 \text{ K}$) und 8.6 Lichtjahre entfernt. Seine Leuchtkraft beträgt $P_{\text{Sirius A}} \approx 25 P_{\odot}$. Mit (7.4) folgt

$$R_{\text{Sirius A}} \approx \frac{25^{1/2}}{1.7^2} R_{\odot} \approx 1.7 R_{\odot}. \quad (7.6)$$

Seine Masse ist $M_{\text{Sirius A}} \approx 2.1 M_{\odot}$ (während die nur näherungsweise gültige Beziehung (7.5) den Wert $2.5 M_{\odot}$ ergäbe). Sein Begleiter Sirius B ist der nächstgelegene Weiße Zwerg²¹.

• Kernprozesse und Lebensdauer

Obwohl die bisher hingeschriebenen Beziehungen zum physikalischen Verständnis der Entstehung und Entwicklung von Sternen beitragen, bestimmen sie deren Dynamik nicht vollständig. Ziehen wir kurz Bilanz:

- Die vier hauptsächlich interessierenden Kenngrößen eines Sterns sind seine Masse (M), sein Radius (R), seine Temperatur im Inneren (T) und seine effektive Temperatur (T_{eff}).
- Sind sie bekannt, so bekommen wir den Druck p aus der idealen Gasgleichung (2.1), die Dichte aus der Beziehung $\rho \approx M/R^3$ und die Leuchtkraft P aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (7.4).
- Die Masse eines Sterns wird durch die dynamischen Details des Fraktionierungsprozesses der anfänglichen Gaswolke im Bereich (7.3) festgelegt (“gewürfelt”), kann also nicht (oder nur statistisch) vorausgesagt werden.

²⁰ Wobei die Eigenbewegung des Sterns, die aufgrund des Dopplereffekts eine Rot- oder Blauverschiebung bewirkt, berücksichtigt werden muss.

²¹ Unregelmäßigkeiten in der Umlaufbewegung legen nahe, dass sich eine dritte Komponente (“Sirius C”) mit etwa $0.06 M_{\odot}$ in diesem System befindet.

- Die Gleichgewichtsbedingung (7.1) stellt *eine* weitere Einschränkung dar.

Damit bleiben (neben der Masse M) *zwei* Freiheitsgrade unbestimmt, etwa T und T_{eff} . Sie werden durch kernphysikalische Größen (Wirkungsquerschnitte) unter Sternbedingungen festgelegt und in Form aufwändiger Sternmodelle analysiert, auf die wir hier nicht näher eingehen können. Als Ersatz bietet sich eine phänomenologische Beschreibung an: Einerseits wird T_{eff} durch die Masse-Leuchtkraft-Beziehung (7.5) näherungsweise festgelegt. Ist sie bekannt, so verbleibt noch der Radius R (bzw. die Leuchtkraft P) des Sterns als letzte freie Kenngröße. Diese letzte Freiheit wird durch Beobachtungsdaten aufgefüllt: Im so genannten Hertzsprung-Russell-Diagramm wird üblicherweise $\log P$ (nach oben) gegen $\log T_{\text{eff}}$ (von rechts nach links ansteigend) aufgetragen. Für jeden Stern kann ein Punkt eingezeichnet werden (aus dem sich mit (7.4) sofort der Radius ergibt), und überraschenderweise sind die normalen Sterne im Diagramm nicht zufällig verteilt, sondern liegen auf einer Linie, die sich schräg von rechts unten (kühl und dunkel) nach links oben (heiß und hell) zieht. Normale Sterne brennen stationär auf dieser so genannten *Hauptreihe* (und werden daher auch *Hauptreihensterne* genannt). Sie befinden sich im Zustand des Wasserstoffbrennens²², wobei die Kernfusion nur im genügend heißen Kernbereich stattfindet und insgesamt nur ein Teil (nach genaueren Berechnungen typischerweise nur etwa ein Zehntel) des vorhandenen Wasserstoffs in Helium fusioniert wird.

Da ihr Energievorrat nur $\sim M$ ist, die Abstrahlung aber $\sim M^{3.5}$, leben schwere Sterne kürzer als leichte. Um die Lebensdauer grob abzuschätzen, kann die bei der Kernfusion frei werdende Energie durch den Massendefekt ausgedrückt werden. Er liegt in der Größenordnung von knapp einem Prozent (vgl. (2.3)), womit einem Stern der Masse M ein Energievorrat für das Wasserstoffbrennen von etwa $0.01 Mc^2$ zur Verfügung steht, von dem etwa ein Zehntel ausgenutzt wird. Wird überschlagsmäßig angenommen, dass die Abstrahlung konstant bleibt, ist sie nach einer Zeit der Größenordnung

$$\mathcal{T} \approx 10^{-3} \frac{Mc^2}{P} \quad (7.7)$$

beendet, was für die Sonne mit 10^{10} Jahren die richtige Größenordnung wiedergibt²³. Insgesamt bleiben Sterne – je nach ihrer Masse – zwischen wenigen zehntausend Jahren und einigen hundert Milliarden Jahren auf der Hauptreihe.

²² Für Sterne bis zur Sonnenmasse ist die Proton-Proton-Reaktion die vorherrschende Energiequelle. Der Bethe-Weizsäcker-Zyklus läuft erst bei Temperaturen über $1.4 \cdot 10^7$ K ab und ist ab $3 \cdot 10^7$ K vorherrschend, beispielsweise in Sirius A.

²³ Die Sonne befindet sich zur Zeit etwa in der Hälfte ihrer Entwicklung als Hauptreihenstern. Sirius A wird bereits innerhalb der nächsten knappen Jahrmilliarde den zur Verfügung stehenden Vorrat an Wasserstoff verbraucht haben.

Im Laufe ihrer Zeit auf der Hauptreihe nimmt die Fusionsrate der Sterne langsam zu: Radius, Temperatur und Leuchtkraft wachsen²⁴. Schließlich neigt sich der Wasserstoffvorrat im Zentrum seinem Ende zu, und der Stern verlässt die Hauptreihe.

8 Überblick über die Endstadien der Sternentwicklung

Die weitere Entwicklung eines Sterns hängt maßgeblich von seiner Masse ab. Nach dem Erlöschen der Energievorräte im Kernbereich können die während der Hauptreihenphase herrschenden Temperaturen zunächst nicht mehr aufrechterhalten werden, und ein dramatisches Tauziehen zwischen erneutem Gravitationskollaps und anderen Kernreaktionen, die erst bei höheren Temperaturen zünden, setzt ein. Bevor wir uns die Endstadien vom Standpunkt der relativistischen Astrophysik genauer ansehen, hier zunächst ein grober phänomenologischer Überblick über die häufigsten Szenarien (nach unserem heutigen Erkenntnisstand):

- $M < 0.3 M_{\odot}$
Das Wasserstoffbrennen wird in einer wachsenden Schale um einen erloschenen Kern fortgesetzt (Schalenbrennen), nach dessen Ende der Stern bis zur Entartung der Elektronen kontrahiert, durch deren Entartungsdruck stabilisiert wird (Weißer Zwerg), auskühlt und als kalter (vorwiegend aus Helium bestehender) Aschehaufen endet (Schwarzer Zwerg).
- $0.3 M_{\odot} < M < 2.3 M_{\odot}$
Durch die Kontraktion des inaktiv gewordenen Kerns steigt dessen Dichte ($\rho_{\text{Kern}} \sim R_{\text{Kern}}^{-3}$) und damit auch dessen Temperatur, bis das Heliumbrennen zündet und Elemente bis zum Sauerstoff erzeugt werden, während gleichzeitig in äußeren Schichten noch Wasserstoffbrennen stattfindet. Diese erneute Aktivierung des Kerns führt auch zu einem Temperaturanstieg in der Hülle, die dramatisch (typischerweise bis zum 100-fachen des heutigen Sonnenradius) expandiert und dadurch abkühlt (Roter Riese). Der Stern erreicht im Hertzsprung-Russell-Diagramm den so genannten *Riesenast*. Nach einigen bis vielen Millionen Jahren erlischt das Heliumbrennen, der Kern kontrahiert erneut, und es entsteht (meist unter Abstoßung der äußeren Hülle als so genannter planetarischer Nebel, die mit einem entsprechenden Massenverlust verbunden ist) ein (vorwiegend aus Kohlenstoff und Sauerstoff bestehender) Weißer Zwerg, der sang- und klanglos erlischt²⁵.

²⁴ So hatte die Sonne zu Beginn ihrer Entwicklung nur etwa 70% ihrer heutigen Leuchtkraft. Dieser Prozess wird sich fortsetzen: Ihre Leuchtkraft wird sich innerhalb der nächsten 5 Milliarden Jahre verdoppeln, ihr Radius auf das 1.6-fache des heutigen Werts anwachsen. Bereits in einer knappen Milliarde Jahren wird die mittlere Temperatur auf der Erdoberfläche den für höhere Lebewesen kritischen Wert von 30° C überschreiten, eine weitere Milliarde Jahre später werden 100° C erreicht.

²⁵ Die Sonne wird in etwa 5 Milliarden Jahren mit diesen Prozessen beginnen, ihre äußere Hülle

- $2.3 M_{\odot} < M < 8 M_{\odot}$
Heliumbrennen und Riesenstadium wie zuvor. Nach deren Ende erneuter Kollaps des Kerns. Der durch die nachfallende Sternmaterie ausgeübte Druck bewirkt eine Dichte- und Temperaturerhöhung, die zum Zünden des Kohlenstoffbrennens führt. Nach einigen bis vielen 10000 Jahren ist auch dieser Brennstoff aufgebraucht. Die Abstoßung der äußeren Hülle (planetarischer Nebel) führt zu einem erheblichen Masseverlust, der verbleibende Rest wird zu einem (vorwiegend aus Sauerstoff, Magnesium und Neon bestehenden) Weißen Zwerg und erlischt.
- $M > 8 M_{\odot}$
Zunächst wie zuvor. Nach dem Ende des Kohlenstoffbrennens erneuter, durch die nachfallende Sternmaterie unterstützter Kollaps des Kerns, bis die zum Neonbrennen (Jahre) nötige Temperatur erreicht wird. Analog Sauerstoffbrennen (Jahre) und Siliziumbrennen (Tage bis Wochen). Unterschiedliche Fusionsprozesse in verschiedenen Schichten um den Kern, in dem Elemente bis zum Eisen fusioniert werden²⁶. Der (nur mehr einige 10000 km große) Eisenkern überschreitet schließlich eine kritische Grenzmasse (die so genannte Chandrasekhar-Masse von etwa $1.3 M_{\odot}$, mehr dazu später) und bricht (innerhalb weniger Sekunden) zusammen. Der durch die nachfallende Materie ausgeübte Druck reicht aus, um den Entartungsdruck der Elektronen zu überwinden, so dass der Weg zu einem stabilen Weißen Zwerg versperrt ist. Der Eisenkern kollabiert weiter und wird zu einem nur wenige Kilometer großen Neutronenstern oder zu einem Schwarzen Loch. (Welches von beiden unter welchen Bedingungen geschieht, ist noch nicht genau geklärt). Gleichzeitig wird die Hülle in einer Supernova-Explosion vom Typ II abgestoßen, deren extreme Temperaturen zur Fusion der schwersten Elemente (und zu einer Leuchtkraft, die die einer Galaxie übersteigen kann²⁷) führen.

In Doppelsternsystemen können zwei weitere dramatische Vorgänge auftreten:

- Roter Riese + Weißer Zwerg. Der Weiße Zwerg würde eigentlich erlöschen, aber Materie vom Begleiter spiralt auf seine Oberfläche, heizt sich dabei auf und zündet eine kurze erneute Phase des Wasserstoffbrennens (Nova).

wird fast an die Erdbahn heranreichen (deren Oberflächentemperatur dann enorm ansteigen wird), ihre Leuchtkraft wird um mehr als das 2000-fache ansteigen. Sie wird etwa eine halbe Milliarde Jahre lang ein Roter Riesenstern sein und dann zu einem von einem planetarischen Nebel umgebenen Weißen Zwerg von 0.55 (heutigen) Sonnenmassen werden. Sirius A wird nach einer knappen Milliarde Jahren den Zustand eines Roten Riesen erreichen und schließlich ebenfalls als Weißer Zwerg (von etwa 0.6 Sonnenmassen) enden.

²⁶ Unter allen Atomkernen weist das Nickel-Isotop ${}^{62}_{28}\text{Ni}$ mit knapp 9 MeV den größten Massendefekt pro Nukleon auf, gefolgt von den Eisen-Isotopen ${}^{58}_{26}\text{Fe}$ und ${}^{56}_{26}\text{Fe}$. Sie können unter Energiegewinnung aus leichteren fusioniert und aus schwereren durch Kernspaltung erzeugt werden. Umgekehrt kann aus ihnen aber weder durch Fusion noch durch Kernspaltung weitere Energie gewonnen werden. Sie stellen daher in gewissem Sinn den Endpunkt der stellaren *Nukleosynthese* dar.

²⁷ Wobei der größte Anteil der frei werdenden Gesamtenergie – innerhalb der ersten Sekunden – in Form von Neutrinos abgegeben wird.

- Roter Riese + Weißer Zwerg wie zuvor. Bevor die auf den Weißen Zwerg überströmende Materie das Wasserstoffbrennen auslösen kann, erreicht der Weiße Zwerg die kritische Chandrasekhar-Grenzmasse (die leicht von seiner chemischen Zusammensetzung abhängt und zwischen $1.2 M_{\odot}$ und $1.5 M_{\odot}$ liegt) und bricht zusammen (Supernova vom Typ I). Das daraufhin explosionsartig einsetzende Kohlenstoffbrennen zerreißt den Stern völlig. Supernovae dieses Typs haben alle aufgrund des sie auslösenden Mechanismus ungefähr die gleiche Helligkeit und werden als Standardkerzen für Entfernungsmessungen auf kosmologischen Skalen benutzt.

Das Ende der Sterne ist, wie wir sehen, mit der Abstoßung großer Materiemengen verbunden, wodurch sich mit der Zeit schwere Elemente im Universum anreichern²⁸ und mit zum Ausgangsmaterial für Sterne und Planeten der nächsten "Generation" werden.

9 Weiße Zwerge

Ein Weißer Zwerg entsteht, wenn ein Stern (genauer: sein Kern) nach dem Aufbrauch der für die Kernfusion zur Verfügung stehenden Energiereserven kollabiert und erst wieder durch den Entartungsdruck der Elektronen stabilisiert wird, *bevor* die für die Zündung weiterer Kernreaktionen nötige Temperatur erreicht wird. Die Temperatur spielt dann nur mehr eine Nebenrolle – wir wollen sie (näherungsweise) unter den Tisch fallen lassen und einen Weißen Zwerg als *kalt*es Objekt auffassen. Mit (2.11), (2.13) und (4.9) nimmt die *Gleichgewichtsbedingung für Weiße Zwerge* (nun auch für die relevanten Druckbereiche angeschrieben) die Form

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{GM}{c^2 R} \approx \frac{m_e}{m} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n/3} \quad (9.1)$$

mit $n = \begin{cases} 2, & \text{wenn } \rho_{\star} \lesssim \rho \lesssim \rho_0 & \text{(nichtrelativistisch)} \\ 1, & \text{wenn } \rho_0 \lesssim \rho \lesssim 10^{11} \text{ kg/m}^3 & \text{(relativistisch)} \end{cases}$

bzw. $n = \begin{cases} 2, & \text{wenn } p_{\star} \lesssim p \lesssim p_0 & \text{(nichtrelativistisch)} \\ 1, & \text{wenn } p_0 \lesssim p \lesssim 10^{25} \text{ kg/(m s}^2\text{)} & \text{(relativistisch)} \end{cases}$

an. Die untere Grenze des Gültigkeitsbereichs wurde früher mit 10^7 kg/m^3 angegeben. Wir werden sie sogleich noch etwas verkleinern. Die Grenzdichte $\rho_0 \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ kg/m}^3$, ab

²⁸ Wie wir noch sehen werden, entstand wenige Minuten nach dem Urknall das Ausgangsmaterial für die folgende Entwicklung: ^1_1H (75% der Masse), ^4_2He (25%), ^2_1H (0.01%) und Spurenelemente von ^3_2He , ^6_3Li , ^7_3Li und den instabilen Isotopen ^3_1H , ^7_4Be und ^8_4Be . Alle anderen Elemente wurden seither in Sternen – zum Teil erst ihren letzten dramatischen Phasen – erzeugt.

der die Elektronen relativistisch werden, wurde in (2.10) durch die Naturkonstanten c , \hbar , m und m_e ausgedrückt. Der zugehörige Druck ist $p_0 \approx (m_e/m)\rho_0 c^2 \approx 10^{24} \text{ kg}/(\text{m s}^2)$.

Wir wollen in die Diskussion der Weißen Zwerge die Frage aufnehmen, was diese Objekte eigentlich von Planeten und ähnlichen Objekten unterscheidet und müssen daher auch weniger dichte *kalte* Körper betrachten, wobei unter *kalt* gemeint ist, dass die Stabilität *nicht* durch die Temperatur bestimmt ist (was in der Praxis bedeutet, dass keine Kernfusion stattfindet). Erde und Jupiter sind solche Körper, die Sonne hingegen nicht. Für nicht-entartete Materie (also für kleine Drücke) gilt (9.1) nicht, denn aus dieser Beziehung würde sich $p \rightarrow 0$ für $\rho \rightarrow 0$ ergeben. Nun ist aber die atomare Struktur kleiner kalter Körper durch die elektromagnetische Wechselwirkung (die bewirkt, dass Festkörper "fest" sind) bestimmt. Der Druck ist in ihnen *nicht* eine Folge der thermischen Bewegung der Nukleonen und Elektronen, sondern eine Folge der zwischen ihnen wirkenden elektromagnetischen Kräfte. In diesem *gesamten* (riesigen!) Bereich kalter Materie ist die Dichte im Wesentlichen unabhängig vom genauen Wert des Drucks. Wir setzen sie größenordnungsmäßig an als die Dichte des Wasserstoffatoms

$$\rho_\star \approx \frac{m}{r_B^3} \approx 10^4 \text{ kg}/\text{m}^3, \quad (9.2)$$

wobei

$$r_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \approx \frac{\lambda_e}{2\pi\alpha} \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (9.3)$$

der Bohrsche Radius (das ist in etwa der mittlere Abstand des Elektrons vom Proton im Grundzustand) und α die Feinstrukturkonstante ist. Um die Größenordnung des Drucks, bis zu dem diese Zustandsform möglich ist – und ab dem die Entartung der Elektronen beginnt – abzuschätzen, setzen wir $\rho = \rho_\star$ in (9.1) ein und erhalten eine Größenordnung von²⁹

$$p_\star \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ kg}/(\text{m s}^2). \quad (9.4)$$

Gravitationskräfte können in einem derartigen Objekt zwar den Druck erhöhen, ändern aber – solange er unterhalb von p_\star bleibt – nicht die Größenordnung der Dichte. Der ungefähre Wert (9.2) der Dichte gilt von einzelnen Atomen über Staubkörner und Kühl-schränke bis zu den Planeten unseres Sonnensystems³⁰. Ab Drücken von etwa p_\star beginnt die Entartung der Elektronen, bis sie bei etwa $10^7 \text{ kg}/\text{m}^3$ vorherrscht.

Wir ergänzen die Zustandsgleichung kalter Materie also durch den Zusatz

²⁹ Zum Vergleich: Im Zentrum der Erde herrscht ein Druck von $4 \cdot 10^{11} \text{ kg}/(\text{m s}^2)$, im Jupiterinneren $3 \cdot 10^{13} \text{ kg}/(\text{m s}^2)$ und im Zentrum der Sonne $2 \cdot 10^{16} \text{ kg}/(\text{m s}^2)$.

³⁰ Eisen hat eine Dichte von $8 \cdot 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$, die Erde im Mittel $5 \cdot 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$, der Erdkern $10^4 \text{ kg}/\text{m}^3$, Jupiter im Mittel $10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$

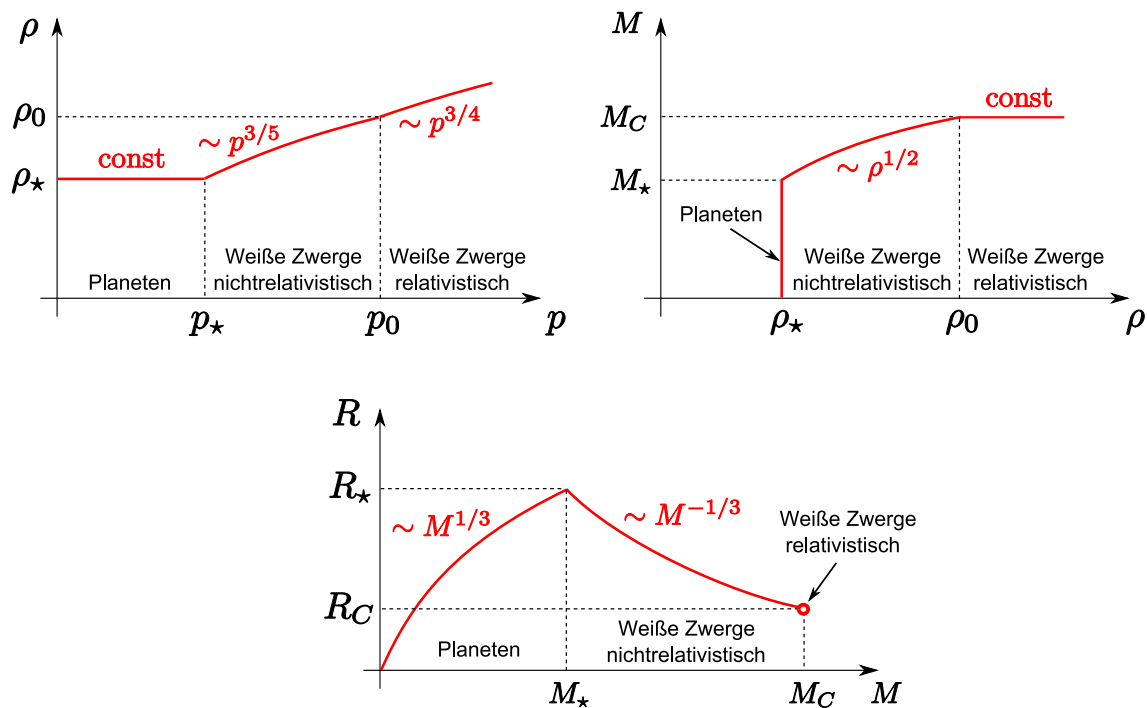


Abbildung 1: Schematische (nicht maßstabsgetreue) Skizze der Verhältnisse unseres auf (9.1) und (9.5) beruhenden Modells für Planeten und Weiße Zwerge.

$$\rho \approx \rho_* \quad \text{wenn} \quad p \lesssim p_* \quad (9.5)$$

und besitzen damit ein Modell, das gemeinsam mit (9.1) das Verhalten kalter Objekte im Bereich zwischen einem Atom und einem Weißen Zwerg beschreibt. (9.5) wollen wir als den Bereich der *Planeten* bezeichnen (in der Praxis handelt es sich dabei um Fragmente der Sternentstehungswolke, in denen von Beginn an keine Kernfusion stattgefunden hat), während (9.1) die Weißen Zwerge definiert (in denen die Kernfusion bereits versiegt ist). Das Modell besteht damit aus drei Bereichen: Planeten, nichtrelativistische Weiße Zwerge und relativistische Weiße Zwerge. Die Abhängigkeit der Dichte vom Druck ist in Abbildung 1 skizziert (links oben). Beachten Sie, dass alle in (9.1) und (9.5) auftretenden Konstanten sowie die Gültigkeitsbereiche (außer den Obergrenzen für die Dichten, zu denen wir noch kommen) durch die Naturkonstanten c , G , \hbar , m_e , m und e ausgedrückt sind. Das ist ein schönes Beispiel für die Verzahnung der Astrophysik mit der Physik der Teilchen und fundamentalen Wechselwirkungen.

Sehen wir uns die drei Bereiche etwas genauer an, so stoßen wir sogleich auf einige Überraschungen:

- **Planeten**

Gemäß (9.5) ist die Masse eines Planeten durch $M \approx \rho_* R^3$ gegeben, daher gilt $R \sim M^{1/3}$. Der Radius wächst mit zunehmender Masse. Anhäufung von Materie vergrößert den Haufen, was unserer Alltagserfahrung entspricht.

- **Weißer Zwerge, nichtrelativistisch**

Wie hängt der Radius mit der Masse zusammen? Auflösen von (9.1) mit $n = 2$ nach R ergibt (unter Verwendung von $\rho = M/R^3$) sofort $R \sim M^{-1/3}$. Das ist Überraschung Nummer 1: Der Radius wird mit zunehmender Masse *kleiner*! Physikalisch bedeutet das, dass der Entartungsdruck der Elektronen der Gravitation schlechter standhält als die relativ starre elektromagnetische Bindung: Je größer der durch die Schwerkraft verursachte Druck ist, umso stärker werden die Raumgebiete, die jedes Elektron für sich beanspruchen kann, zusammengedrückt, wodurch der Körper als Ganzes schrumpft.

Gemeinsam mit dem Verhalten $R \sim M^{1/3}$ für Planeten bedeutet das, dass es einen maximalen Radius für kalte Körper gibt! Mit unserem vereinfachten Modell können wir ihn nicht exakt vorhersagen³¹, aber größenordnungsmäßig kommt ein Objekt bei einem Druck von p_* (wenn die elektromagnetischen Atombindungen gerade noch halten) in diesen Bereich. Mit (9.1) lässt er sich zu

$$R_* \approx \frac{1}{\rho_*} \sqrt{\frac{p_*}{G}} \approx 6 \cdot 10^7 \text{ m} \approx 0.08 R_\odot \quad (9.6)$$

abschätzen. Die zugehörige Masse ist

$$M_* \approx \frac{1}{\rho_*^2} \left(\frac{p_*}{G}\right)^{3/2} \approx 2 \cdot 10^{27} \text{ kg} \approx 10^{-3} M_\odot. \quad (9.7)$$

Beide Größen entsprechen grob dem Jupiter³². Die Grenze zwischen Planeten und Weißen Zwergen verläuft also ein bisschen oberhalb des Jupiter. Unter jenen bisher bekannten Exoplaneten, deren Radius und Masse sich einigermaßen sicher bestimmen lassen, ist TrES-4 mit dem 1.7-fachen Jupiterradius der größte, PSR B1620-26c mit der 2.5-fachen Jupitermasse der schwerste.

- **Weißer Zwerge, relativistisch**

Überraschung Nummer 2 ergibt sich aus (9.1) mit $n = 1$. Wird $\rho = M/R^3$ eingesetzt, fällt der Radius heraus, und es bleibt nach einer kleinen Rechnung die Aussage

$$M \approx M_C \quad (9.8)$$

³¹ In der Praxis hängen die Details von der chemischen Zusammensetzung und von Restbeständen der Temperatur ab.

³² Jupiter hat eine Masse von $1.899 \cdot 10^{27} \text{ kg} \approx 10^{-3} M_\odot$ und einen Radius von etwa $7 \cdot 10^7 \text{ m} \approx 0.1 R_\odot$. Da seine Dichte geringer ist als ρ_* , ist er etwas größer als der von uns abgeschätzte Wert (9.6).

übrig, wobei

$$M_C \approx \frac{c^3}{\sqrt{\rho_0}} \left(\frac{m_e}{Gm} \right)^{3/2} = \frac{1}{m^2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} = \frac{m_P^3}{m^2} \approx 3.67 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 1.8 M_\odot \quad (9.9)$$

ist. Alle relativistischen Weißen Zwerge haben (ungefähr) die gleiche Masse, nämlich M_C ! Diese Größe ist die so genannte *Chandrasekhar-Grenzmasse* (kurz: Chandrasekhar-Masse). Sie wird alleine durch die Masse des Protons und die Konstanten c , G und \hbar festgelegt und ist in der relativistischen Astrophysik eine zentrale Größe, die – wie wir noch sehen werden – auch in anderen Zusammenhängen bedeutsam ist³³. Das bedeutet auch, dass die Massen Weißer Zwerge alle im relativ engen Bereich

$$M_\star \lesssim M \lesssim M_C, \quad (9.11)$$

also im Bereich zwischen (etwas mehr als die) Jupitermasse und (etwas mehr als die) Sonnenmasse³⁴ liegen. Als Konsequenz ergibt sich, dass der Radius eines relativistischen Weißen Zwergs (und damit seine Dichte, sofern sie im entsprechenden Bereich liegt) nicht festgelegt ist. Das ist aber lediglich eine Folge unseres nur näherungsweise geltenden Modells. Eine etwas genauere Rechnung zeigt, dass sich die Radien der relativistischen Weißen Zwerge stetig an jene der nichtrelativistischen Weißen Zwerge anschließen und alle von der gleichen Größenordnung sind. (Wir werden sie gleich angeben).

Damit können wir uns ein Bild machen, wie der Kollaps eines Sterns nach dem Ende der Kernfusion im betrachteten Dichtebereich verläuft: Ist die Masse der kollabierenden Zentralregion kleiner als M_C , und ist der durch die nachfallende Sternmaterie ausgeübte Druck nicht allzu groß (was für $M < 8M_\odot$ der Fall ist), so erreicht der (um seine abgestoßene Hülle erleichterte) Kern ein Gleichgewicht und wird damit zum Weißen Zwerg. Wie aus (9.1) mit $n = 2$ folgt, können seine Masse und sein Radius näherungsweise gemäß

$$M \approx M_C \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/2} \quad (9.12)$$

³³ Nach genaueren Berechnungen weist die Chandrasekhar-Masse eine geringe Abhängigkeit von der chemischen Zusammensetzung auf und ist durch

$$M_C = 1.457 \left(\frac{2}{\eta} \right)^2 M_\odot \quad (9.10)$$

gegeben, wobei η die Zahl der Nukleonen pro Elektron ist (siehe Fussnote 6 auf Seite 6). Für Weiße Zwerge, die hauptsächlich aus Helium, Kohlenstoff Sauerstoff oder Sauerstoff bestehen, ist $\eta = 2$ und $M_C = 1.457 M_\odot$. Für Weiße Zwerge, die aus Eisen bestehen, ist $\eta = 2.154$ und $M_C = 1.256 M_\odot$. Ein etwas genauerer mittlerer Wert als (9.9) ist $M_C \approx 1.4 M_\odot$. In der Literatur findet sich oft die Angabe $M_C \approx 1.44 M_\odot$. Subrahmanyan Chandrasekhar erhielt im Jahr 1983 den Nobelpreis "für seine theoretischen Studien der physikalischen Prozesse, die für die Struktur und Entwicklung der Sterne von Bedeutung sind".

³⁴ Sirius B ziemlich genau die gleiche Masse wie die Sonne und ist mit einem geschätzten Radius von 5640 km etwas kleiner als die Erde. Er hat eine effektive Temperatur von 25200 K.

und

$$R \approx \frac{\hbar^{3/2}}{m_e m \sqrt{Gc}} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-1/6} \approx 5000 \text{ km} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-1/6} \quad (9.13)$$

durch die Dichte ausgedrückt werden. Ein Weißer Zwerg ist also etwa so groß wie die Erde. Liegt die Masse eines kollabierenden Sterns nahe bei M_C , so erreicht er den relativistischen Bereich. Wie bereits erwähnt, liefert unsere Näherung keinen eindeutigen Radius für einen solchen Stern. Genauere Berechnungen zeigen, dass sich seine Größenordnung ergibt, wenn $\rho = \rho_0$ in (9.13) gesetzt wird. Sie beträgt

$$R_C \approx \frac{\hbar^{3/2}}{m_e m \sqrt{Gc}} \approx 5000 \text{ km} . \quad (9.14)$$

Sehr nahe bei M_C fallen die Radien dann ein bisschen ab. Der Beginn des relativistischen Bereichs läutet gleichzeitig sein Ende ein: Ab einer Dichte von etwa $10^{11} \text{ kg/m}^3 \approx 3\rho_0$ gilt (9.1) nicht mehr, da dann die Bildung von Neutronen beginnt. Die Dichten relativistischer Weißer Zwerge liegen also im engen Bereich zwischen ρ_0 und $3\rho_0$. Hingegen gibt es – wie unsere Theorie zeigt – für einen kollabierenden Stern mit einer Masse, die M_C überschreitet, kein Gleichgewicht. Er kollabiert weiter (und wir werden ihm im nächsten Kapitel, bei den Neutronensternen, wieder begegnen).

Die Abhängigkeit der Masse von der Dichte und des Radius von der Masse ist für alle drei Bereiche unseres Modells in Abbildung 1 skizziert. In der unteren Skizze (Radius gegen Masse) bilden die relativistischen Weißen Zwerge – in unserer Näherung – nur einen Punkt (was die Wirklichkeit aber nicht so schlecht trifft).

Zur Veranschaulichung der starken Gravitationskräfte, die an der Oberfläche eines Weißen Zwergs wirken, schätzen wir die Schwerebeschleunigung ab. Mit den typischen Werten $M = 0.5 M_\odot$ und $R = 8000 \text{ km}$ ergibt sich

$$g_{\text{Weißer Zwerg}} = \frac{GM}{R^2} \approx 10^6 \text{ m/s}^2 \approx 10^5 g_{\text{Erde}} . \quad (9.15)$$

Um aus der Ruhelage einen Meter frei zu durchfallen, benötigt ein Körper 1.4 Millisekunden und bewegt sich danach mit einer Geschwindigkeit von $1400 \text{ m/s} \approx 5000 \text{ km/h}$.

Die Größenordnung allgemein-relativistischer Effekte für Weiße Zwerge im oberen Dichtebereich können wir mit Hilfe von (4.9) und (9.1) größenordnungsmäßig zu

$$\frac{R_S}{R} \approx 2 \frac{m_e}{m} \approx 10^{-3} \quad (9.16)$$

abschätzen. Gravitationseffekte werden also einigermaßen genau durch die Newtonsche Theorie beschrieben.

Die Eigenschaften Weißer Zwerge, wie wir sie hier aus theoretischen Überlegungen abgeleitet haben, stimmen mit den astronomischen Beobachtungen gut überein. Insbesondere

ist die Abhängigkeit der Größe von der Masse ($R \sim M^{-1/3}$) gut überprüft. Identifiziert werden Weiße Zwerge durch ihren Ort im Hertzsprung-Russell-Diagramm: Sie sind in einem Bereich links unten (bei mittlerer bis hoher effektiver Temperatur und geringer Leuchtkraft) versammelt. Die meisten bisher beobachteten Weißen Zwerge liegen im schmalen Bereich zwischen 0.5 und 0.7 Sonnenmassen. Die Zahl der Weißen Zwerge in Erdnähe wird auf etwa 10^{-4} bis 10^{-3} pro Kubiklichtjahr geschätzt, was einem durchschnittlichen Abstand von 10 bis 20 Lichtjahren entspricht. Bis zu 10% aller Sterne könnten Weiße Zwerge sein. Weiße Zwerge bilden also einen wesentlichen Bestandteil unserer Galaxie.

Die Theorie der Weißen Zwerge ist ein eindrucksvolles Beispiel für das Erklärungs- und Vorhersagepotential der modernen Physik. Beachten Sie, dass wir die meisten der auftretenden Größen durch Naturkonstanten ausgedrückt haben (wobei exakte Berechnungen und Computersimulationen zu weit genaueren Vorhersagen kommen). In diesem Zusammenhang spielen dimensionslose Größen wie das Verhältnis m_e/m , die *Feinstrukturkonstante*

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 0.00729735 \approx \frac{1}{137.036} \quad (9.17)$$

und die *Feinstrukturkonstante der Gravitation*

$$\alpha_G = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} \approx 5.9 \cdot 10^{-39} \quad (9.18)$$

eine wichtige Rolle³⁵. Mit ihrer Hilfe kann beispielsweise die Chandrasekhar-Masse (9.9) in der Form

$$M_C \approx \alpha_G^{-3/2} m \quad (9.19)$$

geschrieben werden. Die Bedeutung der durch diese Beziehung ausgedrückte Größenordnung sollte man sich einmal vergegenwärtigen: Die Astrophysik sagt (auf der Basis der Naturgesetze, wie sie auch im Labor und im Teilchenbeschleuniger gelten) voraus, dass die obere Massengrenze für Weiße Zwerge das $2 \cdot 10^{57}$ -fache der Protonenmasse beträgt³⁶!

Eine reizvolle Möglichkeit für den Unterricht ergibt sich, wenn der Spieß umgedreht und (9.9) genutzt wird, um die Plancksche Konstante \hbar durch c , G , m und M_C auszudrücken:

$$\hbar \approx \frac{Gm^{4/3}M_C^{2/3}}{c} \quad (9.21)$$

³⁵ α und α_G drücken in dimensionsloser Form die Stärken der elektromagnetischen und der gravitativen Wechselwirkung zwischen zwei Protonen aus. Die Bedeutung von α_G für den Sternbau ist analog zu jener von α für den Atombau.

³⁶ Ein anderes Beispiel ist die Größenordnung

$$R_* \approx \frac{\lambda_e}{\sqrt{\alpha_G \alpha}} \quad (9.20)$$

des größten Radius, den ein kalter Körper annehmen kann (wobei im Vergleich zu (9.6) ein Faktor 2π weggelassen wurde).

Unter der Annahme, dass die Sonne ein typischer Stern ist, dessen Masse in der Größenordnung der Chandrasekhar-Masse liegt, kann ein ungefährender Wert von \hbar aus den Konstanten c und G , der Protonen- oder Neutronenmasse m und der Sonnenmasse M_\odot ermittelt werden:

$$\hbar \approx \frac{Gm^{4/3}M_\odot^{2/3}}{c} \approx 7 \cdot 10^{-35} \text{ kg m}^2/\text{s}, \quad (9.22)$$

was nicht einmal so weit entfernt vom wahren Wert $\hbar = 1.05457168 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$ liegt. So greifen die Physik des Kleinen und die Physik des Großen ineinander!

10 Neutronensterne

Für Dichten größer als $10^{11} \text{ kg/m}^3 \approx 3\rho_0$ findet – wie bereits erwähnt – die Bildung von Neutronen durch den inversen Betazerfall statt. Ab Dichten von etwa 10^{16} kg/m^3 liegt eine einheitliche Neutronenmaterie vor, in der der Begriff der chemischen Zusammensetzung seine Bedeutung verloren hat. Ein Stern, der in dieser Zustandform sein Gleichgewicht findet, heißt *Neutronenstern*. Mit (2.15), (2.16) und (4.9) nimmt die Gleichgewichtsbedingung für Neutronensterne die Form

$$\frac{GM}{c^2 R} \approx \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{n/3} \quad (10.1)$$

mit $n = \begin{cases} 2, & \text{wenn } 10^{16} \text{ kg/m}^3 \lesssim \rho \lesssim \rho_1 & \text{(nichtrelativistisch)} \\ 1, & \text{wenn } \rho \gtrsim \rho_1 & \text{(relativistisch)} \end{cases}$

an, wobei die Grenzdichte $\rho_1 \approx 10^{20} \text{ kg/m}^3$, ab der die Neutronen relativistisch werden, in (2.14) durch die Naturkonstanten c , \hbar und m ausgedrückt wurde. Die genauen Verhältnisse jenseits von ρ_1 sind wegen der zunehmenden Rolle der starken Wechselwirkung noch nicht gut bekannt.

Damit (und unter Zuhilfenahme der Beziehung $\rho = M/R^3$) schätzen wir zunächst die Masse und den Radius eines Neutronensterns im nichtrelativistischen Bereich ab. Eine kleine Rechnung (analog zu jener für die Weißen Zwerge) ergibt

$$M \approx \frac{1}{m^2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{1/2} \approx M_C \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{1/2} \quad (10.2)$$

und

$$R \approx \frac{\hbar^{3/2}}{m^2 \sqrt{Gc}} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{-1/6} \approx \text{einige km} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{-1/6}, \quad (10.3)$$

wobei wie bei den Weißen Zwergen der Radius mit steigender Masse gemäß $R \sim M^{-1/3}$ abnimmt. Für "einige km" ergibt sich hier numerisch mit 3 km ein etwas zu kleiner Wert – realistischer wäre 5 km (wobei auch die genaueren Berechnungen ein bisschen divergieren). Ein Vergleich mit den entsprechenden Größen für Weiße Zwerge zeigt: Ein Neutronenstern der Masse M ist größenordnungsmäßig um den Faktor m_e/m kleiner als ein Weißer Zwerg der gleichen Masse. In (10.2) tritt überraschenderweise die Chandrasekhar-Masse auf, die wir von den Weißen Zwergen kennen. Mehr noch: Im relativistischen Bereich ($n = 1$) reduziert sich (10.1) mit $\rho = M/R^3$ auf die Aussage

$$M \approx M_C. \quad (10.4)$$

Wie im relativistischen Bereich der Weißen Zwerge gibt es auch hier nur eine mögliche Masse, und diese ist *gleich* der Chandrasekhar-Masse, die wir bereits als die oberste Grenzmasse für Weiße Zwerge erkannt haben! Rechnen Sie es nach! Sie können dabei die Tatsache benutzen, dass das Verhältnis der Übergangsdichten der beiden Zustandsformen durch

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \left(\frac{m_e}{m}\right)^3 \approx 1.6 \cdot 10^{-10} \quad (10.5)$$

gegeben ist. Das typische Verhältnis der Radien von Neutronensternen zu jenen von Weißen Zwergen ist also etwa m_e/m , was wieder eine bemerkenswerte Verbindung von astrophysikalischen und teilchenphysikalischen Größenordnungen darstellt.

Mit diesen Ergebnissen können wir uns auch ein Gefühl für den Dichtebereich verschaffen, der zwischen den Weißen Zwergen und den Neutronensternen liegt: Aus (10.2) folgt, dass die Massenuntergrenze für Neutronensterne (für $\rho \approx 10^{16} \text{ kg/m}^3$) bei größenordnungsmäßig

$$M_{\min} \approx 3 \cdot 10^{28} \text{ kg} \approx 0.01 M_\odot. \quad (10.6)$$

liegt³⁷. Die Massenobergrenze für Weiße Zwerge liegt mit M_C aber wesentlich darüber. Daraus ergibt sich: Falls im Dichtebereich

$$10^{11} \text{ kg/m}^3 \lesssim \rho \lesssim 10^{16} \text{ kg/m}^3 \quad (10.7)$$

für einen Stern ein Gleichgewicht möglich ist, muss die Masse mit wachsender Dichte *abfallen*. Daraus folgt aber unmittelbar, dass ein solches Gleichgewicht nicht stabil sein kann: Selbst die kleinste Schwingung des Sterns zu größerer Dichte führt ihn in einen Zustand, in dem er nur bei einer kleineren Masse stabil wäre. Seine Masse ist zu groß für ein Gleichgewicht, und gemäß dem Kriterium (5.4) wird er weiter kollabieren³⁸. Das bedeutet, dass es im Dichtebereich (10.7) keine stabilen Sterne gibt. In Abbildung 2 sind die Verhältnisse unseres nun auf Neutronensterne erweiterten Modells schematisch

³⁷ Unsere groben Näherungsbetrachtungen liefern hier einen zu kleinen Wert. Genauere Rechnungen führen auf die realistischere Größenordnung $0.1 M_\odot$.

³⁸ Nimmt hingegen die Masse mit wachsender Dichte zu, so hätte dieser Stern nach einer Schwingung zu einer größeren Dichte eine für die Stabilität zu kleine Masse und würde gemäß (5.3) in seine Ausgangslage zurückkehren.

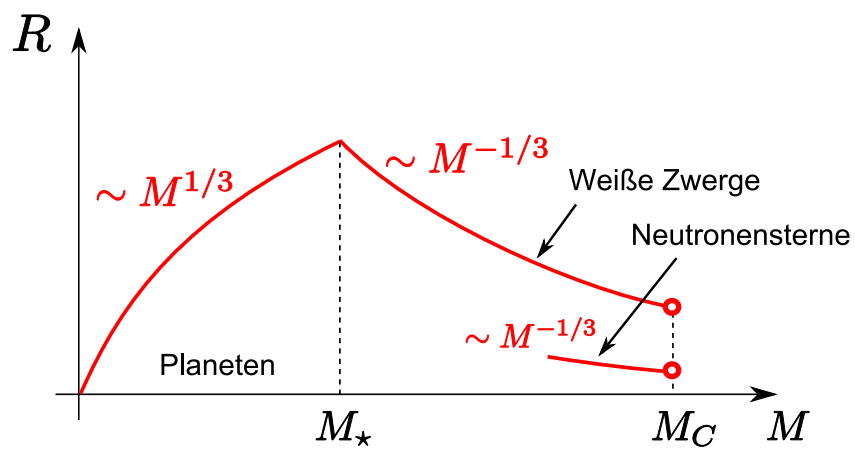
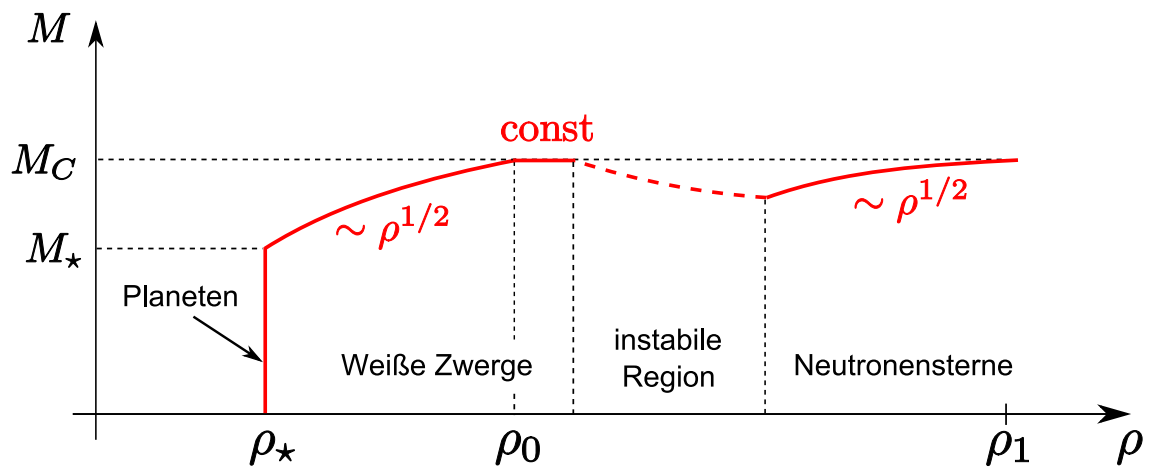


Abbildung 2: Schematische (nicht maßstabsgetreue) Skizze der Verhältnisse unseres nun auch auf Neutronensterne ausgedehnten Mosells. Die strichlichte Linie stellt den Dichtebe-
reich (10.7) dar, in dem es keine stabilen Sterne gibt.

dargestellt. Die strichlierte Linie kennzeichnet den Bereich (10.7), in dem es keine stabilen Sterne gibt.

Ein Neutronenstern kommt zustande, wenn die zentrale Region eines Sterns nach dem Ende der Kernfusion kollabiert und der durch die nachfallende Sternmaterie ausgeübte Druck den Entartungsdruck der Elektronen überwindet (was für $M > 8M_{\odot}$ der Fall ist). Der Kern erreicht Dichten im Bereich (10.7), in dem keine Stabilität möglich ist. Er kollabiert weiter, wodurch sich aufgrund des inversen Betazerfalls der Anteil an Neutronen immer mehr erhöht. Ist seine Masse kleiner als M_C , so tritt schließlich eine Stabilisierung durch den Entartungsdruck der Neutronen ein – ein Neutronenstern ist entstanden. Der Kollaps kommt fast schlagartig zum Stillstand, was eine nach außen laufende Druckwelle verursacht, die wiederum die Abstoßung der Hülle in einer Supernova vom Typ II einleitet. Woher die dabei freigesetzte Energie stammt, werden wir im nächsten Kapitel besprechen. Die Chandrasekhar-Masse ist also nicht nur die Obergrenze für Weiße Zwerge, sondern auch eine Größenordnung für die Maximalmasse von Neutronensternen³⁹. Ist die Masse des Kerns größer als M_C , so kann der Kollaps durch nichts mehr aufgehalten werden⁴⁰, und es bildet sich ein Schwarzes Loch. Wann die Masse des Kerns (zugegebenermaßen ein unscharfer Begriff) die Chandrasekhar-Grenze M_C überschreitet (d. h. wie der Prozess im Detail von der Masse, der chemischen Zusammensetzung und der Dynamik der Sternmaterie abhängt), ist noch nicht genau geklärt.

Die Schwerebeschleunigung auf der Oberfläche eines Neutronensterns ergibt sich mit den typischen Werten $M = 1.4 M_{\odot}$ und $R = 10$, km zu

$$g_{\text{Neutronenstern}} = \frac{GM}{R^2} \approx 2 \cdot 10^{12} \text{ m/s}^2 \approx 2 \cdot 10^{11} g_{\text{Erde}}. \quad (10.8)$$

Um aus der Ruhelage einen Meter frei zu durchfallen, benötigt ein Körper 10^{-6} Sekunden und bewegt sich danach mit einer Geschwindigkeit von $2 \cdot 10^6$ m/s. Die Fluchtgeschwindigkeit, die nötig ist, um dem Gravitationsfeld eines Neutronensterns zu entkommen, ist von der Größenordnung der halben Lichtgeschwindigkeit.

Die Größenordnung allgemein-relativistischer Effekte für Neutronensterne ergibt sich (im Bereich von ρ_1) mit (4.9) und (10.1) zu

$$\frac{R_S}{R} \approx 1 \quad (10.9)$$

³⁹ Die größtmögliche Masse für einen Neutronenstern heißt *Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Grenze*. Da die Zustandsgleichung für Neutronenmaterie nicht sehr genau bekannt ist, führen unterschiedliche Berechnungen auf Werte im Bereich von $1.5 M_{\odot}$ bis $3 M_{\odot}$. In unserer groben Betrachtungsweise können wir sie mit M_C identifizieren.

⁴⁰ Möglicherweise tritt für einen darüberliegenden Dichtebereich eine Stabilisierung durch den Entartungsdruck der Quarks auf. Ob es derartige *Quarksterne* geben kann, ist bei unserem gegenwärtigen – unvollkommenen – Verständnis der Quarkmaterie – die vor allem durch die starke Wechselwirkung geprägt ist – ungewiss. Gesichert beobachtet wurden bisher noch keine, aber es werden einige Kandidaten gehandelt.

ab. Neutronensterne werden durch die Newtonsche Gravitationstheorie nur unzureichend beschrieben.

Die Beobachtungen von Neutronensternen stimmen mit den von uns abgeschätzten Größenordnungen grob überein. Die meisten Massen liegen – sofern sie sich bestimmen lassen – typischerweise bei $1.4 M_{\odot}$, also knapp unterhalb von M_C . Die Dichten werden im Bereich zwischen 10^{17} und 10^{19} kg/m^3 angesiedelt (sind also kleiner als der von uns sehr ungenau abgeschätzte Wert von ρ_1), die Radien zwischen 10 und 20 km. Der uns am nächsten liegende (bekannte) Neutronenstern, RX J1856-3754, ist 450 Lichtjahre entfernt, hat eine Masse von etwa $1.4 M_{\odot}$ und rotiert in 7 Sekunden um seine Achse. Sein Radius ist nicht bekannt – er ist aber in jedem Fall größer als 11 km.

Da Sterne in der Regel sowohl Drehimpuls als auch ein Magnetfeld besitzen, trifft dies auch für ihre zentralen Regionen und ihre Endstadien zu. Neutronensterne, bei denen beides stark ausgeprägt ist⁴¹, heißen *Pulsare*. Liegt die Symmetrieachse des Magnetfelds nicht in der Rotationsachse, so kommt es (ähnlich wie bei einem Leuchtturm) zur Aussendung einer gerichteten Synchrotronstrahlung, deren Frequenz die Rotationsfrequenz des Sterns ist, und die – sofern die Erde von deren Öffnungskegel überstrichen wird – in Form gepulster Signale beobachtet werden kann. Die Rotationsdauer derartiger Objekte reicht von einigen Sekunden bis herunter bis zu etwas über einer Millisekunde⁴² (daher auch die Bezeichnung *Millisekundenpulsare*⁴³ – ansonsten sind für Neutronensterne einige Sekunden typisch). Eine grobe Abschätzung ergibt, dass eine derart schnelle Rotation aus dem Drehimpuls, den die kollabierende Zentralregion vom ursprünglichen Stern erbt, erklärt werden kann⁴⁴.

Seit ihrer Entdeckung durch Jocelyn Bell und Antony Hewish⁴⁵ im Jahr 1967 wurden knapp zweitausend Pulsare gefunden, alle in der Milchstraße.

Ein besonderer Glücksfall für die Physik ist der nach seinen Entdeckern (1974) benannte *Hulse-Taylor-Doppelpulsar* PSR 1913+16 (auch PSR B1913 + 16 oder PSR J1915+1606). Es handelt sich um ein – 21000 Lichtjahren entferntes – System von zwei

⁴¹ Ihre Magnetfelder sind etwa 10^{11} mal stärker als das Magnetfeld der Erde.

⁴² Der am schnellsten rotierende bekannte Pulsar (PSR J1748-2446ad) hat eine Rotationsdauer von 1.39595482 Millisekunden. Seine Rotationsgeschwindigkeit am Äquator ist etwa $0.24c$. Sein Radius liegt unterhalb von 16 km. Übertroffen wird seine Rotation nur noch von XTE J1739-285 mit 0.89 Millisekunden, wobei allerdings nicht klar ist, um welche Sorte Stern es sich bei ihm handelt.

⁴³ Millisekundenpulsare treten vor allem in Doppelsternsystemen auf, wo ihre Rotation durch überströmende Materie beschleunigt wird. Etwa 5% aller beobachteten Pulsare sind von diesem Typ.

⁴⁴ Machen Sie selbst eine überschlagsmäßige Rechnung dazu: Die Sonne rotiert in rund vier Wochen um ihre eigene Achse. Wie schnell wäre die Rotation, wenn die Sonne – bei gleicher Masse und erhaltenem Drehimpuls – auf eine Größe von 10 km schrumpfen würde?

⁴⁵ Antony Hewish bekam dafür im Jahr 1974 den Nobelpreis. Der erste entdeckte Pulsar, PSR B1919+21, ist etwa 2000 Lichtjahre entfernt. Er hat eine Rotationsdauer von 1.337301192269 s , die aufgrund der Strahlungsverluste pro Sekunde um $1.34809 \cdot 10^{-15} \text{ s}$ abnimmt. Die Dauer eines einzelnen Pulses beträgt 0.04 s. Derzeit strahlt er Radiowellen im Frequenzbereich von 85 MHz bis 2.7 GHz ab.

Neutronensternen, die beide eine Masse von etwa $1.4 M_{\odot}$ haben. Einer ist ein Pulsar mit einer Rotationsdauer von 59.03 Millisekunden, der andere ist für uns unsichtbar. Sie umlaufen ihren gemeinsamen Schwerpunkt in 7.75 Stunden. Die große Halbachse der Relativbewegung (sie folgt mit den angegebenen Daten aus dem dritten Keplerschen Gesetz) beträgt mit 2 Millionen Kilometer nur ein Dreißigstel der großen Halbachse der Merkurbahn! Die Geschwindigkeiten variieren zwischen 60 und 330 km/s. In derart engen Sternsystemen tritt nach einer Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie ein Effekt auf, für den es bis zur Entdeckung dieses System noch keine experimentelle Bestätigung gab: die Abstrahlung von *Gravitationswellen*. Sie führt zu einem Energieverlust des Systems und damit zu einer langsamen Annäherung der beiden Partner. Da aus den (mit Hilfe des Dopplereffekts beobachteten) periodischen Schwankungen der Pulsfrequenz des Pulsars die Bahndaten des System sehr präzise bestimmt werden können, ergab sich die Möglichkeit eines sehr genauen (erfolgreichen) Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie⁴⁶. Die über einige Jahre gemessene Abnahme der Umlaufzeit ($7 \cdot 10^{-8}$ s pro Umlauf bzw. $8 \cdot 10^{-5}$ s pro Jahr) stimmt mit der theoretischen Vorhersage bestens überein⁴⁷. Seither gilt die Allgemeine Relativitätstheorie als eine der am genauesten getesteten Theorien der Physik.

Ein weiteres System, in dem der Energieverlust durch die Abstrahlung von Gravitationswellen – sogar noch genauer – in jüngster Zeit (2008) bestätigt werden konnte, ist der 3.5 Milliarden entfernte Quasar OJ 287, in dem ein großes supermassives Schwarze Loch (ein so genannter Aktiver Galaktischer Kern, kurz AGN, mit $1.8 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ – sein Schwarzschildradius beträgt mit $5.3 \cdot 10^{13}$ m das 9-fache der Distanz von der Sonne zum Pluto) von einem “kleinen” supermassiven Schwarzen Loch (mit $10^8 M_{\odot}$) mit einer Umlaufzeit von etwa 12 Jahren umkreist wird⁴⁸. Die große Halbachse beträgt etwa $2 \cdot 10^{15}$ m \approx 0.22 Lichtjahre. Das kleinere Schwarze Loch (das sich im Durchschnitt mit über einem Zehntel der Lichtgeschwindigkeit bewegt) durchdringt während jedes Umlaufs zweimal die Akkretionsscheibe des größeren und ruft dadurch beobachtbare Gaseruptionen hervor. Es handelt sich um die stärkste derzeit bekannte Abstrahlung von Gravitationswellen. Der dadurch erlittene Energieverlust kommt an die Leuchtkraft im gesamten elektromagnetischen Spektrum heran.

Da Pulsare Energie verlieren, verlangsamt sich ihre Rotation im Laufe der Zeit. Nach etwa 100 Millionen Jahren sendet ein Pulsar keine messbare Strahlung mehr aus.

⁴⁶ Zudem dreht sich die Bahn pro Umlauf um 4.2° , was einen weiteren allgemein-relativistischen Effekt (analog zur früher erwähnten Perihelverschiebung) und daher einen weiteren Test der Allgemeinen Relativitätstheorie darstellt.

⁴⁷ Für diesen indirekten Nachweis von Gravitationswellen erhielten Hulse und Taylor im Jahr 1993 den Nobelpreis.

⁴⁸ Die Drehung der Bahnellipse beträgt hier sagenhafte 39° pro Umlauf.

11 Supernovae

Die letzte Phase des Sternkollapses, die zur Ausbildung eines Neutronensterns oder eines Schwarzen Lochs führt, ist begleitet von einer gewaltigen Explosion der Sternhülle (Supernova vom Typ II). Ein Weißer Zwerg, der Materie von einem Partner bezieht und die Chandrasekhar-Grenzmasse überschreitet, endet in einer noch energiereicheren Explosion (Supernova vom Typ I). Neuere Vermutungen ziehen die Möglichkeit in Betracht, dass eine Supernova (vom Typ I) auch durch die Verschmelzung zweier Weißer Zwerge, die ein Doppelsternsystem bilden, hervorgerufen werden kann.

Im Jahr 1054 beobachteten chinesische Astronomen den Helligkeitsausbruch eines Sterns, der sogar am Tag sichtbar war, und den wir heute als Supernova-Explosion (von Typ II) im – 6300 Lichtjahre entfernten – Krebsnebel identifizieren können. In dessen Zentrum befindet sich ein Pulsar (mit einem geschätzten Radius von 15 km und einer Rotationsdauer von 33 Millisekunden), dessen Entstehung die Supernova ausgelöst hat. Der Krebsnebel ist der dabei abgestoßene planetarische Nebel. Er dehnt sich mit einer Geschwindigkeit von etwa 1500 km/s aus. Das Leuchten des Nebels speist sich aus der Synchrotronstrahlung von Elektronen, die durch das starke Magnetfeld des Pulsars (10^8 Tesla) auf eine Kreisbahn gezwungen werden.

Die bekannteste Supernova der jüngeren Geschichte war SN 1987A (ebenfalls vom Typ II). Sie fand in der Großen Magellanschen Wolke (die trotz ihres Namens keine Wolke, sondern eine Zwerggalaxie in 154000 Lichtjahren Entfernung ist) statt, und es war die erste, deren Vorgängerstern (Sk -69 202) identifiziert werden konnte. Er besaß etwa 17 Sonnenmassen und war zum Zeitpunkt der Supernova erst 20 Millionen Jahr alt. Vor der Explosion war er ein so genannter *blauer Riese*. Der verbleibende Überrest ist vermutlich ein Neutronenstern. Der von der Theorie vorhergesagte Neutrinoschauer konnte nachgewiesen werden (und zwar – aufgeteilt auf verschiedene Detektoren – in Form von maximal 29 Neutrinos⁴⁹). In der Milchstraße findet etwa alle 40 Jahre eine Supernova statt.

Eine Supernova⁵⁰ leuchtet für einige Wochen bis Monate, manche so hell wie eine ganze Galaxie mit ihren 10^{11} Sternen. SN 1987A (Typ II) erreichte (etwa 80 Tage nach ihrem Beginn) eine maximale Strahlungsleistung von 10^{35} W, was 8 Größenordnungen über der Strahlungsleistung der Sonne (von $3.8 \cdot 10^{26}$ W) lag (wobei die Neutrinos, die den Großteil der frei werdenden Energie tragen, gar nicht eingerechnet sind)! Eine Supernova vom Typ I kann noch zusätzlich eine Größenordnung drauflegen. Eine der energiereichsten und längsten Supernovae, die bisher beobachtet wurden, SN 2006gy (Typ II), fand

⁴⁹ Für den Nachweis eines Teils dieser Neutrinos erhielten Masatoshi Koshiba und Raymond Davis Jr. im Jahr 2002 den Nobelpreis.

⁵⁰ Eine besonders leuchtstarke Supernova wird auch als *Hypernova* bezeichnet.

in der 238 Lichtjahre entfernten Galaxie NGC 1260 statt. Der Vorläuferstern dürfte erheblich schwerer als $20 M_{\odot}$ (nach manchen Vermutungen über $100 M_{\odot}$) gewesen sein. Eine Supernova im Umkreis von einigen Dutzend Lichtjahren hätte aufgrund der von ihr emittierten hochenergetischen Gammastrahlung (Gammablitz), die die Ozonschicht zerstören und die Erdoberfläche dem ungefilterten UV-Licht der Sonne aussetzen würde, katastrophale Auswirkungen auf das irdische Leben⁵¹. Woher kommt die Energie für einen derart gewaltigen Ausbruch?

Die Größenordnung der maximalen Energie, die ein Stern *grundsätzlich* aus Kernfusion beziehen kann, ist durch den Massendefekt (pro Nukleon) der Atomkerne begrenzt. Er ist, wie bereits erwähnt, für Nickel und Eisen mit 9 MeV am größten. Für ${}^4_2\text{He}$ beträgt er 7 MeV. Das Wasserstoffbrennen kann also nur wenig übertroffen werden. Zum Zeitpunkt des Kollapses, der zu einer Supernova führt, ist der größte Teil der aus Kernfusion zu beziehender Energie bereits verbraucht. Selbst wenn wir ganz tolerant sind und einem aus Helium bestehenden Kern erlauben, sich komplett in Nickel/Eisen umzuwandeln, kann damit nur etwas mehr als 1 MeV pro Nukleon gewonnen werden (bei der Umwandlung von Kohlenstoff oder Sauerstoff in Nickel/Eisen ist es ein bisschen weniger). Zu diesem späten Zeitpunkt ist der noch aus Kernfusion erzielbare Massendefekt also der prinzipiellen Schranke

$$\left. \frac{\Delta M}{M} \right|_{\text{Kernfusion}} \lesssim \frac{1 \text{ MeV}}{mc^2} \approx 10^{-3} \quad (11.1)$$

unterworfen (vgl. (2.3)). Immerhin würde dann in kurzer Zeit ein Promille der Masse in Energie umgewandelt. Das ist zwar eine große Energiemenge, reicht aber für eine Supernova nicht aus (vor allem, wenn man bedenkt, dass die Massen der Vorläufersterne aus der noch im Umkreis vorhandenen Materie abgeschätzt werden können und im “normalen” Bereich schwererer Sterne liegen). Aus der Kernfusion kann die Energie der Supernovae nicht stammen.

Woher also kommt sie? Die Antwort mag überraschen – die Energie stammt aus einer Quelle, der man das vielleicht gar nicht zugetraut hätte: Kontrahiert ein selbstgravitierender Körper, so wird Energie frei (die sich zunächst als vergrößerte kinetische Energie der kollabierenden Materie zeigt). Vielleicht können Sie sich den umgekehrten Vorgang leichter vorstellen: Um einen Körper gegen seine Schwerkraft “auseinanderzuziehen” (oder um einen Planeten auf eine Bahn mit größerem Radius zu heben) muss Energie aufgebracht werden. Die gravitative Bindungsenergie, die bei der Bildung eines Stern mit Masse M und Radius R frei wird, können wir durch folgende Überlegung abschätzen: Die potentielle Energie zweier (punkt- oder kugelförmiger) Körper der Massen m_1 und

⁵¹ Eine Supernova wird als mögliche Ursache für ein Artensterben auf der Erde am Übergang von Ordovizium zum Silur vor 443.7 Millionen Jahren gehandelt. So etwas kann natürlich wieder passieren: Der 150 Lichtjahre entfernte Stern HR 8210 ist der erdnächste Kandidat für eine baldige Supernova (von Typ I). Eine stärkere Supernova in einer Entfernung von nur wenigen Lichtjahren wäre so hell wie die Sonne.

m_1 im Abstand r beträgt

$$-\frac{Gm_1m_2}{r}. \quad (11.2)$$

Ein Näherungswert für die potentielle Energie einer kugelsymmetrischen Massenverteilung in ihrem *eigenen* Gravitationsfeld ergibt sich, indem wir $m_1 = m_2 = M$ und $r = R$ setzen⁵²:

$$U \approx -\frac{GM^2}{R}. \quad (11.5)$$

Kollabiert ein Stern von einem ursprünglichen Radius R_0 zu einem kleineren Radius R , so beträgt die Änderung der Bindungsenergie

$$\Delta U \approx GM^2 \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} \right). \quad (11.6)$$

Sie bewirkt einen Massendefekt von

$$\Delta M = -\frac{\Delta U}{c^2}, \quad (11.7)$$

was in dimensionsloser Form durch die (positive) Größe

$$\frac{\Delta M}{M} \approx -\frac{\Delta U}{Mc^2} \quad (11.8)$$

ausgedrückt werden kann. Wir berechnen sie für die verschiedenen Szenarien stellarer Kontraktionsprozesse (Sternentstehung aus einer Gaswolke, Kollaps zu einem Weißen Zwerg, Kollaps zu einem Neutronenstern) und legen dabei die Sonnenmasse zugrunde:

$$\left. \frac{\Delta M}{M} \right|_{\text{Kollaps auf Sonnenradius}} \approx 10^{-6} \quad (11.9)$$

$$\left. \frac{\Delta M}{M} \right|_{\text{Kollaps auf } R=10^4 \text{ km}} \approx 10^{-4} \quad (11.10)$$

$$\left. \frac{\Delta M}{M} \right|_{\text{Kollaps auf } R=10 \text{ km}} \approx 0.15. \quad (11.11)$$

⁵² Die exakte Rechnung ergibt $-\frac{3}{5}GM^2/R$. Sie ist gar nicht so schwierig: Wir setzen den (kugelförmigen) Körper mit konstanter Dichte ρ zusammen, indem wir dünne Schichten der Masse dm nacheinander hinzufügen. Ist bereits eine Masse m vorhanden, so ist der Radius $r = \left(\frac{m}{(4\pi/3)\rho} \right)^{1/3}$, und die potentielle Energie der nächsten Schicht ist

$$dU = -\frac{Gm dm}{r} = -\left(\frac{4\pi\rho}{3} \right)^{1/3} G m^{2/3} dm. \quad (11.3)$$

Die gesamte potentielle Energie, wenn der Körper die Masse M und den Radius R erreicht hat, ist daher (mit $4\pi\rho/3 = M/R^3$) gleich

$$U = -\left(\frac{4\pi\rho}{3} \right)^{1/3} G \int_0^M m^{2/3} dm = -\left(\frac{4\pi\rho}{3} \right)^{1/3} \frac{3GM^{5/3}}{5} = -\frac{3GM^2}{5R}. \quad (11.4)$$

Die ersten beiden Massendefekte sind klein – selbst der zweite ist kleiner als der durch Kernfusion erreichbare Massendefekt (11.1). Der dritte jedoch ist sehr groß: Bei einem Kollaps der Sonne (oder einer gleich schweren Zentralregion eines Sterns) auf einen Radius von 10 km wird ein Siebentel der Sonnenmasse in Energie umgewandelt, was $3 \cdot 10^{46}$ J entspricht – mehr Energie, als die Sonne bis dahin abgestrahlt hat! Damit haben wir die Energiequelle von Supernova-Explosionen gefunden.

12 Schwarze Löcher

- Gravitationskollaps

Kollaps der zentralen Region eines Sterns. Daher des Kollapses (freie Fallzeit): siehe (6.4)

$$t \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}}. \quad (12.1)$$

Interessant ist, dass sie nur von ρ abhängt, nicht vom Ausgangsradius! Für die Zentralregion eines Sterns mit $R \approx 30000$ km und, sagen wir, doppelter Sonnenmasse ist t im Bereich von einer Minute.

Kollaps im Bereich der Dichten von Neutronensternen erfordert allgemein-relativistische Behandlung. Einsteinsche Feldgleichungen. Resultat: *Wann genau* der Sternkollaps nicht mehr gebremst werden kann, ist noch nicht genau geklärt, aber es besteht Übereinstimmung, dass es beim Kollaps genügend großer Sterne der Fall ist. Die beobachteten Kandidaten für stellare Schwarze Löcher haben Massen zwischen $3 M_{\odot}$ und $20 M_{\odot}$. Supermassive Schwarze Löcher haben mehrere Millionen Sonnenmassen.

Dennoch kann eine klare Aussagen getroffen werden: Spätestens, wenn ein (kugelförmiger und nichtrotierender) kollabierender Stern seinen Schwarzschildradius (3.11) unterschritten hat, ist die Ausbildung eines Schwarzen Lochs *bereits passiert*. Dabei ist zu bedenken, dass in der Allgemeinen Relativitätstheorie die Raumzeit als gekrümmt betrachtet wird und daher die Koordinaten nicht mehr unbedingt gemessene Längen darstellen. Was in der obigen Aussage also "Radius" bedeuten soll, muss noch spezifiziert werden: Die Radialkoordinate (*Schwarzschild-Koordinate*) r wird *definiert* als

$$r = \frac{u}{2\pi} = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}, \quad (12.2)$$

wobei u = Umfang (eines Kreises), A = Fläche (einer Sphäre). r ist *nicht* der Radialabstand! Es tritt dann bei $r = R_s$ ein Phänomen auf, das die Newtonsche Physik nicht kennt: Nichts, das sich einmal im Bereich $r < R_s$ befindet, kann wieder in den Bereich $r > R_s$ gelangen⁵³! Nicht einmal das Licht – daher die

⁵³ Außer – quantenmechanisch – durch den Umweg über die Hawking-Strahlung. Davon später.

Bezeichnung "Schwarzes Loch". Ein Schwarzes Loch ist also gewissermaßen eine "Einweg-Membran". Das wollen wir uns in diesem Kapitel genauer ansehen.

- Newtonsches Argument: Fluchtgeschwindigkeit = c

$$v_{\text{Flucht}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (12.3)$$

Führt *zufällig* auf die "richtige" Formel für den Schwarzschildradius.

- Visualisierung der Raumzeit-Krümmung: verbogene Lichtkegel – verbogene Kausalstruktur
- Schwarzschildmetrik

Eine sphärisch symmetrische Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum außerhalb einer Massenverteilung ist statisch⁵⁴ und durch die Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (12.4)$$

gegeben (Birkhoff-Theorem). Der einzige frei wählbare Parameter ist die Masse M . Karl Schwarzschild hat sie gefunden auf der Suche nach der Raumzeit-Geometrie, die durch eine Punktmasse erzeugt wird. Erst später stellte sich heraus, dass der Begriff der Punktmasse in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht angebracht ist. Warum, werden wir noch sehen. Aus der Schwarzschildmetrik ergeben sich alle allgemein-relativistischen Effekte im Gravitationsfeld außerhalb nichtrotierender Planeten und Sterne. Wie ist sie "zu lesen"?

Zusammenhang Schwarzschild-Koordinate r und Radialabstand ℓ im Bereich $r > 2GM/c^2$:

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (12.5)$$

daher

$$\ell = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}}. \quad (12.6)$$

Analog: t ist *nicht* die (Eigen-)Zeit, die für einen bei fixen Werten von (r, θ, φ) ruhenden Beobachter vergeht! Zusammenhang zwischen t dieser Eigenzeit τ im Bereich $r > 2GM/c^2$:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2. \quad (12.7)$$

Beachten Sie: Was dt physikalisch bedeutet, hängt von r ab, also vom Ort! t heißt Schwarzschildzeit. Man kann sie "ablesen" durch die Beobachtung einer weit entfernten Uhr!

⁵⁴ Das gilt auch in der Newtonschen Theorie – siehe Fußnote 10 auf Seite 10.

Geometrie der Fläche $t = \text{const}$, $r = \text{const}$:

$$d\sigma^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (12.8)$$

wobei $d\sigma$ der physikalisch gemessene Abstand ist. Das ist die Geometrie auf der Sphäre mit Radius r ! Daher $u = 2\pi r$ und $A = 4\pi r^2$! Im Bereich $r > 2GM/c^2$ ergibt sich mit (12.5) für zwei konzentrische Kreise mit Umfängen u und $u + du$, dass

$$du = 2\pi dr = 2\pi d\ell \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} < 2\pi d\ell , \quad (12.9)$$

wobei $d\ell$ ihr Radialabstand ist. Er ist größer als (auf der Basis der euklidischen Geometrie) aus der Differenz du der Umfänge zu erwarten wäre \Rightarrow Krümmung des Raumes⁵⁵! Trichtermodell.

Frequenzverschiebung im Gravitationsfeld (im Bereich $r > 2GM/c^2$):
Lichtstrahl von r_1 zu r_2 .

$$d\tau^2|_{r_1} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) dt^2 \quad (12.10)$$

$$d\tau^2|_{r_2} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right) dt^2 \quad (12.11)$$

daher Frequenzänderung ($f \sim (d\tau)^{-1}$)

$$f_2 = f_1 \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}}} . \quad (12.12)$$

Das ist ein exaktes Resultat der Allgemeinen Relativitätstheorie! Für $r_1 = r \gg R_S$ ergibt sich in erster Ordnung der Entwicklung nach $\Delta r = r_2 - r_1$

$$\frac{\Delta f}{f} \approx - \frac{GM \Delta r}{c^2 r^2} \equiv - \frac{R_S}{2r} \frac{\Delta r}{r} . \quad (12.13)$$

Vergleiche mit (3.12)! Für ein festgehaltenes $r_2 > 2GM/c^2$ (Empfänger) sagt die exakte Formel (12.12) im Grenzübergang $r_1 \rightarrow 2GM/c^2$ das Verhalten $f_2 \rightarrow 0$ voraus (unendliche Rotverschiebung). Die Näherungsformel (12.13) kann das nicht reproduzieren.

Was geschieht bei $r = \frac{2GM}{c^2} \equiv R_S$? Was im Bereich $r < \frac{2GM}{c^2} \equiv R_S$? Was bei $r = 0$? Einschränkung auf $\theta = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ (d. h. auf einen radialen Strahl): Die Kausalstruktur (Lichtkegelstruktur) – unter Weglassung von θ und φ – ist gemäß zu $ds^2 = 0$ berechnen. (Ereignis-)Horizont. Singularität.

⁵⁵ Das gleiche kann mit den Flächen konzentrischer Sphären gemacht werden. Salopp ausgedrückt: In eine Kugel passt mehr hinein als aufgrund ihrer Oberfläche zu erwarten wäre.

- Penrose-Diagramm (konformes Diagramm) der flachen Raumzeit mit (t, x) und (t, r) . Mit

$$ct \pm r = \tan(\eta \pm \xi) \quad (12.14)$$

wird

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = (c dt + dr)(c dt - dr) = \frac{d\eta^2 - d\xi^2}{\cos^2(\eta + \xi) \cos^2(\eta - \xi)}. \quad (12.15)$$

Der Bereich $r \geq 0$ übersetzt sich in den neuen Koordinaten zur Bedingung $\tan(\eta + \xi) \geq \tan(\eta - \xi)$, d. h. in das durch $\xi \geq 0$ und $\xi - \pi/2 < \eta < \pi/2 - \xi$ festgelegte Dreieck. (Beachte: $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$). Weltlinien von Photonen sind dann einfach durch $\eta \pm r = \text{const}$ gegeben, sind also in einem (r, η) -Diagramm die 45° -Geraden.

- Penrose-Diagramm (konformes Diagramm) der Schwarzschildmetrik (genauer: der "maximalen analytischen Erweiterung" der Schwarzschildmetrik = Kruskal-Metrik)

Schwarzes Loch – Weißes Loch

Interpretation des Raumzeitbereichs innerhalb des Horizonts. Vertauschung der Rollen von Raum und Zeit! (r ist zeitartige, t ist raumartige Koordinate). Visualisierung der unendlichen Rotverschiebung (Astronaut sendet Hilferuf H-I-L-F-E). Daher auch die Bezeichnung "gefrorener Stern". Die Singularität ist raumartig, befindet sich also nicht "an einem bestimmten Ort". Für alle Beobachter im Raumzeitbereichs innerhalb des Horizonts befindet sie sich in der Zukunft! Das Schwarze Loch lässt nicht deshalb hineingefallene Körper nicht wieder heraus, weil die Kräfte dafür zu klein wären, sondern weil der Außenraum für diese nicht mehr zu ihrer Zukunft gehört. Das ist also eine Folge der *globalen Kausalstruktur* der Raumzeit).

- Penrose-Diagramm (konformes Diagramm) der Ausbildung eines Schwarzen Lochs
- Schwarze Löcher und Quantentheorie: Hawking-Strahlung
Stephen Hawking, 1974. Hawking-Temperatur:

$$T_{\text{Hawking}} = \frac{\hbar c^3}{8\pi k G M} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ K} \frac{M_\odot}{M}. \quad (12.16)$$

Strahlungsleistung $\approx 4\pi\sigma R_S^2 T_{\text{Hawking}}^4 \sim M^{-2}$. Lebensdauer:

$$\tau \approx 2 \cdot 10^{67} \text{ Jahre} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3. \quad (12.17)$$

- Penrose-Diagramm (konformes Diagramm) mit Hawking-Strahlung
- Supermassive Schwarze Löcher (SMBHs)
Sgr A* (Sagittarius A*) im Zentrum der Milchstraße. Etwa 4 Millionen Sonnenmassen, daher $R_S \approx 10^7$ km (das ist etwa ein Zwölftel des Erdbahnradius).

SMBHs gibt es in vielen, wenn nicht den meisten Galaxien. Rolle bei der Strukturbildung? SMBHs gab es schon sehr früh. Frühe SMBHs dürften – relativ zur umgebenden Galaxie – massereicher sein als späte, und sie sind wesentlich aktiver. Existierten SMBH bereits vor den Galaxien? Wechselspiel bei der Bildung von Galaxien? \Rightarrow eines der großen Rätseln der Astrophysik.

Jüngste Forschungen (2008) legen eine Obergrenze von an die $10^{10} M_{\odot}$ für “UMBHs” nahe.

- Primordiale Schwarze Löcher

Hypothetische Schwarze Löcher, die sich – nach manchen Vorstellungen – kurz nach dem Urknall aufgrund von Dichteschwankungen gebildet haben.

In den meisten Szenarien haben sie Massen⁵⁶ um $\approx 10^{12}$ kg (das entspricht der Masse eines Wasserwürfels von 1 km Kantenlänge oder eines irdischen Berges). Sie hätten $R_S \approx 10^{-15}$ m, $T_{\text{Hawking}} \approx 10^{11}$ K und $\tau \approx 10^{12}$ Jahre. Alter des Universums $\approx 1.37 \cdot 10^{10}$ Jahre. Es müsste also noch welche geben. Letzte Stadien = Gammablitz⁵⁷?

Andere Szenarien: $M \approx 10^3$ kg. Dann $T_{\text{Hawking}} \approx 10^{20}$ K und $\tau \approx 10^{-15}$ Jahre $\approx 10^{-9}$ s.

- Schwarze Löcher im LHC?

Mini-Black-Holes oder *Micro-Black-Holes*: Erzeugung von Schwarzen Löchern im Labor (Roger Penrose)? Üblicherweise wird die Planck-Masse als Untergrenze für den Schwarzschildradius eines Schwarzen Lochs, die Planck-Masse $m_P \approx 2 \cdot 10^{-8}$ kg daher als Massenuntergrenze angenommen. Damit scheinen Schwarze Löcher mit der Masse eines Elementarteilchens ausgeschlossen. In der *Stringtheorie* führt die Annahme von “Extra-Dimensionen” allerdings zu einer Verkleinerung der “effektiven Planck-Masse”. Mit $M \gtrsim 10^{-27}$ kg wäre $\tau \gtrsim 10^{-96}$ Jahre $\approx 10^{-88}$ s (sofern es eine Hawking-Strahlung gibt).

- Umlaufbahnen⁵⁸

⁵⁶ Nach Zel'dovich & Novikov (1967) hat ein Schwarzes Loch, das zur Zeit t nach dem Urknall entstanden ist, die Masse $M \approx 10^{35} \text{ kg} \frac{t}{1\text{s}}$. Nach dem Inflationsszenario (mehr davon in der Kosmologie) haben sie eine Chance, zu überleben, wenn sie kurz nach dem Ende der inflationären Phase des Universums zur Zeit $t \approx 5 \cdot 10^{-24}$ s entstehen. Das führt auf den oben angegebenen Wert von $\approx 10^{12}$ kg.

⁵⁷ Auch Gammastrahlenausbrüche oder *gamma ray bursts*. Der Ursprung dieser extrem energiereichen, wenige Sekunden bis Minuten dauernden Ereignisse ist noch nicht geklärt. Erklärungsansätze: Supernovae von extrem massereichen Sternen ($M > 20 M_{\odot}$, *Hypernovae*) mit ausgeprägter Richtungscharakteristik, Kollision zweier massereicher Neutronensterne oder Kollision eines Neutronensterns mit einem Schwarzen Loch (etwa in Doppelsternsystemen). Ein kurzes Nachglühen im optischen Bereich konnte beobachtet werden.

⁵⁸ Wen's genau interessiert: Teilchenbahnen in der Schwarzschildmetrik sind durch das *effektive Potential*

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMk}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2 r^3} \quad (12.18)$$

charakterisiert, wobei L der (erhaltene) Drehimpuls (dividiert durch die Masse des Teilchens) ist. Für Teilchen mit Masse $\neq 0$ ist $k = 1$, für Photonen ist $k = 0$ zu setzen. Der letzte Term ist die allgemein-

Ein kreisförmiger Orbit für Teilchen mit Masse $\neq 0$ ist nur für $r \geq \frac{3}{2}R_S$ möglich, ein stabiler kreisförmiger Orbit nur für $r > 3R_S$. Wird er unterschritten, so spiralt das Teilchen in das Schwarze Loch. Ist es elektrisch geladen, so wird dieser Effekt durch den Strahlungsverlust noch verstärkt. Für Photonen ist bei $r = \frac{3}{2}R_S$ ein instabiler Orbit möglich.

- Rotierende Schwarze Löcher
- Wurmlöcher

13 Kosmologie: Das Universum als Ganzes

Die wichtigsten Erkenntnisse der modernen Kosmologie, kurz zusammengefasst: Im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts wurde erkannt, dass manche der in Teleskopen (und wenige auch mit freiem Auge) erkennbaren "Nebel" in Wahrheit Ansammlungen von Milliarden Sternen sind, die außerhalb der Milchstraße liegen: die *Galaxien*. Ab 1929 wurde klar, dass alle (bis auf die allernächsten) Galaxien sich von der Milchstraße wegbewegen, und zwar umso schneller, je weiter sie weg sind: die *Galaxienflucht*. Das Universum ist nicht statisch, sondern es *expandiert*. Offenbar hatte es einen Anfang, den *Urknall*. Die Strahlung, die aufgrund jedes Urknall-Modells das Universum bis heute erfüllen sollte, wurde 1964 entdeckt (die *kosmische Hintergrundstrahlung*). Werden normale Materie und Strahlung als Bestandteile des Universums in die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie eingesetzt, so ergibt sich die Voraussage einer *gebremsten* Expansion – im Einklang mit der anziehenden Natur der Gravitation, so wie wir sie kennen. Offene Fragen waren unter anderem, ob das Universum immer expandieren (oder schließlich in einen kontrahierenden Zustand übergehen und in einem *big crunch* enden) wird und welche räumliche Krümmung es besitzt. Gegen Ende des 20. Jahrhunderts ergaben Beobachtungen aber erste Hinweise darauf, dass es *beschleunigt* expandiert. Als (theoretisch einfachste) Ursache dafür wird die Existenz einer nichtverschwindenden Energiedichte des Vakuums (*dunkle Energie* oder kosmologische Konstante) angenommen, die zusätzlich zur Materie in die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie eingesetzt werden muss und eine abstoßende Wirkung ("Antigravitation") beschreibt.

Bereits in den 1930-er Jahren gab es die ersten – zunächst nicht sonderlich beachteten – Hinweise darauf, dass die sichtbare (leuchtende) Materie nur einen kleinen Teil der im Universum vorhandenen Gesamtmasse ausmacht. Die fortschreitende Entwicklung der Teilchen- und Kernphysik machte es im letzten Drittel des 20. Jahrhunderts möglich, das Verhalten der Materie bis hinunter zu Bedingungen zu verstehen, die wenige Sekunden nach dem Urknall geherrscht haben müssen. Daraus ergab sich einerseits eine Erklärung der Häufigkeit der Elemente im Universum. Andererseits wurde klar, dass ein Großteil der

relativistische Korrektur. Lässt man ihn weg und setzt $k = 1$, so ergibt sich das effektive Potential für die Keplerbewegung. Die Ermittlung der Bahnen funktioniert genauso wie in der Newtonschen Physik, mit dem Unterschied, dass an die Stelle der Zeit die Eigenzeit tritt.

vorhandenen Materie nicht aus den bekannten Teilchen (aus so genannter baryonischer Materie) bestehen kann – wir nennen ihn heute die *dunkle Materie*.

Zahlreiche Beobachtungen, die durch die schnell fortschreitende Beobachtungstechnologie (wie satellitenbasierte Teleskope) möglich wurden, erhärteten während der letzten 10 Jahre diese Befunde in spektakulärer Weise und mit ungeahnter Genauigkeit und Vernetzung. Aus heutiger Sicht ist das Universum räumlich flach und expandiert beschleunigt. Etwa ein Viertel seines Energieinhalts besteht aus Materie (davon ein Fünftel aus normaler baryonischer Materie und vier Fünftel aus dunkler Materie) und drei Viertel aus dunkler Energie. Der Anteil an Strahlung ist vernachlässigbar klein, war aber in der Frühzeit des Universums dominant.

Die Struktur der (Anfang der 1990-er Jahre entdeckten) *Anisotropie* der kosmischen Hintergrundstrahlung wurde mittlerweile zur reichhaltigsten Quelle kosmologisch relevanter Beobachtungen. Sie erlaubt sogar einen Blick auf die Ära vor der Entstehung der Materie und favorisiert gegenwärtig die Theorie des *inflationären Universums*, einer rasanten (exponentiellen), nur 10^{-35} bis 10^{-30} Sekunden lang andauernden Aufblähung um 30 bis 50 Größenordnungen. Da bis heute noch keine Theorie der Quantengravitation gefunden werden konnte, ist das Problem, wie es überhaupt zur Entstehung des Universums (“aus dem Nichts”?) gekommen ist, bislang ungelöst.

14 Geometrische Eigenschaften von Weltmodellen

- **Die der Kosmologie zugrunde liegende Physik**

Allgemeine Relativitätstheorie (wobei viele Aussagen und mathematische Beziehungen auch mit Newtonschen Argumenten erzielt werden können), Zustandsgleichungen der Materie, der Strahlung und der sonstige Komponenten des Universums, Kern- und Teilchenphysik, Physik der Strahlung.

- **Das kosmologische Prinzip**

Das so genannte *kosmologische Prinzip* besagt, dass das Universum im Großen, d. h. auf großen Längenskalen betrachtet, *homogen* und *isotrop* ist.

- **Homogen** bedeutet: Alle Orte im Universum sind gleichberechtigt. Das Universum sieht, von einem Ort betrachtet, im Großen genauso aus wie von einem anderen Ort betrachtet.
- **Isotrop** bedeutet: Alle Richtungen im Universum sind gleichberechtigt. Das Universum sieht, von einem Ort betrachtet, in allen Richtungen gleich aus.
- Ein mathematischer Satz besagt: Ein Raum, der in jedem seiner Punkte isotrop ist, ist automatisch homogen⁵⁹.

⁵⁹ Beispiele zu diesen Begriffen: Eine Zylinderoberfläche ist homogen, aber nicht isotrop. Die durch $z = x^2 + y^2$ definierte Paraboloidfläche ist nicht homogen, aber im Ursprung isotrop. Eine Kugel ist homogen und in jedem ihrer Punkte isotrop.

Das kosmologische Prinzip ist ein methodisches Postulat, d. h. ein Ausgangspunkt für das weitere Vorgehen und kein Dogma:

- Für die Welt im Kleinen macht es keine Aussage – diese ist gemäß unserer Beobachtungen durch die Konzentration von Materie in Form von Galaxien und Sternen sowie von deren lokalen Eigenbewegungen geprägt und daher weder homogen und isotrop.
- Ab Skalen von etwa⁶⁰ 100 Mpc ist es nach der gängigen Auffassung näherungsweise erfüllt – wesentlich größere Strukturen wurden noch nicht beobachtet. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Interpretation von Beobachtungsdaten in der Kosmologie stark *theoriegeladen* ist und daher falsch sein kann⁶¹. Insbesondere die Homogenität des Universums kann nicht direkt verifiziert werden, da wir uns eben nur an einem Ort befinden. Das kosmologische Prinzip ist daher eine *Arbeitshypothese*, die im Prinzip durch zukünftige Beobachtungen und durch Weiterentwicklungen der Theorie modifiziert werden kann.
- Wie wir noch sehen werden, können wir (zu jeden gegebenen Zeitpunkt) nur einen bestimmten Ausschnitt des Universums sehen. Wie groß das Universum *insgesamt* ist, wissen wir nicht. Daher *könnte* es sein, dass das kosmologische Prinzip auf Längenskalen, die größer als der sichtbare Bereich sind, nicht erfüllt ist.

• Der Skalenfaktor und die Hubble-Expansion

Gehen wir also davon aus, dass das Universum, wenn es zu einem gegebenen Zeitpunkt beobachtet wird, von jedem Ort und in jede Richtung gleich aussieht. Wenn wir es auf den größten uns zugänglichen Längenskalen beobachten, sehen wir vor allem *Galaxien*. So wie der Sand am Strand aus einzelnen Sandkörnern besteht, aber dennoch auf Längenskalen ab ein paar Zentimetern als Kontinuum betrachtet werden kann, betrachten wir das Universum im Großen als *Kontinuum* oder *Substrat*, als dessen “Sandkörner” wir zunächst die Galaxien (oder gravitativ gebundene Gruppierungen von Galaxien, die *Galaxienhaufen*) auffassen⁶². Neben den Galaxien (und ganz allgemein Materie, die aus Atomen aufgebaut ist, auch baryonische Materie⁶³ genannt, weil ihre Masse hauptsächlich von Baryonen herrührt) ist

⁶⁰ Die in der Kosmologie übliche Längeneinheit ist das Megaparsek: $1 \text{ Mpc} \approx 3.26156 \cdot 10^6 \text{ Lichtjahre} \approx 3.08568 \cdot 10^{22} \text{ m}$.

⁶¹ Insbesondere beruhen die Abschätzungen von kosmologisch relevanten Entfernungen und Zeitintervallen auf *Annahmen* wie eben dem kosmologischen Prinzip. Falls die Erde *keinen* typischen Ort im Universum einnimmt, könnte die beobachtete Isotropie nur für *unseren Ort* gelten, nicht aber für alle Orte.

⁶² Eine typische Galaxie ist etwa 0.1 Mpc groß. Der typische Abstand zweier Galaxien beträgt ungefähr 1 Mpc.

⁶³ Baryonen sind stark wechselwirkende Fermionen, also vor allem Protonen und Neutronen (und ihre Antiteilchen, die in unserem Universum aber sehr selten sind). Baryonen bestehen aus drei Quarks. Der

das Universum darüber hinaus von elektromagnetischer Strahlung und Neutrinos erfüllt, und es werden noch weitere Anteile dieses Substrats (die dunkle Materie und die dunkle Energie) hinzukommen. Ähnlich wie es vielleicht an manchem Sandstrand sein mag, gibt es Regionen hoher Galaxienkonzentration und dazwischen große Hohlräume, aber auf sehr großen Skalen betrachten wir das Universum – gemäß den kosmologischen Prinzip – als homogen und isotrop. Abgesehen von lokalen Eigenbewegungen unter dem Einfluss ihrer gravitativen Wechselwirkung “markieren” die Galaxien dieses Substrat, d. h. im Großen betrachtet ruhen sie relativ zu ihm.

Demnach werden die großskaligen Eigenschaften des Universums zu einer gegebenen Zeit in jedem seiner Punkte nur durch wenige physikalische Größen beschrieben. So wird etwa die Zahl der Galaxien in einem gegebenen (genügend großen Volumen) als überall gleich groß angenommen. Die einzige Freiheit, die Eigenschaften und Dynamik des Universums in Übereinstimmung mit dem kosmologischen Prinzip zu modellieren, besteht darin, dass diese wenigen Größen von der Zeit t abhängen, während sie räumlich konstant sind. Insbesondere unterscheidet sich das *räumliche Verteilungsmuster* konkreter ausgewählter (genügend weit entfernter) Galaxien zu verschiedenen Zeiten nur durch seine absolute Größe. Alle Entfernungsverhältnisse bleiben konstant. Sind also die Galaxien A und B zu einem gegebenen Zeitpunkt doppelt so weit voneinander entfernt wie die Galaxien X und Y , so gilt das auch für alle anderen Zeitpunkte. Wählen wir nun in Gedanken zwei Galaxien aus. Zu jeder gegebenen Zeit t haben sie eine Entfernung $D(t)$. Zum heutigen Zeitpunkt – der in der Kosmologie allgemein mit dem Symbol t_0 bezeichnet wird – haben sie eine Entfernung $D(t_0)$. Wir definieren den *Skalenfaktor* des Universums zur Zeit t als den Quotienten

$$a(t) = \frac{D(t)}{D(t_0)} = \frac{\text{Entfernung zur Zeit } t}{\text{Entfernung heute}}. \quad (14.1)$$

Diese Größe ist unabhängig von den beiden Galaxien, die wir für ihre Definition ausgewählt haben! $a(t)$ ist jener Faktor, um den sich das räumliche Verteilungsmuster von Galaxien zur Zeit t vom heutigen unterscheidet, und klarerweise gilt $a(t_0) = 1$.

Vielleicht haben Sie jetzt den Einwand, dass die Galaxien in der Frühzeit des Universums entstanden sind und es für noch frühere Zeiten keinen Sinn macht, von ihren Entfernungen zu sprechen. Das stimmt natürlich, und wir behelfen uns damit, für diese frühen Zeiten mit $D(t)$ die Entfernung von (Massen-)Elementen des Substrats zu bezeichnen, die relativ zu diesem in Ruhe sind. Damit kann die

Name “baryonische Materie” ist insofern ein bisschen missverständlich gewählt, als in der Kosmologie auch die Elektronen, die keine Baryonen sind, dazugezählt werden.

Definition des Skalenfaktors so weit in die Vergangenheit ausgedehnt werden, wie das kosmologische Prinzip und die Idee des Substrats Sinn machen.

Was die Kosmologie *vor allem* über die Entwicklung des Universums herausfinden möchte, ist der zeitliche Verlauf $a \equiv a(t)$ des Skalenfaktors. Nach dem heutigen Wissensstand wächst er mit der Zeit an – das Universum *expandiert*. In den meisten Weltmodellen war er irgendwann einmal 0 (oder zumindest – im Vergleich zu heute – sehr klein) – wir sprechen dann vom *Urknall* und verbinden diesen mit der *Entstehung des Universums*⁶⁴. Wir ordnen ihm den Zeitpunkt 0 zu. Die heutige Zeit t_0 bezeichnet daher das *Alter des Universums*. Das so genannte *kosmologische Standardmodell*, das wir im Folgenden beschreiben, weist dem Universum ein Alter von

$$t_0 \approx 13.7 \text{ Milliarden Jahre} \quad (14.2)$$

zu.

Bevor wir ein dynamisches Modell des Universums aufstellen, das den zeitlichen Verlauf des Skalenfaktors beschreibt, wollen wir uns zunächst darüber orientieren, welche Art von Physik sich hier auf tut. Wir stellen uns vor, die Funktion $a \equiv a(t)$ sei bekannt und monoton wachsend. Ihre Details spielen bei den grundsätzlichen Überlegungen, die wir nun anstellen wollen, zunächst keine Rolle. Mit D bezeichnen wir die Entfernungen, die Galaxien von unserem Beobachtungsstandort, der Milchstraße, haben bzw. hatten (oder haben werden). Mit (14.1) gibt die Beziehung

$$D(t) = a(t)D(t_0) \quad (14.3)$$

an, wie weit eine Galaxie, die heute von uns die Entfernung $D(t_0)$ besitzt, zur Zeit t von uns entfernt war. Differenzieren nach t ergibt

$$\dot{D}(t) = \dot{a}(t)D(t_0) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} D(t) \equiv H(t)D(t), \quad (14.4)$$

wobei die Abkürzung

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (14.5)$$

verwendet wurde. Diese Beziehung gilt für *jede* Zeit t . Zur heutigen Zeit nimmt sie mit der Abkürzung

$$H_0 = H(t_0) \quad (14.6)$$

die Form

$$\dot{D}(t_0) = H_0 D(t_0) \quad (14.7)$$

⁶⁴ Die theoretische Möglichkeit, das der Skalenfaktor nur sehr klein war und es das Universum schon vorher gegeben hat, etwa in einer Abfolge von Expansion und Kontraktion, relativiert zwar den Begriff "Urknall", macht aber für den Moment keinen großen Unterschied.

an und heißt *Hubble-Gesetz*. Es besagt: Die heutige zeitliche Änderungsrate der Entfernung einer Galaxie ist proportional zu ihrer heutigen Entfernung. Der Proportionalitätsfaktor H_0 heißt *Hubble-Konstante*. Die Größe \dot{D} wird auch als *Fluchtgeschwindigkeit* bezeichnet, und das Bild, das sich aus (14.7) ergibt, ist das eines von uns “wegströmenden” Universums, dem *Hubble-Fluss*. Jede Galaxie bewegt sich von uns weg, und zwar umso schneller, je weiter sie bereits von uns entfernt ist – ein Phänomen, das auch als *Galaxienflucht* bezeichnet wird. Es ist eine unmittelbare Folge der Tatsache, dass das räumliche Verteilungsmuster im Laufe der Zeit lediglich “aufgeblasen” wird, Entfernungsverhältnisse aber gleich bleiben. Die Hubble-Konstante H_0 und die entsprechende Größe $H(t)$ für beliebige Zeiten haben die Dimension Zeit^{-1} . In der Kosmologie ist es üblich, für sie die Einheit $\frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$ zu verwenden. Numerisch dürfte der Wert der Hubble-Konstante etwa

$$H_0 \approx 71 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \approx 2.3 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} \approx (1.38 \cdot 10^{10} \text{ Jahre})^{-1} \quad (14.8)$$

betragen. Das bedeutet: Eine Galaxie in einer (heutigen) Entfernung von 100 Mpc bewegt sich (heute) mit einer Fluchtgeschwindigkeit von 7100 km/s von uns weg, eine Galaxie in 1000 Mpc Entfernung mit 71000 km/s, usw.⁶⁵. Rein rechnerisch könnte man $D(t_0)$ so groß wählen, dass $\dot{D}(t_0)$ die Lichtgeschwindigkeit übersteigt. Das ist ab einer Entfernung von etwa $4.2 \cdot 10^3 \text{ Mpc} \approx 1.3 \cdot 10^{26} \text{ m}$ der Fall. Wie ist das möglich?

Die Größe \dot{D} bezeichnet die zeitliche Änderungsrate der Entfernung zweier Galaxien. Daher hat sie die Dimension einer Geschwindigkeit. Aber in welchem Sinn ist sie eine Geschwindigkeit? An dieser Stelle müssen wir bedenken, dass die Kosmologie auf dem Raumzeit-Konzept der Allgemeinen Relativitätstheorie beruht. Daher kann zunächst der *Raum* (also die Menge aller zu einer gegebenen Zeit stattfindenden Ereignisse) eine gekrümmte Geometrie aufweisen. Da aber aus den kosmologischen Beobachtungsdaten hervorzugehen scheint, dass die Raumkrümmung auf großen Skalen verschwindet (oder zumindest sehr klein ist), werden wir uns hier auf Modelle beschränken, für die der Raum nicht gekrümmt (also *flach*) ist⁶⁶. Die *Raumzeit* aber ist in jedem Fall gekrümmt, und diese Krümmung kommt dadurch zum Ausdruck, dass sich “der Raum ausdehnt”. In gewissem Sinn kann man sich

⁶⁵ Die Hubble-Konstante gibt die *Expansionsrate* des Universums an. Für den Wert (14.8) von H_0 kann das auch so ausgedrückt werden: In jeder Sekunde werden die großräumigen Entfernungen im Universum um den Faktor $2.3 \cdot 10^{-18}$, also um $2.3 \cdot 10^{-16}$ Prozent größer. Das sind $7.2 \cdot 10^{-9}$ Prozent pro Jahr oder 0.0072 Prozent pro Jahrmillion. (Für noch größere Zeiträume werden derartige Aussagen ungenau, da H_0 den *heutigen* Wert von $H(t)$ angibt. Da aber $H(t)$ – der so genannte *Hubble-Parameter* – seit dem frühen Universum nach dem heutigen Stand des Wissens zumindest nicht stark variierte, ist $1/H_0$ ein ungefähres Maß für das Alter des Universums). Der Begriff der “Expansionsgeschwindigkeit” macht hingegen keinen Sinn, da die Fluchtgeschwindigkeit einer Galaxie von deren Entfernung abhängt.

⁶⁶ Das bedeutet, dass die Menge aller Ereignisse, für die t einen gegebenen Wert annimmt – ein so genannter *Raumschnitt* –, flach ist.

vorstellen, dass “zwischen den Galaxien neuer Raum hinzukommt”. Beobachter auf unterschiedlichen Galaxien können mit dem gleichen Recht behaupten, ihre Galaxie “ruhe”, und dennoch ändert sich der Abstand der Galaxien.

Kleine Zwischenbemerkung: In der Physik vor der Allgemeinen Relativitätstheorie galt als sicher, dass von zwei Beobachtern, deren Entfernung sich in nichtlinearer Weise ändert (so dass also die zeitliche Änderungsrate der Entfernung nicht konstant ist), zumindest einer beschleunigt ist, also eine Kraft spürt. In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist das nicht notwendigerweise der Fall: Wenn etwa zwischen zwei Beobachtern eine Gravitationswelle hindurchgeht, können sie danach eine andere Entfernung haben, ohne dass sie etwas Besonderes gespürt hätten. Es hat sich dann einfach die Geometrie des Raumes zwischen ihnen geändert. Den Galaxien in einem expandierenden Universum geschieht etwas ähnliches: Der Raum zwischen ihnen wird “aufgeblasen”.

Wichtig ist, dass die Änderungsrate der Entfernung zweier Galaxien *nicht* als Geschwindigkeit irgend eines Körpers oder Signals relativ zu einem Labor⁶⁷, in dem sie mit der guten alten Stoppuhr-Methode gemessen werden könnte, auftritt. So gesehen hat sie zwar die Dimension einer Geschwindigkeit, ist aber keine! Daher wird keine bekannte Gesetzmäßigkeit verletzt, wenn sie größer als c ist.

Für die, die es genau wissen wollen: Das Modell des Universums, wie wir es bisher beschrieben haben, wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch die Metrik

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 d\sigma^2 \quad (14.9)$$

beschrieben, wobei $d\sigma^2$ die flache räumliche Metrik des heutigen Universums ist und in der Form

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (14.10)$$

geschrieben werden kann. Jede Galaxie ist durch fixe Werte der Koordinaten x , y und z charakterisiert. (So gesehen ruhen die Galaxien im verwendeten Koordinatensystem). Die Milchstraße sitzt im Ursprung ($x = y = z = 0$), und eine Galaxie mit Koordinaten (x, y, z) hat von uns heute (d. h. zur Zeit t_0) die Entfernung $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Zur einer früheren Zeit t hatte sie von uns die Entfernung $a(t)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ganz in Übereinstimmung mit (14.3). Die Zeitkoordinate t , die in (14.9) verwendet wird, heißt *kosmologische Zeit*. Sie wird von Uhren angezeigt,

⁶⁷ Hinter diesem Argument steckt die Art und Weise, wie die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie in einer gekrümmten Raumzeit zum Ausdruck kommen. Sie gelten in *lokalen Inertialsystemen*, also – salopp gesprochen – in hinreichend kleinen, frei bewegten Labors.

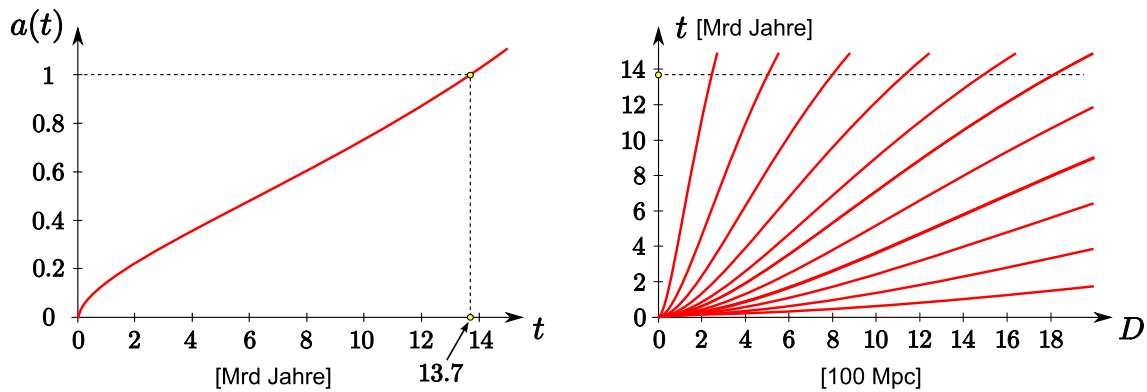


Abbildung 3: Links: Skalenfaktor des Universums nach dem kosmologischen Standardmodell. Rechts: Weltlinien von Galaxien.

die relativ zum Substrat (also zu den Galaxien) in Ruhe sind (von lokalen Gravitationseinflüssen abgesehen).

Interessanterweise führen Netwonsche Argumente (sofern das nicht-newtonsche Konzept der Expansion des Raumes dazugenommen wird) auf dieselben mathematischen Gesetzmäßigkeiten wie die Allgemeine Relativitätstheorie. Wir werden daher ohne (14.9) auskommen.

Um die Raumzeit eines expandierenden Universums mathematisch darzustellen, ist es bequem, in eine Richtung in den Weltraum zu blicken und alle anderen Richtungen zu ignorieren, aber auch alle Ereignisse, die früher in dieser Richtung stattgefunden haben (oder später in dieser Richtung stattfinden werden) zu berücksichtigen. Um ein derartiges Ereignis zu beschreiben, geben wir die Zeit t , zu der es sich ereignet, und die Entfernung D , die es zu diesem Zeitpunkt von der Milchstraße hat, an. Damit kann der Teil der Raumzeit, der in einer fixierten Richtung liegt, in einem (D, t) -Diagramm grafisch dargestellt werden. Abbildung 3 zeigt die Entwicklung des Skalenfaktors gemäß dem kosmologischen Standardmodell (links) und die Weltlinien einer Reihe von Galaxien in einem (D, t) -Diagramm (rechts).

- **Licht im expandierenden Universum**

Eine der für die Kosmologie wichtigsten Tatsachen besteht schlicht und einfach darin, dass das Licht, das uns heute (also zur Zeit t_0) von anderen Galaxien erreicht, *früher* ausgesandt wurde. Welchen Teil des Universums können wir überhaupt "sehen"? Dazu müssen wir wissen, wie sich Lichtsignale (Photonen) in einem expandierenden Universum bewegen. Wir besprechen eine grafische und erwähnen eine rechnerische Methode: Angenommen, zur Zeit t wird ein Lichtsignal in einer Galaxie, die zu dieser Zeit die Entfernung $D_{\text{Gal}}(t)$ von uns hat, in Richtung der Milchstraße (oder von der Milchstraße weg) ausgesandt. Mit D wollen wir die Entfernung des Photons bezeichnen. Zur Zeit t gilt also $D(t) = D_{\text{Gal}}(t)$. Eine

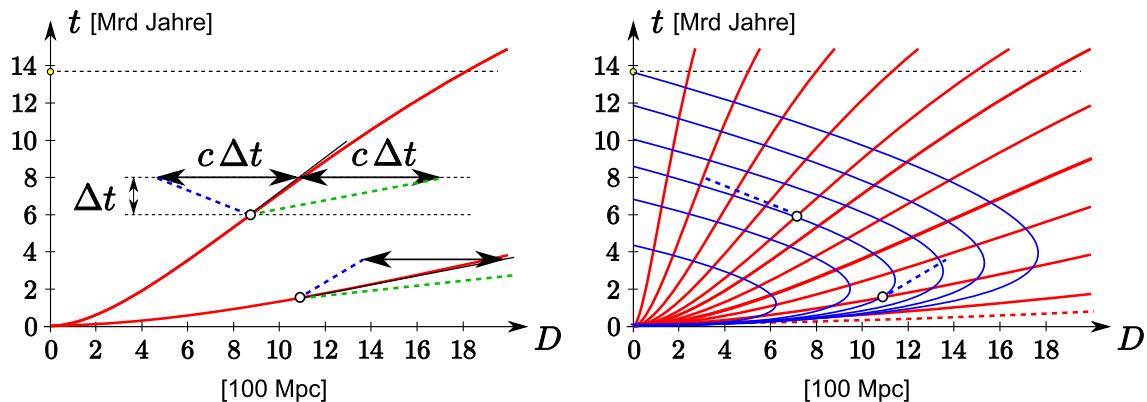


Abbildung 4: Links: Grafische Methode zur Ermittlung der Richtung von Photon-Weltlinien in einem (D, t) -Diagramm. Rechts: Weltlinien von Photonen (blau). Von allen Galaxien, deren Weltlinien unterhalb der strichlierten (roten) Weltlinie liegen, haben wir noch keinerlei Informationen erhalten.

kurze (infinitesimale) Zeit dt später befindet sich die Galaxie in der Entfernung

$$D_{\text{Gal}}(t + dt) \approx D_{\text{Gal}}(t) + \dot{D}_{\text{Gal}}(t) dt = D(t) + \dot{D}_{\text{Gal}}(t) dt. \quad (14.11)$$

Das Photon hat sich in dieser Zeit relativ zur Galaxie um die Strecke $c dt$ auf die Milchstraße zu oder von ihr weg bewegt, wobei wir annehmen können, dass der zwischen ihm und der Galaxie liegende Raum in dieser kurzen Zeit die Expansion des Universums praktisch nicht gespürt hat. Die Entfernung des Photons zur Zeit $t + dt$ ist daher durch

$$D(t + dt) \approx D(t) + \dot{D}_{\text{Gal}}(t) dt \pm c dt \quad (14.12)$$

gegeben, wobei das obere Vorzeichen für ein von der Milchstraße weg, das untere für ein zur Milchstraße hin ausgesandtes Photon steht. Das führt unmittelbar auf eine grafische Methode, um aus der Weltlinie einer Galaxie ein Stück der Weltlinie eines Photons zu konstruieren (Abbildung 4, linke Grafik).

Die rechnerische Methode besteht darin, in (14.12) den Term $D(t)$ zu subtrahieren und durch dt zu dividieren. Mit $dt \rightarrow 0$ wird die linke Seite dann zur zeitlichen Ableitung $\dot{D}(t)$. Mit (14.4), angewandt auf die Entfernung D_{Gal} der Galaxie ergibt sich die Differentialgleichung

$$\dot{D}(t) = H(t)D(t) \pm c \quad (14.13)$$

für die Bewegung $D \equiv D(t)$ des Photons. Sie kann, sofern die Funktion $a \equiv a(t)$ bekannt ist, mit einer Zusatzbedingung, die festlegt, wann und wo das Photon ausgesandt oder empfangen wurde, gelöst werden⁶⁸.

⁶⁸ Die Lösung von (14.13) kann in der Form

$$D(t) = \frac{a(t)}{a(t_1)} D_1 \pm c a(t) \int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (14.14)$$

Beide Methoden zeigen, dass sich ein in Richtung der Milchstraße ausgesandtes Photon durchaus von uns wegbewegen kann! (Bildlich gesprochen ist das dann der Fall, wenn sich die Taschenlampe, die es aussendet, mit Überlichtgeschwindigkeit von uns wegbewegt). Für den Skalenfaktor des kosmologischen Standardmodells (Abbildung 3) ergeben sich daraus Weltlinien, wie sie in der rechten Grafik von Abbildung 4 dargestellt sind: Werden sie maximal in die Vergangenheit fortgesetzt, so kommen sie alle vom Punkt $D = t = 0$. Sie wurden in unmittelbarer Nähe von “uns” ausgesandt (nur gab die Milchstraße damals noch nicht, und die Vorläuferpunkte aller Galaxien, die so ein Photon seither passiert hat, lagen dicht beieinander). Die auf die Milchstraße zu bewegten Photonen entfernen sich zunächst, aber schließlich gewinnt ihre Bewegung gegen die Expansion die Überhand, und irgendwann kommen sie bei uns an. Licht, das *heute* (zur Zeit t_0) bei uns ankommt, ist in diesem Diagramm durch eine einzige Weltlinie charakterisiert. Sie umschließt jenen Teil der Raumzeit (in die betrachtete Richtung), von dem wir grundsätzlich durch Beobachtungen Kenntnis haben können – das für uns *sichtbare Universum*⁶⁹ – und heißt *kosmologischer Teilchenhorizont*. Was außerhalb des sichtbaren Bereichs der Raumzeit liegt, ist *heute* grundsätzlich unbeobachtbar, aber mit fortschreitender Zeit sehen wir immer größere Teile der Raumzeit, d. h. das sichtbare Universum wird mit der Zeit größer. Die Paare von Photon-Weltlinien, die durch jeden Punkt des Diagramms verlaufen (die blaue und die grüne strichlierte Linie in der linken Skizze von Abbildung 4), definieren als Lichtkegel die Kausalstruktur der Raumzeit eines expandierenden Universums. Von allen Galaxien, deren Weltlinien unterhalb der strichlierten Weltlinie der rechten Grafik in Abbildung 4 liegen, haben wir noch keinerlei Informationen erhalten⁷⁰.

Je älter eine Galaxie ist, die wir sehen, umso weiter ist sie *heute* von uns entfernt. Das trifft aber nicht notwendigerweise für die Entfernung zu, die sie zum

durch eine Integration gewonnen werden. Sie beschreibt ein Photon, das sich zur Zeit t_1 in der Entfernung D_1 befindet (bzw. befand oder befinden wird). Mit $t_1 = t_0$, $D_1 = 0$ und dem unteren Vorzeichen ergibt sich die Bewegung des Photons, das heute (zur Zeit t_0) bei uns eintrifft.

⁶⁹ Begriffe wie das sichtbare (oder beobachtbare) Universum werden manchmal auch in anderen Bedeutungen verwendet.

⁷⁰ Die Entfernung D_{grenz} , in der sich die Galaxie, die zu dieser strichlierten Weltlinie gehört, heute befindet (also die heutige Entfernung jener Galaxien, die wir heute – allerdings in einem sehr frühen Stadium – zum ersten Mal sehen), ist übrigens gleich der Entfernung, in der sich ein Photon, das unmittelbar nach dem Urknall von unserem Ort im Universum ausgesandt wurde, heute befindet. Sie ist “die Strecke, die das Licht seit dem Urknall zurückgelegt hat” und kann mit der Formel

$$D_{\text{grenz}} = c \int_0^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \quad (14.15)$$

berechnet werden. Ihr Wert ist $D_{\text{grenz}} \approx 14600 \text{ Mpc} \approx 47.5$ Milliarden Lichtjahre und nicht, wie fälschlicherweise vermutet werden könnte, 13.7 Milliarden Lichtjahre. Eine andere interessante Größe ist der Hubble-Radius $D_{\text{Hubble}} = c/H_0 \approx 4200 \text{ Mpc} \approx 13.8$ Milliarden Lichtjahre. Er gibt an, in welcher (heutigen) Entfernung die Fluchtgeschwindigkeit der Galaxien gleich c ist.

Zeitpunkt der Aussendung des Lichts hatte, denn früher war das Universum als Ganzes "kleiner". Irgendwo dazwischen gibt es eine *größte Entfernung*, aus der wir jemals Signale erhalten haben. Sie beträgt knapp 1800 Mpc.

Ein gedankliches Bild, um sich diese – vielleicht gewöhnungsbedürftigen – Eigenschaften eines expandierenden Universums vorzustellen, ist ein Luftballon, der aufgeblasen wird. Er ist zwar gekrümmt, aber wenn wir nur einen kleinen Bereich auf seiner Oberfläche betrachten, funktioniert die Analogie ganz gut: Galaxien sind als Punkte aufgemalt und entfernen sich voneinander gemäß dem Hubble-Gesetz. Weiters krabbeln Ameisen kreuz und quer auf ihm herum, und zwar jede geradeaus und alle mit der gleichen Geschwindigkeit c – die Photonen.

- **Konforme Diagramme kosmologischer Weltmodelle**

stellen die Kausalstruktur übersichtlicher dar⁷¹.

- **Rotverschiebung**

Wie lange ein von uns heute empfangenes Lichtsignal seit seiner Aussendung gereist ist, können wir bestimmen, wenn wir die Wellenlänge (Farbe), die es bei seiner Aussendung hatte, kennen: Die Wellenlänge von Licht dehnt sich – nach dem selben Gesetz wie die Entfernungen zwischen Galaxien – aus. Sie folgt gewissermaßen der Expansion. Ist $\lambda(t)$ die Wellenlänge eines Photons zur Zeit t , und wurde es zur Zeit t_{em} emittiert, so ist seine Wellenlänge heute

$$\lambda(t_0) = \frac{\lambda(t_{\text{em}})}{a(t_{\text{em}})}. \quad (14.16)$$

(Erinnern wir uns, dass $a(t_0) = 1$ ist). Der Quotient

$$z = \frac{\lambda(t_0) - \lambda(t_{\text{em}})}{\lambda(t_{\text{em}})} \quad (14.17)$$

heißt *kosmologische Rotverschiebung*. Mit (14.16) erhalten wir

$$1 + z = \frac{1}{a(t_{\text{em}})} \quad \text{oder} \quad a(t_{\text{em}}) = \frac{1}{1 + z}. \quad (14.18)$$

Ist die Rotverschiebung z , die ein Photon erfahren hat, bekannt, so ergibt sich daraus unmittelbar der Wert des Skalenfaktors zum Zeitpunkt seiner Emission! Entfernungen im Universum waren damals um den Faktor $(1 + z)^{-1}$ kleiner als heute. Damit diese Methode funktioniert, müssen $\lambda(t_0)$ und $\lambda(t_{\text{em}})$ bekannt sein.

⁷¹Mathematischer Hintergrund: Wird mittels $c dt/a(t) = d\eta$ eine neue Zeitkoordinate η – die so genannte *isotrope Zeit* – definiert, so nimmt die auf eine Richtung eingeschränkte Metrik (14.9) mit $d\sigma^2 = dr^2$ die Form $ds^2 = a(t(\eta))(d\eta^2 - dr^2)$ an. Weltlinien von Photonen sind dann einfach durch $\eta \pm r = \text{const}$ gegeben, sind also in einem (r, η) -Diagramm die 45°-Geraden.

Ersteres ist leicht – wir messen die Wellenlänge (genauer: das Spektrum, d. h. die Wellenlängenverteilung) des empfangenen Lichts. Die ursprüngliche Wellenlänge $\lambda(t_{\text{em}})$ (bzw. das ursprüngliche Spektrum) muss aus den physikalischen Gesetzen, die zur Aussendung des Lichts geführt haben, erschlossen werden (beispielsweise, indem das Muster der im Spektrum enthaltenen Emissions- oder Absorptionslinien⁷² bestimmten Elementen zugeordnet werden können).

Mit (14.18) kann die Rotverschiebung anstelle des Skalenfaktors und (sofern dessen zeitliche Entwicklung bekannt ist) anstelle der Zeit t angegeben werden, um frühe und entfernte Ereignisse zu bezeichnen. Die größten (mit den heute zur Verfügung stehenden Technologien) beobachteten Rotverschiebungen von Galaxien sind in der Größenordnung $z \approx 10$. Das ist beachtlich: Als Licht, das heute eine Rotverschiebung von $z = 10$ aufweist, ausgesandt wurde, hatten die Entfernungen im Universum ein Elftel ihres heutigen Wertes!

Bei *kleinen* Rotverschiebungen tritt noch ein anderer Faktor hinzu, der die Sache ein bisschen stört: Rotverschiebungen (oder Blauverschiebungen) können auch infolge der lokalen Eigenbewegung von Quelle und Empfänger auftreten (Dopplereffekt). Beispielsweise ist das Licht, das wir von der nahe gelegenen Andromeda-Galaxie M31 empfangen, blauverschoben. In der Astronomie wird das als “negative Rotverschiebung” ausgedrückt – sie beträgt in diesem Fall etwa $z \approx -5 \cdot 10^{-4}$. Das deutet darauf hin, dass sich die Andromeda-Galaxie auf uns zubewegt⁷³. Je größer die Entfernung der Objekte ist, die wir beobachten, umso weniger fallen diese lokalen Phänomene ins Gewicht, und umso klarer widerspiegelt die Rotverschiebung des von ihnen ausgesandten Lichts die Expansion des Universums.

Die Methode der Rotverschiebung wurde von Edwin Hubble im Jahr 1929 genutzt, um das nach ihm benannte (allerdings auf den Kieler Astronomen Carl Wirtz zurückgehende) Gesetz, das wir in der Form (14.7) aufgeschrieben haben, experimentell zu überprüfen. Dazu musste er die Entfernungen anderer Galaxien kennen⁷⁴, wofür er die seit 1908 bekannte Beziehung zwischen der Leuchtkraft und der Periodendauer bestimmter Typen veränderlicher Sterne (Cepheiden) verwendete. Aber Achtung: In (14.7) geht die *heutige* Entfernung der anderen Galaxie

⁷² Besonders wichtig sind Linien im Spektrum, die von der Absorption charakteristischer Wellenlängen in Sternatmosphären herrühren.

⁷³ Sie befindet sich in etwa 2.2 Millionen Lichtjahren ≈ 0.67 Mpc Entfernung und bewegt sich mit etwa 150 km/s auf die Milchstraße zu. Sie wird in einigen Milliarden Jahren mit ihr kollidieren und voraussichtlich verschmelzen. Die Geschwindigkeit naher und langsamer Objekte kann aus der Rotverschiebung über die Beziehung $v = cz$ bestimmt werden.

⁷⁴ Da er sie um einen Faktor 7 unterschätzte, war der von ihm bestimmte Wert der Hubble-Konstante zu groß. Er erreichte mit seinen Beobachtungen Rotverschiebungen bis $z \approx 0.004$, was Entfernungen von bis zu 15 Mpc entspricht. Bereits 1931 publizierte er stark verbesserte Daten, die Galaxien bis $z \approx 0.07$ enthielten, was Entfernungen bis knapp 300 Mpc entspricht.

ein, die genau genommen nicht gemessen werden kann (da wir ja immer nur Vergangenes sehen). Das Hubble-Gesetz in der Form (14.7) kann nur dann durch Beobachtungen verifiziert werden, wenn die relative Änderung der Größenordnungen im Universum während der Zeit, die das Licht bis zu uns braucht, klein ist. Es wird dann in der Form

$$D \approx \frac{c}{H_0} z \quad (14.19)$$

angeschrieben (*lokales Hubble-Gesetz*), wobei D die mit den in der Astronomie üblichen Methoden *gemessene* Entfernung bezeichnet und z die Rotverschiebung des empfangenen Lichts⁷⁵.

15 Dynamik des Universums – die Grundgleichungen

Wie kommt nun die Funktion $a \equiv a(t)$ aufgrund physikalischer Gesetzmäßigkeiten zustande?

- **Grundgleichungen der Kosmologie**

Bisher haben wir nur geometrische (auf der zeitlichen Entwicklung des Skalenfaktors beruhende) Variable betrachtet. Ein dynamisches Modell des Universums benötigt noch zwei weitere Größen, die die Reaktion seines Inhalts auf die Expansion charakterisieren: seine Dichte ρ und seinen Druck p . Aufgrund des kosmologischen Prinzips sind beide räumlich konstant, hängen also nur von der Zeit ab. Mit ihrer Hilfe können wir die Grundgleichungen für homogene, isotrope und räumlich flache Weltmodelle anschreiben. Sie lauten:

⁷⁵ Die Form (14.19) kann so begründet werden: Während ein Wellenzug ausgesandt wird, vergeht eine gewisse Zeitspanne Δt . Ist v die Fluchtgeschwindigkeit der Galaxie, aus der er stammt, so ist die Entfernung zur Milchstraße in dieser Zeit um den Betrag $v \Delta$ angewachsen. Das hintere Ende des Wellenzugs muss daher eine um diesen Betrag längere Strecke zurücklegen als das vordere. Das Empfangen des Wellenzugs in der Milchstraße nimmt die Zeitspanne $\Delta t + (v/c)\Delta t$ in Anspruch. Das entspricht einer Verminderung der Frequenz um den Faktor $(1 + v/c)^{-1}$ bzw. einer Vergrößerung der Wellenlänge um den Faktor $1 + v/c$ und daher, mit (14.17), der Rotverschiebung $z = v/c$. Wird in (14.7) $\dot{D}(t_0)$ durch $v = cz$ und $D(t_0)$ durch D ersetzt, so ergibt sich genau (14.19). Zur Herleitung kann auch die Formel für den relativistischen Dopplereffekt verwendet werden. Wie auch immer man es anstellt, (14.19) gilt nur näherungsweise, weil die Entfernung zur anderen Galaxie zum Zeitpunkt der Beobachtung nicht mehr D ist. Falls sie sich – aufgrund eines noch unbekanntes Effekts, aber im Einklang mit (14.7) – abrupt geändert hat, als das Licht schon beinahe bei uns war, so würden wir das nicht bemerken. (14.19) gilt daher nur für eher kleine Entfernungen und Rotverschiebungen. Konkret muss für seine Anwendbarkeit $v \ll c$ oder, was damit gleichbedeutend ist, $D \ll c/H_0 \equiv D_{\text{Hubble}} \approx 4200 \text{ Mpc} \approx 13.8$ Milliarden Jahre gelten. Bereits bei $z = 0.01$, was einer Entfernung von 42 Mpc entspricht, liegt der im Vergleich zu einer genaueren Methode gemachte Fehler im Prozentbereich. Jenseits von $z \approx 0.5$ ist (14.19) nicht einmal näherungsweise anwendbar. Aber immerhin dient das Gesetz in dieser Form dazu, mit der Hubble-Konstante H_0 die *heutige* Expansionsrate des Universums zu messen. Zur Erforschung der länger zurückliegenden Expansionsgeschichte muss man zu *wirklich* großen Rotverschiebungen vorstoßen – davon später.

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3} a^2 \rho = 0 \quad (15.1)$$

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (15.2)$$

(15.1) heißt *erste Friedmanngleichung*. Sie verbindet die Expansionsrate die Universums mit seiner gesamten Energiedichte. Die Größe ρ muss daher *alle* Energieformen umfassen, die es im Universum gibt. Sie ist von der Dimension her eine Massendichte, sollte aber besser als *Energiedichte* (dividiert durch c^2) interpretiert werden. (15.2) heißt *zweite Friedmanngleichung* oder *Fluidgleichung*. Sie muss nicht nur für die Gesamtheit aller Energieformen (Komponenten), sondern auch für jede einzelne gelten. Eine wichtige Konsequenz dieser beiden Gleichungen ist die so genannte *Beschleunigungsgleichung*:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3 \frac{p}{c^2} \right) \quad (15.3)$$

Gemeinsam mit den Zustandsgleichungen der Komponenten des Inhalts des Universums (mehr dazu ein bisschen später) bestimmen diese Beziehungen dessen Dynamik. Sie sind eine Folge der Einsteinschen Feldgleichungen, können aber (bis auf ein Detail) auch mit Newtonschen Argumenten hergeleitet werden:

- Begründung der ersten Friedmanngleichung mit Newtonschen Argumenten: Wir wählen irgendeine Galaxie A – zum Beispiel die Milchstraße – als (rein rechnerisches) Zentrum aus und betrachten eine andere Galaxie B , die sich zu einer bestimmten Zeit im Abstand r von A befindet. Die gesamte im Universum vorhandene Masse wird nun gedanklich in “Zwiebelschalen” mit A als Mittelpunkt aufgeteilt. Die Zwiebelschalen, die von A weiter als r entfernt sind, haben keine gravitative Wirkung auf B (da sich die von ihnen auf B ausgeübten Teilkräfte genau aufheben). Die Zwiebelschalen, die näher als r liegen, wirken so auf B , also wäre ihre Masse $M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$ in A konzentriert. Hat die Galaxie B die Masse m , so ist ihre (zeitlich erhaltene) Gesamtenergie durch

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 - \frac{8\pi G}{3} r^2 \rho \right) \quad (15.4)$$

gegeben. Hat B heute (d. h. zur Zeit t_0) von A den Abstand $r(t_0)$, so gilt $r(t) = a(t)r(t_0)$, in Übereinstimmung mit (14.3). Damit können wir auch

einen Faktor $r(t_0)^2$ aus der Klammer in (15.4) herausziehen und erhalten als Bedingung der Energieerhaltung

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3} a^2 \rho = \text{const.} \quad (15.5)$$

Die hier auftretende Konstante charakterisiert das Weltmodell. Im Rahmen unserer Newtonschen Argumentation kann sie nicht interpretiert werden. In der Allgemeinen Relativitätstheorie ergibt sich, dass sie (genauer: die zu ihr negative Zahl) die Krümmung des Raumes angibt, in unserem räumlich flachen Modell also gleich 0 ist. Damit folgt (15.1).

- Begründung der zweiten Friedmanngleichung mit Newtonschen Argumenten und ein bisschen Spezieller Relativitätstheorie: Wir können den Druck eines Systems (oder einer Komponente des Universums) durch

$$p = - \frac{dE}{dV} \quad (15.6)$$

definieren (also als Änderungsrate der Energie, wenn das Volumen variiert wird), wobei die Zustandsänderung als adiabatisch (d. h. ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung) angesehen wird. (Diese Aussage ist gleichbedeutend mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik $dE + p dV = T dS$ mit $dS = 0$). Daher gilt $\dot{E} + p\dot{V} = 0$. Die in $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ enthaltene Masse ist durch $V\rho$, die Gesamtenergie durch $E = V\rho c^2$ gegeben. Damit reduziert sich die Aussage $\dot{E} + p\dot{V} = 0$ auf

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{r}}{r} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0, \quad (15.7)$$

was mit $r(t) = a(t)r(t_0)$ genau (15.2) ergibt.

Die wichtigsten Komponenten, aus denen das Universum besteht, und die die Dynamik des Skalenfaktors beeinflussen, sind:

- **Materie**

Unter diesem Begriff werden alle Komponenten zusammengefasst, die aus langsam bewegten Teilchen bestehen (baryonische Materie, aus der Sterne, Planeten, interstellares und intergalaktisches Gas und wir selbst bestehen, aber auch die dunkle Materie, von der später die Rede sein wird). Es sind dies alle Komponenten, die unter der Wirkung der Schwerkraft zur Zusammenklumpung fähig sind. Wir bezeichnen ihre Dichte mit ρ_{matter} . Ihr Druck kann auf großen Skalen vernachlässigt werden: Materie wird als "Staub" modelliert. Ihre Zustandsgleichung lautet daher

$$p_{\text{matter}} = 0. \quad (15.8)$$

Mit ihrer Hilfe ist die zweite Friedmangleichung (15.2) für die Materiekomponente äquivalent zu

$$a^3 \rho_{\text{matter}} = \text{const.} \quad (15.9)$$

– Strahlung

(elektromagnetische Strahlung, d. h. Photonen, und die so genannten Hintergrundneutrinos, die zwar eine nichtverschwindende Masse besitzen, sich aber aufgrund ihrer relativistischen Geschwindigkeit wie Strahlung verhalten). Wir bezeichnen ihre Dichte mit ρ_{rad} . Ihre Zustandsgleichung lautet

$$p_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \rho_{\text{rad}} c^2 \quad (15.10)$$

(Strahlungsdruck). Mit ihrer Hilfe ist die zweite Friedmangleichung (15.2) für die Strahlungskomponente äquivalent zu

$$a^4 \rho_{\text{rad}} = \text{const.} \quad (15.11)$$

– Vakuum

Eine nichtverschwindende *Energiedichte des Vakuums* wurde seit langem als *theoretisch möglich*, aber äußerst unwahrscheinlich gehandelt. Erst vor etwas mehr als 10 Jahren gab es die ersten Hinweise darauf, dass sie $\neq 0$ (und zwar > 0) ist. Wir bezeichnen sie⁷⁶ mit ρ_{Λ} . Sie wird üblicherweise in der Form

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (15.12)$$

angeschrieben, wobei Λ *kosmologische Konstante* heißt. Sie ist nicht nur räumlich, sondern auch zeitlich konstant. (Ein “Kubikmeter Vakuum” hat *immer* und *überall* die gleiche Energie). Der zugehörige Druck ist durch

$$p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda} c^2 \quad (15.13)$$

gegeben. Diese (vielleicht seltsam anmutende) Zustandsgleichung folgt mit der zweiten Friedmangleichung (15.2) aus der zeitlichen Konstanz von ρ_{Λ} und kann – davon unabhängig – aus der relativistischen Forderung, dass das Vakuum keinem “Bewegungszustand” entspricht, begründet werden.

Wir wollen im Folgenden die Dynamik des Universums unter der Annahme modellieren, dass Materie, Strahlung und Vakuum die Hauptbestandteile sind, die zu seiner Energiedichte beitragen. Der Energieanteil der Neutrinos ist nicht genau bekannt, da er von deren Massen abhängt, und es ist auch nicht ganz klar, ob und in welchen Sinn Neutrinos zur (dunklen) Materie gezählt werden können. Da ihr

⁷⁶ Wie die anderen Dichten ρ_{matter} und ρ_{rad} geben wir sie als Massendichte an. Die Energiedichte ist $\rho_{\Lambda} c^2$.

Anteil aber in jedem Fall nicht sehr hoch sein dürfte, und um die Dinge nicht zu verkomplizieren, lassen wir sie zunächst beiseite. Im heutigen Universum ist auch der Anteil der elektromagnetischen Strahlung (die wir – neben dem von Sternen ausgesandten Licht – in Form der kosmischen Hintergrundstrahlung beobachten) klein. Der Grund dafür, dass er im Laufe der Expansion immer kleiner wird, ergibt sich daraus, dass die Materiedichte im Laufe der Expansion gemäß (15.9) wie a^{-3} , die Strahlungsdichte gemäß (15.11) jedoch wie a^{-4} abfällt. Der Quotient $\rho_{\text{rad}}/\rho_{\text{matter}}$ sinkt daher wie $1/a$, wird also immer kleiner.

Mit (15.9), (15.11) und (15.12) kann die gesamte Dichte des Universums in unserem Modell für einen gegebenen Wert a des Skalenfaktors in der Form

$$\rho = \rho_{\text{matter}} + \rho_{\text{rad}} + \rho_{\Lambda} = \frac{\rho_{\text{matter},0}}{a^3} + \frac{\rho_{\text{rad},0}}{a^4} + \rho_{\Lambda} \quad (15.14)$$

geschrieben werden, wobei sich der Index 0 auf die heutigen Werte bezieht. In die erste Friedmanngleichung (15.1) eingesetzt, wird diese dann (für gegebene Werte der Konstanten) zu einer Differentialgleichung für $a \equiv a(t)$. Für $t = t_0$ reduziert sie sich mit (14.6) auf die Aussage

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \equiv \frac{8\pi G}{3} (\rho_{\text{matter},0} + \rho_{\text{rad},0} + \rho_{\Lambda}), \quad (15.15)$$

wobei wir die Abkürzung $\rho_0 = \rho(t_0)$ verwendet haben. Sie drückt die Tatsache aus, dass das Universum als räumlich flach angesehen wird und besagt, dass die heutige Dichte ρ_0 des Universums gleich der *kritischen Dichte*

$$\rho_{\text{krit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (15.16)$$

ist⁷⁷. Die Beiträge der heutigen Dichten werden üblicherweise in der Form

$$\Omega_{\text{matter}} = \frac{\rho_{\text{matter},0}}{\rho_{\text{krit}}}, \quad \Omega_{\text{rad}} = \frac{\rho_{\text{rad},0}}{\rho_{\text{krit}}} \quad \text{und} \quad \Omega_{\Lambda} = \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_{\text{krit}}} \quad (15.17)$$

als relative Anteile geschrieben, womit die erste Friedmanngleichung die Form

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{\text{matter}}}{a^3} + \frac{\Omega_{\text{rad}}}{a^4} + \Omega_{\Lambda} \right) \quad (15.18)$$

annimmt. Da

$$\Omega_{\text{matter}} + \Omega_{\text{rad}} + \Omega_{\Lambda} = 1 \quad (15.19)$$

⁷⁷ Wird eine nichtverschwindende räumliche Krümmung des Universums zugelassen, so ist ρ_{krit} jene Dichte, bei der das Universum räumlich flach ist. Ist $\rho_0 > \rho_{\text{krit}}$, so ist das Universum positiv gekrümmt, ist $\rho_0 < \rho_{\text{krit}}$, so ist es negativ gekrümmt. Aus unterschiedlichen Beobachtungsdaten folgt, dass ρ_0 sehr genau mit ρ_{krit} übereinstimmt, so dass wir also nur diesen Fall betrachten.

gilt⁷⁸, bleiben für die vier Konstanten H_0 , Ω_{matter} , Ω_{rad} und Ω_{Λ} (oder Λ) drei Freiheitsgrade, die *kosmologischen Parameter*⁷⁹. Ihre Werte zu ermitteln, ist eine der Hauptaufgaben der Kosmologie. Sind sie bekannt, so ist (15.18) eine Differentialgleichung für die Funktion $a \equiv a(t)$, die mit der Anfangsbedingung $a(0) = 0$ eine eindeutige Lösung besitzt.

• Zahlenwerte der kosmologischen Parameter

Wir geben zunächst (Begründung folgt) die im Rahmen des kosmologischen Standardmodells als am wahrscheinlichsten angesehenen Werte der kosmologischen Parameter an: Neben dem Wert (14.8) der Hubble-Konstante⁸⁰, aus dem

$$\rho_{\text{krit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \rho_0 \approx 9.5 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \quad (15.20)$$

folgt⁸¹, wird

$$\Omega_{\text{matter}} \approx 0.27 \quad \text{und} \quad \Omega_{\Lambda} \approx 0.73 \quad (15.21)$$

veranschlagt⁸², während der Strahlungsanteil (d. h. der Anteil der kosmischen Hintergrundstrahlung und der Hintergrundneutrinos) mit

$$\Omega_{\text{rad}} \approx 8.2 \cdot 10^{-5} \quad (15.22)$$

so klein ist, dass er heute nicht mehr ins Gewicht fällt⁸³. Aus den angegebenen Werten folgt für die Hauptbestandteile des Universums⁸⁴

$$\rho_{\text{matter},0} \approx 2.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \quad (15.24)$$

$$\rho_{\text{rad},0} \approx 7.8 \cdot 10^{-31} \text{ kg/m}^3 \quad (15.25)$$

$$\rho_{\Lambda} \approx 6.9 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3. \quad (15.26)$$

⁷⁸ Wird zugelassen, dass $\rho_0 \neq \rho_{\text{krit}}$ sein könnte, so sind Ω_{matter} , Ω_{rad} und Ω_{Λ} voneinander unabhängige Parameter, d. h. (15.19) gilt dann nicht notwendigerweise, und die Klammer in (15.18) bekommt den zusätzlichen Term $(1 - \Omega_{\text{matter}} - \Omega_{\text{rad}} - \Omega_{\Lambda})/a^2$, der von der räumlichen Krümmung des Universums herrührt.

⁷⁹ Es handelt sich dabei nur um die wichtigsten kosmologischen Parameter. Tatsächlich gibt es noch mehr.

⁸⁰ Diese und andere das Universum als Ganzes betreffende Zahlenangaben sind naturgemäß mit Unsicherheiten verbunden. Sie hängen in gewissem Ausmaß von theoretischen Annahmen ab und ändern sich mit jeder Beobachtungsmission ein bisschen, scheinen sich aber bei immer zuverlässigeren Werten einzupendeln. Zu Teil handelt es sich um Mittelwerte der Resultate unterschiedlicher Forschungsgruppen.

⁸¹ Die Dichte ρ_{krit} entspricht etwa fünfeinhalb Wasserstoffatomen pro Kubikmeter.

⁸² Damit ergibt sich der Wert der kosmologischen Konstanten zu $\Lambda \approx 1.2 \cdot 10^{-35} \text{ s}^{-2}$.

⁸³ Darin nicht enthalten ist der Anteil des von Sternen ausgesandten Lichts, der zu

$$\Omega_{\text{Sternenlicht}} \approx 10^{-5} \quad (15.23)$$

abgeschätzt werden kann. Da er in der Frühgeschichte des Universums (vor der Bildung von Sternen) keine Rolle spielt und heute vernachlässigbar klein ist, ist er in (15.18) nicht berücksichtigt.

⁸⁴ Die Dichte $\rho_{\text{matter},0}$ entspricht eineinhalb Wasserstoffatomen pro Kubikmeter, $\rho_{\text{rad},0}$ entspricht einem Elektron pro Kubikmeter, und ρ_{Λ} entspricht etwa vier Wasserstoffatomen pro Kubikmeter.

Auch andere Dichten werden in relativer Form (als Verhältnis zu ρ_{krit}) angegeben, wie

$$\Omega_{\text{baryonische Materie}} \approx 0.044 \quad (15.27)$$

und

$$\Omega_{\text{dunkle Materie}} \approx 0.228. \quad (15.28)$$

Die erste Zahl bedeutet, dass die uns vertraute Materie knapp 5% des Energieinhalts des Universums ausmacht. $\Omega_{\text{Neutrinos}}$ dürfte, je nach den (noch nicht bekannten) Massen der Neutrinos, zwischen 10^{-3} und 0.02 liegen⁸⁵. Der leuchtende Anteil der baryonischen Materie (Sterne) beträgt etwa

$$\Omega_{\text{leuchtende Materie}} \approx 0.005, \quad (15.29)$$

der Rest dürfte vor allem in Form neutraler Gaswolken (IGM, intergalaktisches Medium) mit etwa

$$\Omega_{\text{Gas}} \approx 0.038 \quad (15.30)$$

vorliegen, macht also fast 90% der baryonischen Materie aus. Schließlich wird

$$\Omega_{\text{Elemente schwerer als He}} \approx 3 \cdot 10^{-4} \quad (15.31)$$

geschätzt.

Wie kommt die Kosmologie zu diesen Werten für die kosmologischen Parameter? Ihr stehen dazu viele theoretische Argumente und – mittlerweile – auch viele, zum Teil unabhängig voneinander gewonnene Beobachtungsdaten zur Verfügung, von denen wir die allerwichtigsten im Folgenden besprechen wollen.

16 Bestimmung der Parameter und die Expansionsgeschichte des Universums

Die Gleichung, die die Dynamik des Universums in unserem Modell beschreibt, ist (15.18). Sehen wir sie uns genauer an:

- Sie enthält zunächst die Hubble-Konstante H_0 . Über das Hubble-Gesetz kann sie (wie bereits besprochen für nicht allzu weit entfernte Galaxien) durch die Auswertung der beobachteten Galaxienflucht gemessen werden. Die Schwierigkeiten

⁸⁵ Es handelt sich dabei nicht nur um die Hintergrundneutrinos, die aus dem frühen Universum stammen und in (15.22) enthalten sind, sondern auch um Neutrinos, die im Laufe der Zeit in verschiedenen Kern- und Teilchenreaktionen entstanden sind und mangels nachfolgender Wechselwirkung mit Materie immer mehr werden. Sollten die Neutrinomassen in Zukunft bekannt werden, so müssen Sie nur die Summe der Massen aller drei Neutrinotypen (Flavours) durch $47 \text{ eV}/c^2$ dividieren, um $\Omega_{\text{Neutrinos}}$ zu erhalten.

dabei besteht vor allem darin, die Entfernungen von Galaxien zu bestimmen⁸⁶. Der Wert der Hubble-Konstante hat sich daher immer wieder geändert. Im Laufe des letzten Jahrzehnts hat er sich bei (14.8) eingependelt. Mit ihm ergibt sich der Wert (15.20) der kritischen Dichte.

- Bereits eine oberflächliche Bestandsaufnahme des uns umgebenden Universums zeigt, dass $\Omega_{\text{rad}} \ll \Omega_{\text{matter}}$ ist. Das war aber nicht immer so. Ein Blick auf (15.18) zeigt, dass für kleine Werte von a die Strahlungskomponente die dominante ist. In seiner Frühzeit war das Universum *strahlungsdominiert*. Diese frühe Dynamik kann approximiert werden, indem in (15.18) die Anteile der Materie und der kosmologischen Konstante weggelassen werden. Nach Multiplikation mit a^2 ergibt sich

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \frac{\Omega_{\text{rad}}}{a^2}, \quad (16.1)$$

was (mit $a(0) = 0$) sogleich auf die Lösung

$$a(t) = \Omega_{\text{rad}}^{1/4} \sqrt{2H_0 t} \quad (16.2)$$

führt. In dieser Phase des Universums ist also $a(t) \sim t^{1/2}$ und daher $H(t) = \frac{1}{2t}$. Die Expansionsrate nimmt im Laufe der Zeit ab – das Universum expandiert *gebremst*.

- Mit der Zeit wächst a , was den Einfluss des Strahlungsanteils in (15.18) mindert. Lassen wir die kosmologische Konstante kurz beiseite, so geht das Universum als nächstes in eine *materiedominierte* Phase über, in der es näherungsweise durch

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \frac{\Omega_{\text{matter}}}{a} \quad (16.3)$$

beschrieben wird, woraus sich sofort

$$a(t) = \Omega_{\text{matter}}^{1/3} \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3} \quad (16.4)$$

ergibt. In der materiedominierten Phase ist also $a(t) \sim t^{2/3}$ und $H(t) = \frac{2}{3t}$. Die Expansion verläuft nach wie vor gebremst, wenn auch ein bisschen schwächer gebremst als in der strahlungsdominierten Ära. Dieser Unterschied kann auch anhand der Beschleunigungsgleichung (15.3) erkannt werden, die interessanterweise besagt, dass ein (positiver) Druck der Beschleunigung entgegenwirkt.

Wann ist es zum Übergang von einem strahlungs- zu einem materiadominierten Universum gekommen? Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir uns zunächst den Zustand des Strahlungsanteils im heutigen Univerum ansehen. Er wurde im

⁸⁶ Allzu *nahe* Galaxien – bei denen die Entfernungsbestimmung mit den traditionellen Methoden der Astronomie noch am besten funktioniert – helfen aufgrund ihrer lokalen Eigenbewegungen nicht bei der Bestimmung der Hubble-Konstante, wie das Beispiel der Andromeda-Galaxie zeigt.

Laufe der Zeit extrem rotverschoben, und wir beobachten seinen Photonenanteil heute als *kosmische Hintergrundstrahlung*⁸⁷ (auch kosmischer Mikrowellenhintergrund, *cosmic background radiation*, abgekürzt CBR, CMB oder CMBR). Sie hat mit hoher Genauigkeit die Charakteristik einer schwarzen Strahlung und ist weitgehend isotrop (d. h. sie trifft, bis auf kleine Variationen, von denen wir noch sprechen werden, aus allen Richtungen mit dem gleichen Spektrum bei uns ein). Ihre Temperatur beträgt $T_{\text{CBR},0} \approx 2.725 \text{ K}$, was einer Planckschen Frequenzverteilung um 160.2 GHz bzw. einer Wellenlängenverteilung um 1.9 mm entspricht. Die Teilchendichte dieser Hintergrundphotonen beträgt etwa 410 pro Kubikzentimeter. Die Energiedichte der elektromagnetischen Strahlung ist proportional zu T^4 . Mit (15.11) wird damit⁸⁸ $T \sim a^{-1}$. Wir können also zurückrechnen: Bei einem gegebenen Wert a des Skalenfaktors (bzw. einer Rotverschiebung z) hatte die Temperatur der Strahlung den Wert

$$T = \frac{T_{\text{CBR},0}}{a} \equiv (1 + z) T_{\text{CBR},0}. \quad (16.5)$$

Die heutigen Hintergrundphotonen reisen fast unbehindert durch das Universum. Sie stammen aus jener Epoche, als das Universum durchsichtig wurde. Das war bei einer Temperatur von $T_{\text{rec}} \approx 3000 \text{ K}$ der Fall, als sich neutrale Wasserstoffatome bilden konnten⁸⁹. Man bezeichnet diese Epoche als *Rekombination*⁹⁰ (wobei das vorangestellte "Re" eigentlich falsch ist) und nennt diesen Zeitpunkt auch die *surface of last scattering*. Damit ergibt sich

$$a_{\text{rec}} \approx \frac{T_{\text{CBR},0}}{T_{\text{rec}}} \approx 9 \cdot 10^{-4} \quad \text{bzw.} \quad z_{\text{rec}} \approx 1100. \quad (16.6)$$

Die Photonen der Hintergrundstrahlung stammen also aus einer Zeit, in der die Entfernungen Universum weniger als ein Tausendstel ihrer heutigen Werte betragen!

⁸⁷ Sie wurde 1964 – zufällig – von Arno Penzias und Robert Wilson entdeckt, die dafür 1978 den Nobelpreis erhielten. Vorhergesagt wurde sie bereits 1948 von George Gamow, Ralph Alpher und Robert Herman als notwendige Folge eines Urknallmodells. Die Autoren schätzten, dass sie heute eine Temperatur von 5 bis 50 K hat, womit sie vom tatsächlichen Wert gar nicht so weit entfernt lagen.

⁸⁸ Als Check können Sie folgende Überlegung anstellen: Die Wellenlänge λ (genauer: jene Wellenlänge, bei der die Energiedichte ihr Maximum besitzt) ist nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz umgekehrt proportional zu T , daher gilt $\lambda \sim a$. Die Wellenlänge expandiert also (wie bereits früher erwähnt) mit den Entfernungen im Universum mit.

⁸⁹ Die Ionisationsenergie (= Grundzustandsenergie) des Wasserstoffatoms beträgt 13.6 eV, was einer Temperatur von $13.6 \text{ eV}/k \approx 10^4 \text{ K}$ entspricht. Da es viel mehr Photonen als Elektronen gibt, werden die ersten sich bildenden Wasserstoffatome durch die zahlreichen Photonen im hochenergetischen Ausläufer der Planck-Verteilung aber sofort wieder zerstört. Erst wenn die Temperatur auf 3000 K gesunken ist, dominiert die Bildung von Wasserstoffatomen über deren Zerstörung.

⁹⁰ Genau genommen fand zuerst die *Rekombination* (= Bildung neutraler Wasserstoffatome) statt. Dadurch stieg innerhalb kurzer Zeit die mittlere freie Weglänge der Photonen an, so dass diese von nun an nur mehr selten mit der Materie wechselwirkten. Man spricht daher auch von der *Entkopplung der Photonen* (*decoupling*).

Nun können wir den heutigen Anteil der Hintergrundphotonen an der Energiedichte des Universums berechnen: Die heutige (auf eine Massendichte umgerechnete) Dichte der kosmischen Hintergrundstrahlung⁹¹ beträgt

$$\rho_{\text{CBR},0} = \frac{4\sigma}{c^3} T_{\text{CBR},0}^4 \approx 4.6 \cdot 10^{-31} \text{ kg/m}^3, \quad (16.7)$$

woraus sich mit (15.20) ihr heutiger Anteil zu

$$\Omega_{\text{CBR}} \approx 4.9 \cdot 10^{-5} \quad (16.8)$$

ergibt. Der Anteil der Hintergrundneutrinos ist etwas kleiner. Eine genauere Betrachtung⁹², deren Details wir uns hier schenken, führt auf

$$\Omega_{\text{rad}} \approx 1.68 \Omega_{\text{CBR}} \approx 8.2 \cdot 10^{-5}, \quad (16.9)$$

womit die Begründung von (15.22) nachgeliefert ist. Wann fand nun der Übergang von strahlungs- zum materiedominierten Universum statt? Als Richtwert dafür nehmen wir jene Zeit, zu der die Dichten der Strahlung und der Materie, wie sie in (15.18) eingehen, gleich groß waren. Das war der Fall, als der Skalenfaktor den Wert

$$a_{\text{eq}} = \frac{\Omega_{\text{rad}}}{\Omega_{\text{matter}}} \quad (16.10)$$

hatte. Um dieses Verhältnis angeben zu können, müssen wir Ω_{matter} kennen, was wegen (15.19) gleichbedeutend damit ist, auch Ω_{Λ} zu kennen. Bis vor 15 Jahren glaubte man, dass $\Omega_{\text{matter}} \approx 1$ ist. Heute wird eher der in (15.21) angegebene Wert von 0.27 als richtig angesehen. Setzen wir den modernen Wert in (16.10) ein (wir werden gleich darauf eingehen, wie er bestimmt werden kann), so erhalten wir $a_{\text{eq}} \approx 3 \cdot 10^{-4}$ oder $z_{\text{eq}} \approx 3300$. Mit (16.6) bedeutet das, dass der Übergang zum materiedominierten Universum ein bisschen früher als die Rekombination (16.6) stattfand.

⁹¹ Die Energiedichte einer Hohlraumstrahlung mit Temperatur T ist durch $\frac{4\sigma}{c} T^4$ gegeben.

⁹² Die Hintergrundneutrinos haben sich etwa zwei Sekunden nach dem Urknall bei einer Temperatur von 10^{10} K von der Wechselwirkung mit den restlichen Bestandteilen des Universums zurückgezogen. Man spricht von der *Entkopplung* oder dem *Ausfrieren* der Neutrinos. Seither kühlen sie mit der Expansion ab und haben heute eine Temperatur von 1.95 K mit einer Teilchendichte von etwa 110 Neutrinos pro Kubikzentimeter (und Flavour). Die aus Photonen bestehende kosmische Hintergrundstrahlung hätte heute die gleiche Temperatur, hätte sie nicht einige Sekunden nach dem Ausfrieren der Neutrinos eine Energiezufuhr durch die Paarvernichtung $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ erhalten, die unterhalb von $6 \cdot 10^9$ K (was der Masse des Elektrons entspricht) nicht mehr in umgekehrter Richtung $2\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ verlaufen kann. Daher ist die Photonentemperatur, wie die Berechnung zeigt, seither um den Faktor $(11/4)^{1/3} \approx 1.4$ höher als die Neutrinotemperatur. Zum physikalischen Hintergrund derartiger Berechnungen erwähnen wir nur, dass die Teilchen- und Energiedichte einer Strahlungskomponente eindeutig durch deren Temperatur bestimmt ist. Vor diesem Prozess gab es etwa gleich viele e^\pm wie Photonen – durch ihn verschwinden nun alle “überzähligen” Positronen. Seither gilt für die Teilchendichten $n_{\text{Baryonen}} \approx 6 \cdot 10^{-10} n_{\text{Photonen}}$ (wobei unter Baryonen hauptsächlich Protonen und Neutronen gemeint sind) und $n_{\text{Elektronen}} \approx 5 \cdot 10^{-10} n_{\text{Photonen}}$.

Mit (16.9) können wir nun auch konkrete Zeiten angeben: Gemäß der Zeitentwicklung (16.2) des strahlungsdominierten Universums wurde der Wert a_{eq} etwa zur Zeit $t_{\text{eq}} \approx 70000$ Jahre erreicht. Um die restliche Zeit bis zur Rekombination zu überbrücken, rechnen wir materiedominiert mit (16.4) weiter und erhalten⁹³

$$t_{\text{rec}} \approx \left(\frac{a_{\text{rec}}}{a_{\text{eq}}} \right)^{3/2} t_{\text{eq}} \approx 360000 \text{ Jahre}. \quad (16.12)$$

Die Rekombination findet nicht mit einem Schlag statt, sondern ist ein Prozess, der etwa 50000 Jahre dauert. Diese Zeitspanne stellt, bildlich gesprochen, die "Dicke" der *surface of last scattering* dar.

- In der Folgezeit wächst das Universum – den Strahlungsanteil können wir von nun an vernachlässigen –, bis sich schließlich in (15.18) der dritte Term, die Energiedichte des Vakuums, bemerkbar macht. Woher wissen wir überhaupt von seiner Existenz? Wie bereits erwähnt, war er schon lange Zeit als theoretische Möglichkeit bekannt, ja er stand sogar kurz in Einsteins Feldgleichungen (und wurde von ihm dann als seine "größte Eselei" wieder herausgestrichen). Also war man von der theoretischen Seite her vorbereitet, als in den späten 1990-er Jahren Beobachtungsdaten nahelegten, dass das Universum nicht *gebremst*, sondern *beschleunigt* expandiert. Sehen wir uns die Differentialgleichung (15.18) für den Fall an, dass sowohl der Strahlungs- als auch der Materieanteil vernachlässigt werden. Wir erhalten dann eine exponentiell beschleunigte Expansion vom Typ

$$a(t) \sim \exp \left(H_0 t \sqrt{\Omega_\Lambda} \right). \quad (16.13)$$

Auch aus der Beschleunigungsgleichung (15.3) ist ersichtlich, dass eine Komponente mit der Zustandsgleichung (15.13) eine beschleunigte Expansion verursacht. Allerdings ist der Anteil der Vakuumenergie heute noch nicht so groß, dass die Materie vernachlässigt werden könnte. Um die Wirkung des Vakuumanteils bestimmen zu können, muss die Differentialgleichung (15.18) – Ω_{rad} können wir dabei vernachlässigen⁹⁴ – gelöst werden. Das exakte Ergebnis ist⁹⁵

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{\text{matter}}}{\Omega_\Lambda} \sinh^2 \left(\frac{3\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} H_0 t \right) \right)^{1/3}, \quad (16.14)$$

⁹³ Diese Berechnungsmethode durch Anstückeln ist natürlich ein bisschen ungenau. Die Integration der Friedmangleichung (15.18) mit vernachlässigtem Ω_Λ ergibt t als Funktion von a :

$$t = \frac{2}{3H_0 \Omega_{\text{matter}}^2} \left(2\Omega_{\text{rad}}^{3/2} + (a\Omega_{\text{matter}} - 2\Omega_{\text{rad}}) \sqrt{a\Omega_{\text{matter}} + \Omega_{\text{rad}}} \right). \quad (16.11)$$

Damit ergibt sich $t_{\text{eq}} \approx 55000$ Jahre und $t_{\text{rec}} \approx 370000$ Jahre.

⁹⁴ Den strahlungsdominierte Ära hier unter den Teppich zu kehren, ist mehr als gerechtfertigt. In den Abbildungen 3 und 4 ist ihre Dauer kürzer als die Strichdicke, und seither hat sich das Universum um mehr als das 3000-fache aufgeblasen.

⁹⁵ Rechnen Sie nach, indem Sie diesen Ausdruck in (15.18) einsetzen! \sinh ist der Sinus Hyperbolicus: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

wobei als Anfangsbedingung $a(0) = 0$ gewählt wurde. Zudem kann $\Omega_{\text{matter}} + \Omega_{\Lambda} = 1$ gesetzt werden, was in (16.14) zwei freie Parameter, etwa H_0 und Ω_{matter} , offen lässt, die mit Beobachtungsdaten abgestimmt werden können⁹⁶.

Mit Hilfe von (16.14) lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Rotverschiebung des von einer Galaxie stammenden Lichts und der Entfernung, die diese zum Zeitpunkt der Aussendung hatte, die so genannte *Rotverschiebungs-Entfernungs-Relation*, ableiten. Durch den Vergleich mit Beobachtungsdaten lassen sich die freien Parameter bestimmen. Nun ist die Entfernungsbestimmung sehr weit entfernter Galaxien schwierig – ausgenommen, es wird in einer solchen Galaxie eine Supernova vom Typ I (genauer: Typ Ia⁹⁷) beobachtet. Aufgrund ihres Auslösemechanismus, den wir bereits früher besprochen haben, sind alle diese Supernovae gleich hell, d. h. sie werden als *Standardkerzen* angesehen⁹⁸. Die Rotverschiebung z einer Supernova ist leicht messbar, und aus der scheinbaren Helligkeit kann auf ihre Entfernung D zum Zeitpunkt der Supernova geschlossen werden, womit sich jede derart vermessene Supernova als Punkt in einem (z, D) -Diagramm darstellen lässt. Für gegebene Werte der kosmologischen Parameter H_0 und Ω_{matter} sagt die Zeitentwicklung (16.14) des Skalenfaktors eine Kurve voraus, auf der alle diese Punkte liegen sollten. Da sich für verschiedene Werte der Parameter verschiedene Kurven ergeben, können H_0 und Ω_{matter} (genauer: beste Schätzwerte) über einen Vergleich mit den Beobachtungsdaten bestimmt werden.

Das Interessante daran ist, dass die Beziehung zwischen z und D etwas über die länger zurückliegende Expansionsgeschichte aussagt: Licht, das wir von einer sehr weit entfernten Galaxie empfangen, ist vor langer Zeit ausgesandt worden, und das Universum war damals kleiner. Für nahe gelegene Galaxien kann dieser Effekt vernachlässigt werden. In diesem Fall reduziert sich die Rotverschiebungs-Entfernungs-Relation auf das bereits erwähnte lokale Hubble-Gesetz (14.19):

$$D \approx \frac{c}{H_0} z. \quad (16.15)$$

Für weiter entfernte Galaxien muss zwischen der damaligen und der (nicht beobachtbaren) heutigen Entfernung unterschieden werden. Mit D bezeichnen wir die *damalige* Entfernung⁹⁹. Der exakte Zusammenhang zwischen z und D , den

⁹⁶ Wir haben den der Hubble-Konstante zwar bereits mit (14.8) festgelegt, tatsächlich wurde er aber durch die Beobachtungen, die wir jetzt beschreiben, noch einmal – und zwar genauer als je zuvor – bestimmt.

⁹⁷ Die Varianten Ib und Ic, die ähnlich beginnen, bei denen aber als Überrest ein Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch zurückbleibt, sind keine Standardkerzen.

⁹⁸ Das ist ein bisschen vereinfacht. Es gibt Unterschiede zwischen einzelnen Supernovae, aber diese können mit Hilfe empirisch gefundener – und daher auch ein bisschen umstrittener – Regeln ausgeglichen werden.

⁹⁹ Dabei muss berücksichtigt werden, dass die Bestimmung der Entfernung aus der scheinbaren Helligkeit nicht so einfach wie in der flachen Raumzeit funktioniert, da das Licht während seiner Reise aufgrund der Rotverschiebung einen Energieverlust erleidet. Insgesamt ist die scheinbare Helligkeit

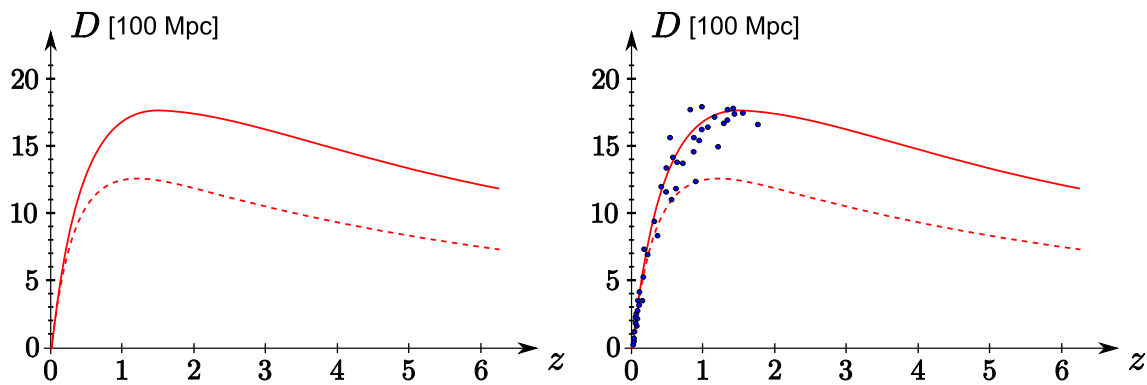


Abbildung 5: Links: Rotverschiebungs-Entfernungs-Relation für zwei kosmologische Modelle mit flachen Raumschnitten und gleicher Hubble-Konstante (durchgezogen: $\Omega_{\text{matter}} = 0.27$, strichliert: $\Omega_{\text{matter}} = 1$). Die durchgezogene Kurve kann unter Verwendung von (14.18) und der linken Skizze von Abbildung 3 punktwiese aus der rechten Skizze von Abbildung 4 gewonnen werden. Rechts: Dieselben Kurven mit einer typischen Auswahl von beobachteten Supernovae.

unser Modell vorhersagt (wir ersparen uns eine Herleitung¹⁰⁰), ist für zwei Parametersätze in Abbildung 5 (links) dargestellt. Beiden liegt der gleiche Wert (14.8) der Hubble-Konstante zugrunde – für nahe Galaxien stimmen sie also überein. Das ist genau der Bereich, der durch (16.15) beschrieben wird¹⁰¹. Die strichlierte Kurve entspricht dem älteren, noch bis vor 15 Jahren gültigen kosmologischen Standardmodell, in dem $\Omega_{\text{matter}} = 1$ gesetzt wurde, die durchgezogene Kurve entspricht dem neueren kosmologischen Standardmodell, in dem $\Omega_{\text{matter}} = 0.27$ angenommen wird. Beachten Sie, dass beide Kurven für große z kleine Werte von D ergeben – das Universum war ja früher kleiner! Das rechte Diagramm in Abbildung 5 zeigt dieselben Kurven mit einer typischen Auswahl von beobachteten Supernovae¹⁰². Demnach expandiert das Universum tatsächlich beschleunigt! In einfachen Worten ausgedrückt: Weit entfernte Supernovae leuchten schwächer – ihre damalige Ent-

proportional zu $a^4 D^{-2}$ oder, durch die Rotverschiebung ausgedrückt, $(1+z)^{-4} D^{-2}$. Die beiden Beobachtungsgrößen sind daher (falls die absolute Leuchtkraft bekannt ist und weitere Effekte wie die spätere Ablenkung des Lichts durch Galaxienhaufen, an denen es vorbei läuft, vernachlässigt werden) z und $(1+z)^2 D$. Damit lässt sich jede derartige Beobachtung als Punkt in ein (z, D) -Diagramm einzeichnen.

¹⁰⁰ Der aus unserem Modell gewonnene exakte Ausdruck ist

$$D(z) = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{da}{\sqrt{a(\Omega_{\text{matter}} + \Omega_{\Lambda} a^3)}}. \quad (16.16)$$

Für kleine z ergibt sich mit $D(z) = cz/H_0 + O(z^2)$ gerade das näherungsweise geltende lokale Hubble-Gesetz (16.15). Es entspricht dem näherungsweise linearen Anstieg der in Abbildung 5 gezeigten Kurve für kleine z .

¹⁰¹ Die Rotverschiebungen, die Edwin Hubble 1929 zur Verfügung standen, sind mit $z \lesssim 0.004$ kleiner als die Strichdicke!

¹⁰² Die Werte (14.8) und (15.21) der kosmologischen Parameter ergeben sich als “best fit” aus den Daten.

fernung war größer – als aufgrund des alten Modells erwartet. Da dieser Effekt für nahe Supernovae weniger ausgeprägt ist, muss die Expansion des Universums in der Vergangenheit langsamer verlaufen sein als heute. Dieses Ergebnis wurde zuerst 1998 von zwei voneinander unabhängig arbeitenden Forschungsteams anhand von jeweils über 70 Supernovae erzielt, dem *Supernovae Cosmology Project* (SCP) und dem *High-Z Supernova Search Team* (HZT), und seither durch detailliertere Untersuchungen (basierend auf erdgestützten Beobachtungen und auf Daten des Hubble Space Telescope) erhärtet¹⁰³. Die Supernova-Beobachtungen reichen bis zu einer Rotverschiebung von knapp unter 2 (also bis zu einem Skalenfaktor von knapp über $\frac{1}{3}$), was ungefähr den letzten 10 Milliarden Jahren entspricht¹⁰⁴.

Damit sind die von uns erwähnten kosmologischen Parameter (auf der Basis der getroffenen Modellannahmen) bestimmt. Aus (16.14) ergibt sich, dass das Universum etwa 7 Milliarden nach dem Urknall von der gebremsten in die beschleunigte Expansion überging. (Das entspricht dem Wendepunkt der Kurve von Abbildung 3, links). Das Alter des Universums ergibt sich daraus als jene Zeit t_0 , für die (16.14) den Wert 1 hat, numerisch durch (14.2) gegeben.

- Wenn unser Modell stimmt und ρ_Λ tatsächlich eine echte Konstante ist¹⁰⁵, dann steht dem Universum in gar nicht so ferner Zukunft eine exponentiell beschleunigte Expansion vom Typ (16.13) bevor, die “alles von allem” immer weiter auseinanderrücken wird. Das konforme Diagramm zeigt, dass es dann in der Raumzeit einen kosmologischen Ereignishorizont gibt¹⁰⁶, d. h. dass es Galaxien gibt, die wir *nie* gesehen haben und auch *nie* zu Gesicht bekommen werden.

¹⁰³ Es gibt aber auch Kritik daran: Ein alternativer Ansatz geht davon aus, dass die Beobachtungsdaten nicht auf eine beschleunigte Expansion des Universums hindeuten, sondern durch Dichteschwankungen der Materie und dadurch verursachte lokale Raumzeit-Krümmungen, die zu groß für die Anwendung des kosmologischen Prinzips wären, zustande kommen.

¹⁰⁴ Wäre die genaue Rotverschiebungs-Entfernungs-Relation bis zu einem maximalen z_{\max} , d. h. bis zu einem minimalen a_{\min} bekannt, so ließe sich daraus die Zeitentwicklung $a \equiv a(t)$ des Skalenfaktors hinunter bis zu genau diesem a_{\min} eindeutig erschließen.

¹⁰⁵ Es gibt auch Ansätze, die diese Größe als Energiedichte eines *Feldes* betrachten, das im Laufe der Zeit seinen Wert ändern und damit die heutige Tendenz wieder umkehren kann: Aus (15.3) folgt, dass das Universum beschleunigt expandiert, falls seine Hauptkomponente eine Zustandsgleichung der Form $p = w\rho c^2$ mit $w < -\frac{1}{3}$ erfüllt. Für die Zustandsgleichung (15.13) des Vakuums gilt $w = -1$. Im Rahmen alternativer Modelle werden auch andere Zustandsgleichungen betrachtet, beispielsweise die so genannte *Quintessenz* mit einem veränderlichen w . Unter der Annahme eines konstanten Werts von w wird dieser durch die Supernova-Beobachtungen auf $w = -1.023 \pm 0.1$ eingegrenzt, was stark für die Vakuumenergie als Verursacher der Beschleunigung spricht.

¹⁰⁶ Der mathematische Grund dafür besteht darin, dass die isotrope Zeit in einem solchen Weltmodell beschränkt ist (vgl. Fußnote 71 auf Seite 54): $c \int_0^\infty dt/a(t)$ ist endlich!

17 Vom frühen bis zum heutigen Universum

Als das *frühe Universum* wird die Zeit bis zur Rekombination (16.6) und (16.12) bezeichnet. Nach dem Standardmodell ist es für Zeiten $t \ll t_{\text{eq}} \approx 70000$ strahlungsdominiert, und die Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors ist durch (16.2) gegeben. Während der ersten zwei Sekunden kann von einer einheitlichen Temperatur gesprochen werden. Die Zeitabhängigkeit der Temperatur ist durch

$$T \approx 6.4 \cdot 10^9 \text{ K} \sqrt{\frac{1 \text{ s}}{t}} \approx 0.55 \frac{\text{MeV}}{k} \sqrt{\frac{1 \text{ s}}{t}} \quad (17.1)$$

gegeben. Danach entkoppeln die Neutrinos, und einige Sekunden später enthält der Photonenanteil der Strahlung einen Temperaturkick durch die Paarvernichtung (vgl. Fußnote 92 auf Seite 65). Seither gilt

$$T \approx 8.6 \cdot 10^9 \text{ K} \sqrt{\frac{1 \text{ s}}{t}} \approx 0.74 \frac{\text{MeV}}{k} \sqrt{\frac{1 \text{ s}}{t}}, \quad (17.2)$$

wobei T die Temperatur der Photonen und bis zur Rekombination gleichzeitig die Temperatur des gesamten Teilchenspektrums (außer den Neutrinos) ist. Eine Sekunde nach dem Urknall finden wir also Temperaturen, wie sie in einer Supernova auftreten – allerdings liegt die Dichte zu diesem Zeitpunkt mit $5 \cdot 10^8 \text{ kg/m}^3$ bereits 5 Größenordnungen unter jenen einer Supernova. Der Skalenfaktor betrug etwa $2 \cdot 10^{-10}$, der Hubble-Radius war etwas größer als die (heutige) Entfernung Erde-Mond¹⁰⁷.

- **Primordiale Nukleosynthese und die Häufigkeit der Elemente**

Mit (17.1) ergibt sich, dass zur Zeit $t \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ eine Temperatur von $T \approx 10^{13} \text{ K} \approx 10^3 \text{ MeV}/k$ geherrscht hat, was etwa der Masse der Nukleonen entspricht. Unterhalb dieser Temperatur bleibt zwar die Gesamtzahl der Baryonen¹⁰⁸ konstant, aber sie können sich durch Prozesse wie $p + e \leftrightarrow n + \nu_e$, $p + \bar{\nu} \leftrightarrow n + e^+$ und $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ ineinander umwandeln, wobei sich die Neutronen aufgrund ihrer größeren Masse häufiger in Protonen verwandeln als umgekehrt. Je kühler es

¹⁰⁷ Ein Massenelement des Substrats, das heute 1000 Mpc entfernt ist, lag damals allerdings in 0.7 Lichtjahren Entfernung. Diese Zahl zeigt, wie falsch die Aussage ist, das Universum wäre einer Sekunde nach dem Urknall "eine Lichtsekunde groß" gewesen. Ein Massenelement des Substrats, das damals einen Hubble-Radius entfernt war, befindet sich heute (rein rechnerisch) in einer Entfernung von 300 Lichtjahren, was um den Faktor $2 \cdot 10^{-8}$ kleiner als ist der heutige Hubble-Radius. Was damals in etwa das "sichtbare Universum" war, ist heute nur einige hundert Lichtjahre groß. Wir sehen also heute wesentlich größere Teile des Substrats als es damals möglich gewesen wäre. Hier kündigt sich bereits ein Problem des Standardmodells an, auf das wir später noch zu sprechen kommen, das so genannte Horizontenproblem (Seite 74). Das Ausmaß der Vergrößerung der Entfernungen seit dieser Zeit kann so illustriert werden: Rein rechnerisch wurde ein Gebiet der Größe von einem Millimeter bis heute auf eine Größe von 50 km aufgeblasen.

¹⁰⁸ Damit meinen wir die Gesamtzahl aller Baryonen, Antiteilchen mitgezählt. Sie ist nicht zu verwechseln mit der *Baryonenzahl*, in der Teilchen und Antiteilchen einander aufheben.

wird, umso weniger Neutronen verbleiben. Nach der Entkopplung der Neutrinos dominiert die letzte dieser Reaktionen, der Zerfall der (ohnehin in der Minderzahl befindlichen) freien Neutronen mit einer Zeitskala von etwa 15 Minuten. Alle Neutronen, die in aller Eile (solange es heiß genug ist) nicht in Atomkernen gebunden werden, verschwinden nach und nach von der Bildfläche! Die Thermodynamik dieser Phase des Universums kann recht zuverlässig nachvollzogen werden und führt zu Vorhersagen für die *Häufigkeit der Elemente*. Wir gehen nicht auf die Details ein, sondern geben nur die Ergebnisse an:

- Etwa drei Viertel der Masse der baryonischen Materie im Universum sollte in Form von ${}^1_1\text{H}$ vorliegen, etwa ein Viertel in Form von ${}^4_2\text{He}$. Das ist eine sehr robuste Vorhersage jedes Urknallmodells. Natürlich hat sich die Häufigkeit dieser beiden Elemente seither durch stellare Fusionsprozesse geändert. Die Beobachtung von Regionen mit Materie geringer Metallizität (die aller Voraussicht nach zumindest nicht allzuviel Zeit in Sternen verbracht hat) bestätigt diese Vorhersage bestens!
- Genauere Vorhersagen betreffen die Häufigkeiten von ${}^2_1\text{H}$ (Deuterium), ${}^3_2\text{He}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^7_3\text{Li}$ und der instabilen Isotope ${}^3_1\text{H}$, ${}^7_4\text{Be}$ und ${}^8_4\text{Be}$. Sie hängen empfindlich vom Nukleon-zu-Photon-Verhältnis $\eta = n_{\text{Baryonen}}/n_{\text{Photonen}}$ und damit von $\Omega_{\text{baryonische Materie}}$ ab. Insbesondere die gemessene Häufigkeit von Deuterium (0.01%) schränkt den Anteil der baryonischen Materie auf den in (15.27) angegebenen Wert ein¹⁰⁹.

Nach etwa 3 Minuten ist die primordiale Nukleosynthese abgeschlossen. Das wichtigste Ergebnis dieser Analyse: Die baryonische Materie macht nicht einmal 5% des Energieinhalts des Universums aus!

• Baryonenasymmetrie

Vor der Nukleosynthese kam die Baryogenese, d. h. die Entstehung der Baryonen. Über sie wissen wir vergleichsweise wenig. Ein interessanter Aspekt besteht darin, dass es im Universum viel mehr Protonen und Neutronen gibt als ihre Antiteilchen. Dabei ist unklar, ob diese Asymmetrie aufgrund unterschiedlicher Eigenschaften von Materie und Antimaterie zustande gekommen¹¹⁰ oder gewissermaßen ein Zufallsprodukt der sehr frühen Entwicklung des Universums ist. Unklar ist auch, wieso der Überschuss der Elektronen über die Positronen genauso groß ist wie der

¹⁰⁹ In den Vergleich der primordialen mit den heutigen Verteilungen geht auch H_0 ein – hier wurde der Wert (14.8) benutzt.

¹¹⁰ Aufgrund der sogenannten CP-Verletzung, die im Standardmodell der Teilchenphysik vorgesehen ist und beim Zerfall des neutralen Kaons K^0 experimentell bestätigt wurde, sind Materie und Antimaterie physikalisch nicht gleichwertig. Für eine Erklärung der Baryonenasymmetrie aus symmetrischen Anfangsbedingungen reicht sie aber nicht aus, da in ihr die Baryonenzahl erhalten ist. Vorgeschlagene Modellansätze einer *großen vereinheitlichten Theorie* (GUT, Vereinheitlichung von elektroschwacher und starker Wechselwirkung) ermöglichen eine Änderung der Baryonenzahl, aber da sie noch nicht hinreichend ausgearbeitet sind, liegt noch keine befriedigende Theorie der Baryogenese vor.

Überschuss der Baryonen über ihre Antiteilchen, d. h. warum das Universum (so vermuten wir zumindest) elektrisch neutral ist.

- **Woraus besteht die dunkle Materie?**

Mit (15.27) und (15.28) sind an die 84% der Materie nicht-baryonisch – wir nennen sie die *dunkle Materie*. Allem Anschein nach ist sie tatsächlich dunkel, was bedeutet, dass sie mit der baryonischen Materie nicht (oder kaum, oder zumindest nicht elektromagnetisch) wechselwirkt. Die Auswertung der Rotationskurven von Galaxien, der Dynamik von Galaxienhaufen und der durch Gravitationslinseneffekte von Galaxienhaufen hervorgerufenen Mehrfachbilder zeigt, dass Galaxien und Galaxienhaufen von "Halos" aus nicht-leuchtender Materie umgeben sind. Die Analyse der primordialen Nukleosynthese legt nahe, dass es sich dabei um die nicht-baryonische Materie, die es in unserem Universum geben muss, handelt. Gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie nimmt *jede* Materieform an der Gravitationswechselwirkung teil. Das nehmen wir klarerweise auch von der dunklen Materie an. Die Galaxien-Halos zeigen, dass die dunkle Materie sich unter der Wirkung ihrer Schwerkraft zusammenklumpt – was bereits einen Teil der Kandidaten, worum es sich dabei handeln könnte, ausschließt.

Die verbleibenden aussichtsreichen Kandidaten: Elementarteilchen, die wir noch nicht entdeckt haben (aber möglicherweise am LHC entdecken werden). Allen Erwartungen gemäß müssten sie eine große Masse haben und – wie gesagt – nur sehr schwach mit der baryonischen Materie wechselwirken: so genannte WIMPs (*weakly interacting massive particles*). In den einfachsten Modellen haben sie kleine (nicht-relativistische) Geschwindigkeiten. Man spricht dann von *cold dark matter*, CDM. Das kosmologische Standardmodell, das wir hier skizziert haben, ist von dieser Form und heißt folgerichtig Λ -CDM-Modell. Es behandelt die dunkle Materie als druckfreie Komponente, die mit dem Rest der Welt *nur* gravitativ wechselwirkt (und ρ_Λ als *echte* Konstante). Nach diesem Modell klumpt sich die dunkle Materie unter der Wirkung ihrer Eigengravitation zusammen. Baryonische Materie (aus denen der sichtbare Teil der Galaxien besteht) fällt dann, bildlich gesprochen, in ihre Potentialmulden. Computer-Simulationen der Dynamik, die man aufgrund dieser Eigenschaften erwarten würde, zeigen recht schön das Zustandekommen filamentartiger Strukturen mit großen Leerräumen (*voids*), die jenen der beobachteten großräumigen Galaxienverteilung ähneln.

Vielleicht mischen bei der dunklen Materie auch ein paar Neutrinos als *hot dark matter* (HDM) mit. Allzu groß kann ihr Beitrag allerdings nicht sein, denn das hätte die Bildung von Strukturen im Universum behindert.

MACHOS (massive compact halo objects), wie ausgebrannte Sterne, schwarze Löcher und sonstige nicht-leuchtende Objekte, die früher als Kandidaten für die dunkle Materie diskutiert wurden, sind baryonischer Natur, zählen also zur normalen Materie, auch wenn sie "dunkel" sind.

Originell ist die Idee eines *Paralleluniversums*, das mit dem Universum, in dem wir

leben, nur gravitativ wechselwirkt.

- **Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung**

Die kosmische Hintergrundstrahlung ist mit einer hohen Genauigkeit *isotrop*, d. h. sie kommt (wenn der von unserer Eigenbewegung von etwa 370 km/s verursachte Dopplereffekt – die so genannte Dipol-Anisotropie – herausgerechnet wird) von allen Seiten fast mit der gleichen Temperatur $T \approx 2.725$ K. Erst in den frühen 1990-er Jahren wurde eine geringfügige *Anisotropie* der Größenordnung

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5} \quad (17.3)$$

entdeckt (Satellitenmission *Cosmic Background Explorer*, COBE¹¹¹, 1989 – 1993). Seither wurde die Feinstruktur dieser Anisotropie genau vermessen, vor allem durch das Ballonexperiment BOOMERanG (2000) und die Satellitenmission *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP, seit 2001), und stellt eine der ergiebigsten Quellen für kosmologisch relevante Beobachtungen dar.

- Visualisierungen der Anisotropie zeigen eine “Aufnahme” des Universums zur Zeit der Rekombination.
- Winkel-Leistungsspektrum der Anisotropie¹¹²: Es zeigt mehrere Peaks. Interpretation: Dichteschwankungen zur Zeit der Rekombination, “Schall” wellen und durch den Strahlungsdruck (den nur die baryonische Materie spürt) verursachte Oszillationen, Sachs-Wolfe-Effekt (Rotverschiebung im Gravitationsfeld). Die Lage des ersten Peaks ist von der räumlichen Krümmung des Universums abhängig. Er liegt bei $\ell \approx 200$, was $\Delta\theta \approx 1^\circ$ entspricht. Vergleich mit Berechnung ergibt $\Omega_0 = 1.02 \pm 0.02$, was mit der von uns gemachten Annahme $\Omega_0 = 1$ (räumlich flaches Universum) verträglich ist, aber auch mit einer (kleinen) nichtverschwindenden Krümmung. Die genaue Abhängigkeit der C_ℓ von ℓ hängt von praktisch allen kosmologischen Parametern ab \Rightarrow unabhängige Bestätigung deren Werte. Dichtefluktuationen sind um zwei Größenordnungen kleiner als sie in einer rein baryonischen Welt wären \Rightarrow weiteres Argument für die Existenz nicht-baryonischer dunkler Materie. Evidenz für Inflation (s.u.), skaleninvariantes Spektrum (Harrison-Zeldovich Spektrum).

¹¹¹ Nobelpreis 2006 an John C. Mather und George F. Smoot.

¹¹² Es wird aus der Winkel-Korrelationsfunktion durch die Entwicklung

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T}(\vec{n}) \frac{\Delta T}{T}(\vec{n}') \right\rangle_{\vec{n} \cdot \vec{n}' = \cos \theta} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) C_\ell P_\ell(\cos \theta) \quad (17.4)$$

in Legende-Polynome gewonnen. Die ℓ -te Mode entspricht einer Anisotropie (von der Art einer stehenden Welle auf der Sphäre) mit Winkeldurchmesser $\Delta\theta = \pi/\ell$. Üblicherweise wird $\ell(\ell+1)C_\ell$ gegen ℓ aufgetragen.

Nachfolger von WMAP: Planck (gestartet 2009, gemeinsam mit dem Herschel-Weltraumteleskop, erste Daten werden 2012 erwartet).

- **Unabhängige Bestimmungen und *cross checks* der kosmologischen Parameter**

Lyman- α -Wald: Die Lyman- α -Linie entspricht dem Übergang $n = 1 \leftrightarrow n = 2$ beim Wasserstoff (bei einer Wellenlänge von $1.216 \cdot 10^{-7}$ m bzw. einer Frequenz von $2.47 \cdot 10^{15}$ Hz) im ultravioletten Bereich des elektromagnetischen Spektrums¹¹³. "Wald" von Absorptionslinien im Spektrum von Objekten mit hoher Rotverschiebung (v.a. Quasare) unterhalb der Lyman- α -Linie. Hervorgerufen durch intergalaktische Wasserstoffwolken. Die Zahl der Linien nimmt mit der Rotverschiebung zu. Aus ihrer Zahl und Dichte ergibt sich eine Bestätigung der kosmologischen Parameter.

Konsistent damit sind Beobachtungen der Dichtefluktuationen im späten Universum (Galaxienverteilung und Wachstum der Galaxienhaufen), Abschätzungen des Baryonenanteils in Galaxienhaufen und des Alters von Kugelsternhaufen. Je größer die erreichbaren Rotverschiebungen sind, umso mehr *cross checks* der kosmologischen Parameter und der Expansionsgeschichte des Universums ergeben sich (und sind auch in Zukunft zu erwarten).

Insbesondere wird sich mit dem Anlaufen der Experimente zum Nachweis von Gravitationswellen ein weiteres Fenster für astrophysikalische und kosmologische Beobachtungen auftun:

Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory (LIGO, USA)

GEO600 (Deutschland/Großbritannien)

Virgo (Frankreich/italien)

Laser Interferometer Space Antenna (LISA, NASA und ESA, geplanter Start: 2019)

Erwartungen/Hoffnungen: Gravitationswellen von stellaren und supermassiven Schwarzen Löchern und Supernovae, von Doppelsternsystemen und verschmelzenden Sternen und möglicherweise auch Gravitationswellen, die kurz nach dem Urknall erzeugt wurden und weiteren Aufschluss über die Struktur und Geschichte des Universums liefern könnten.

18 Die sehr frühe Phase – Probleme des Standardmodells und das inflationäre Universum

- **Das Horizontenproblem**

Die weitgehende Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung stellt ein Problem dar! Nach dem kosmologischen Standardmodell standen Hintergrundphotonen, die aus entgegengesetzten Richtungen kommen, nie in kausalem Kontakt. Ausweg:

¹¹³ Aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung handelt es sich um zwei benachbarte Linien, die den Zuständen $(n = 2, j = \frac{1}{2})$ und $(n = 2, j = \frac{3}{2})$ entsprechen.

inflationäre Phase des Universums (exponentielle Expansion).
Konformes Diagramm.

- **Das Flachheitsproblem**

Nach dem kosmologischen Standardmodell müsste die anfängliche Gesamtdichte des Universums extrem genau abgestimmt gewesen sein, ansonsten wäre das heutige Universum entweder schon in sich zusammengestürzt oder wesentlich größer (*fine tuning problem*). Die Inflation löst auch dieses Problem, indem sie kleine Raumgebiete extrem stark "aufbläst", wodurch das Universum nach der Inflation praktisch flach ist.

- **Inflation**

Erstes inflationäres Modell Alan H. Guth, 1981.

Beginn (je nach Modell): zwischen $t \approx t_P \approx 10^{-43}$ s und $t \approx 10^{-35}$ s.

Ende (je nach Modell): zwischen $t \approx 10^{-33}$ s und $t \approx 10^{-30}$ s.

Ausdehnung um einen Faktor zwischen 10^{30} und 10^{50} . Ursache (je nach Modell): Inflaton-Feld (dessen Dynamik einen Phasenübergang bewirkt), Zustandsgleichung eines "normalen" Quantenfeldes (analog zur Energiedichte des Vakuums)?

Frühe Strukturbildung: Aufblähung von Quantenfluktuationen auf astrophysikalische Größenordnungen! Dieses Szenario wird unterstützt durch die Form der Leistungsspektrums der kosmischen Hintergrundstrahlung (Peaks!)

Kosmologischer Ereignishorizont (im konformen Diagramm dadurch zu erkennen, dass die isotrope Zeit endlich ist)!

- **Quantenkosmologie – Entstehung des Universums aus dem Nichts?**

Zum Ausklang spekulieren wir noch, was *vor* der inflationären Phase passiert sein könnte. Quantisierung der Gravitation. Tunneleffekt "aus dem Nichts"? Schleifen-Quantengravitation? Diskrete Zeit? Vermeidung der Anfangssingularität? Raumzeit-Schaum?

Konstanten

Fundamentale Naturkonstanten:

$$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (18.1)$$

$$G = 6.67428 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2) \quad (18.2)$$

$$\hbar = 1.05457168 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s} \quad (18.3)$$

$$h = 2\pi\hbar = 6.62607 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s} \quad (18.4)$$

$$k = 1.3806505 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2/(\text{s}^2\text{K}) \quad (18.5)$$

$$\varepsilon_0 = 8.85418781762 \cdot 10^{-12} \text{ C}/(\text{V m}) \quad (18.6)$$

$$\mu_0 = (\varepsilon_0 c^2)^{-1} = 1.25664 \cdot 10^{-6} \text{ s}^2\text{V}/(\text{C m}) \quad (18.7)$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5.6704 \cdot 10^{-8} \text{ kg}/(\text{s}^3\text{K}^4) \quad (18.8)$$

$$m_e = 9.109534 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad (18.9)$$

$$m_p = 1.6726485 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (18.10)$$

$$m_n = 1.67482 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (18.11)$$

$$m_{\text{He-Kern}} = 6.64648 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (18.12)$$

$$e = 1.602176487 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (18.13)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx 0.00729735 \approx \frac{1}{137.036} \quad (\text{Feinstr.konst.}) \quad (18.14)$$

$$\alpha_G = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} \approx 5.9 \cdot 10^{-39} \quad (\text{Feinstr.konst. d. Gravitation}) \quad (18.15)$$

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c} \approx 2.42627 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (\text{Compton-Wellenl. d. } e^-) \quad (18.16)$$

$$\lambda_n = \frac{h}{m_n c} \approx 1.31968 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (\text{Compton-Wellenl. d. } n) \quad (18.17)$$

Erdbahn:

$$AE = 1.49597870691 \cdot 10^{11} \text{ m} \quad (\text{astronomische Einheit, ab 1976}) \quad (18.18)$$

$$a \approx 1.495979 \cdot 10^{11} \text{ m} \quad (\text{gro\ss e Halbachse}) \quad (18.19)$$

$$\bar{r} \approx 1.00014 a \quad (\text{mittlerer Abstand von der Sonne}) \quad (18.20)$$

$$\varepsilon \approx 0.0167 \quad (\text{numerische Exzentrizit\at}t) \quad (18.21)$$

Sonne:

$$M_{\odot} \approx 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad (18.22)$$

$$R_{\odot} \approx 6.957 \cdot 10^8 \text{ m} \quad (18.23)$$

$$R_{S,\odot} = \frac{2GM_{\odot}}{c^2} \approx 2.954 \cdot 10^3 \text{ m} \quad (\text{Schwarzschildradius}) \quad (18.24)$$

$$\langle \rho_{\odot} \rangle = 1.408 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad (18.25)$$

$$\rho_{\text{Zentrum},\odot} \approx 1.5 \cdot 10^5 \text{ kg/m}^3 \quad (18.26)$$

$$T_{\text{eff},\odot} \equiv T_{\text{Oberfl\acche},\odot} \approx 5778 \text{ K} \quad (18.27)$$

$$T_{\odot} \equiv T_{\text{Zentrum},\odot} \approx 1.56 \cdot 10^7 \text{ K} \quad (18.28)$$

$$S = 1367 \text{ W/m}^2 \quad (\text{Solarkonstante}) \quad (18.29)$$

$$P_{\odot} \approx 3.845 \cdot 10^{26} \text{ W} \quad (\text{Strahlungsleistung}) \quad (18.30)$$

$$\omega_{\odot} \approx 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \quad (\text{Rotationsperiode} \approx 26 \text{ Tage}) \quad (18.31)$$

$$\tau_{\odot} \approx 4.6 \cdot 10^9 \text{ Jahre} \quad (\text{Alter}) \quad (18.32)$$

Jupiter:

$$M_{\text{Jupiter}} \approx 1.899 \cdot 10^{27} \text{ kg} \approx 10^{-3} M_{\odot} \quad (18.33)$$

$$R_{\text{Jupiter}} \approx 7 \cdot 10^7 \text{ m} \approx 0.1 R_{\odot} \quad (18.34)$$

$$\langle \rho_{\text{Jupiter}} \rangle \approx 1.3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad (18.35)$$

Planck-Skala:

$$\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.61625 \cdot 10^{-35} \text{ m} \quad (18.36)$$

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = \frac{\ell_P}{c} = 5.39124 \cdot 10^{-44} \text{ s} \quad (18.37)$$

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \frac{\hbar}{\ell_P c} = 2.17644 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \quad (18.38)$$

$$\begin{aligned} E_P &= \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = m_P c^2 = 1.95608 \cdot 10^9 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 \\ &= 1.22088 \cdot 10^{28} \text{ eV} \end{aligned} \quad (18.39)$$

$$T_P = \frac{m_P c^2}{k} = 1.41678 \cdot 10^{32} \text{ K} \quad (18.40)$$

$$Q_P = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = 1.87555 \cdot 10^{-18} \text{ C} \quad (18.41)$$