Mathematische Grundlagen der Quantentheorie

Franz Embacher
Institut für Theoretische Physik

Unterlagen zur Lehrveranstaltung
Ausgewählte Probleme der Quantentheorie: Quantenalgorithmen
WS 2003/4

1 Hilbertraum und lineare Operatoren

Wir benötigen für unsere Zwecke nur Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden und beschränken uns daher auf Quantensysteme, die durch endlichdimensionale Hilberträume beschrieben werden.

Hilbertraum

Sei $\mathcal{H}$ der (n-dimensionale) Hilbertraum eines Quantensystems. Neben seiner Eigenschaft als Vektorraum über $\mathbf{C}$, dem Körper der komplexen Zahlen, trägt er eine für die Quantentheorie entscheidene Struktur: das **innere Produkt**. Für zwei Elemente $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ wird es als $\langle\phi|\psi\rangle$ angeschrieben. In der in der Quantentheorie üblichen Konvention ist es konjugiert linear in der ersten und linear in der ersten Stelle, d.h. für jede komplexe Zahl c und für beliebige ψ's und ϕ's in $\mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle\phi_1 + c\,\phi_2|\psi\rangle &= \langle\phi_1|\psi\rangle + c^\star\langle\phi_2|\psi\rangle \qquad (1.1)\\ \langle\phi|\psi_1 + c\,\psi_2\rangle &= \langle\phi|\psi_1\rangle + c\,\langle\phi|\psi_2\rangle. \qquad (1.2) \end{aligned}$$

Weiters gilt immer $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^\star$ sowie

$$||\psi||^2 \equiv \langle\psi|\psi\rangle \geq 0 \qquad (1.3)$$

($||\psi||$ heißt **Norm** von ψ) und

$$\langle\psi|\psi\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \psi = 0. \qquad (1.4)$$

ψ heißt **normiert** (oder Einheitsvektor), wenn $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ gilt. Weiters nennen wir ψ und ϕ zueinander **orthogonal**, wenn $\langle\phi|\psi\rangle = 0$ ist.

Besonders nützlich ist die folgende ("Bra-Ket"-)Schreibweise: Ein Element $\psi \in \mathcal{H}$ kann als "Ket", d.h. in der Form $|\psi\rangle$ angeschrieben werden, und der "Bra" $\langle\phi|$ bezeichnet jene lineare Abbildung, die jedem $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ die komplexe Zahl $\langle\phi|\psi\rangle$ zuordnet. Die Kombination $|\psi\rangle\langle\phi|$ stellt dann einen linearen Operator $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dar, der so wirkt:

$$|\chi\rangle \ \mapsto \ |\psi\rangle\langle\phi|\chi\rangle. \tag{1.5}$$

Damit können lineare Operatoren nach Art eines "Baukastensystems" bequem dargestellt werden. Der Sinn dieses Formalismus besteht hauptsächlich darin, Berechnungen auf die Auswertung innerer Produkte zurückzuführen. Beim Verwandeln eines "Ket" in einen "Bra" (und umgekehrt) muss ein allfälliger Vorfaktor komplex konjugiert werden: Ist $|\psi\rangle = c|\phi\rangle$, so ist $\langle\psi| = c^\star\langle\phi|$.

Jeder n-dimensinale Hilbertraum ist zu $\mathbf{C}^n$ isomorph. Ist $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ (d.h. $\langle e_j|e_k\rangle = \delta_{jk}\ \forall j,k$ – eine solche Basis existiert immer), so kann jedes $\phi \in \mathcal{H}$ in eindeutiger Weise als

$$|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j |e_j\rangle \tag{1.6}$$

geschrieben werden, woraus sich die Identifizierung

$$|\phi\rangle \in \mathcal{H} \ \longleftrightarrow \ a \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n \tag{1.7}$$

ergibt. Die Entwicklungskoeffizienten a_j ergeben sich, nach Bilden des inneren Produkts eines beliebigen Basiselements mit (1.6), zu

$$a_j = \langle e_j|\phi\rangle. \tag{1.8}$$

Ist $|\psi\rangle = \sum_{j=1}^n b_j|e_j\rangle$, so ist das innere Produkt von (1.6) mit $|\psi\rangle$ durch

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j^\star b_j \equiv a^\dagger b \tag{1.9}$$

gegeben, wobei die letzte Schreibweise eine Matrixmultiplikation darstellt. (Allgemein bezeichnen wir mit $A^\dagger$ die zu A adjungierte, d.h. transponierte und komplex konjugierte Matrix). Oft wird (ein bisschen schlampig)

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

und

$$\langle\phi| = (a_1^\star, a_2^\star, \dots a_n^\star) \tag{1.11}$$

geschrieben, d.h. der Übergang von einem "Ket" zu einem "Bra" (und umgekehrt) als Matrix-Adjunktion † aufgefasst.

- Beispiel: $n = 2$. Ein Quantensystem, das durch einen zweidimensionalen Hilbertraum beschrieben wird, heißt **Qubit**. Oft gibt es eine physikalisch bevorzugte Orthonormalbasis (wir nennen sie die Standardbasis), deren Elemente mit $|0\rangle$ und $|1\rangle$ (manchmal auch $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$, o.ä.) bezeichnet werden. Wir benutzen diese Basis, um $\mathcal{H}$ mit $\mathbf{C}^2$ zu identifizieren, schreiben also (wieder ein bisschen schlampig)

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Ein beliebiges $\phi \in \mathcal{H}$ kann dann entweder in der "abstrakten" Form

$$|\phi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle \tag{1.13}$$

oder als zweikomponentiger komplexer Spaltenvektor

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

geschrieben werden. Mit $\psi = b_0|0\rangle + b_1|1\rangle$ lässt sich das Rechnen im "Bra-Ket"-Formalismus üben. So ist $\langle\phi| = a_0^\star\langle 0| + a_1^\star\langle 1|$ und daher

$$\begin{aligned} \langle\phi|\psi\rangle &= \Big(a_0^\star\langle 0| + a_1^\star\langle 1|\Big)\Big(b_0|0\rangle + b_1|1\rangle\Big) \\ &= a_0^\star b_0\langle 0|0\rangle + a_0^\star b_1\langle 0|1\rangle + a_1^\star b_0\langle 1|0\rangle + a_1^\star b_1\langle 1|1\rangle \\ &= a_0^\star b_0 + a_1^\star b_1, \end{aligned} \tag{1.15}$$

wobei verwendet wurde, dass $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ eine Orthonormalbasis ist: $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$, $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$. Dasselbe Resultat ergibt sich natürlich auch in Matrixform:

$$\langle\phi|\psi\rangle = (a_0^\star, a_1^\star)\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = a_0^\star b_0 + a_1^\star b_1. \tag{1.16}$$

Übungsaufgabe: Man berechne die Norm von

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big). \tag{1.17}$$

Die normierten Elemente von $\mathcal{H}$ (d.h. alle $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\langle\psi|\psi\rangle = 1$) werden **Zustandsvektoren** genannt. Sie werden, wie der Name sagt, dazu benutzt, Zustände eines Quantensystems zu beschreiben. Mehr davon weiter unten.

Lineare Operatoren

Lineare Operatoren werden benutzt, um Observable (Messgrößen), Messvorgänge und gemischte Zustände (s.u.) zu beschreiben. Sei $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Bezüglich einer Orthonormalbasis $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ von $\mathcal{H}$ kann er in Form einer $n \times n$-Matrix dargestellt werden, die durch die Beziehung

$$A|e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}|e_k\rangle \tag{1.18}$$

definiert ist, und die wir der Einfachheit halber ebenfalls mit A bezeichnen wollen. Mit (1.10) ist

$$A|\phi\rangle = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Eine elegante Schreibweise für diesen Operator ist

$$A = \sum_{j,k=1}^{n} |e_j\rangle A_{jk}\langle e_k|. \tag{1.20}$$

Probe: $A|e_m\rangle = \sum_{j,k=1}^n |e_j\rangle A_{jk}\langle e_k|e_m\rangle = \sum_{j,k=1}^n |e_j\rangle A_{jk}\delta_{km} = \sum_{j=1}^n |e_j\rangle A_{jm}$, was genau (1.18) reproduziert. Die Komponenten ("Matrixelemente") sind durch die inneren Produkte

$$A_{jk} = \langle e_j|Ae_k\rangle \tag{1.21}$$

gegeben, wie unmittelbar aus (1.18) folgt. (Zur Schreibweise: Ein Ausdruck der Form $\langle\phi|A\psi\rangle$ wird manchmal auch als $\langle\phi|A|\psi\rangle$ geschrieben).

Die Matrix $A_{jk} = \delta_{jk}$ stellt den Einheitsoperator dar. Das entspricht der Tatsache, dass für jede Orthonormalbasis

$$\sum_{j=1}^{n} |e_j\rangle\langle e_j| = \mathbf{1} \tag{1.22}$$

gilt. Wird diese Identität auf ein $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ angewandt, so erhalten wir

$$|\phi\rangle = \sum_{j=1}^{n} |e_j\rangle\langle e_j|\phi\rangle, \tag{1.23}$$

was mit (1.6) und (1.8) übereinstimmt.

Ist A ein linearer Operator, $|\psi\rangle \neq 0$ und λ eine komplexe Zahl, so dass

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \tag{1.24}$$

gilt, so heißt $|\psi\rangle$ **Eigenvektor** von A zum **Eigenwert** λ. (1.24) heißt "Eigenwertgleichung". Zu einem gegebenen Eigenwert λ heißt $\{\psi \in \mathcal{H}|A\psi = \lambda\psi\}$ der **Eigenraum** zu λ. Er ist ein Teilraum von $\mathcal{H}$, und seine Dimension heißt die **Vielfachheit** von λ. Ein Eigenwert, dessen Vielfachkeit größer als 1 ist, heißt **entartet**. Die Menge aller Eigenwerte von A heißt **Spektrum** von A. Jeder lineare Operator besitzt höchstens n verschiedene Eigenwerte (d.h. sein Spektrum besitzt höchstens n Elemente).

Einige Typen von linearen Operatoren sind besonders wichtig:

- A heißt **invertierbar**, wenn es einen linearen Operator A^{-1} gibt, für den $A^{-1}A = \mathbf{1}$ gilt. A^{-1} ist der zu A **inverse Operator**, und es gilt dann auch $AA^{-1} = \mathbf{1}$. Weiters ist $(A^{-1})^{-1} = A$. A ist genau dann invertierbar, wenn alle Eigenwerte von 0 verschieden sind. Ist λ Eigenwert von A, so ist λ^{-1} Eigenwert von A^{-1} (zum selben Eigenvektor).

- Der zu A **hermitisch konjugierte Operator** $A^\dagger$ ist definiert durch $\langle\phi|A\psi\rangle = \langle A^\dagger\phi|\psi\rangle\ \forall\phi,\psi \in \mathcal{H}$. Seine Matrix ist die Adjungierte der Matrix von A, und es gilt $(A^\dagger)^\dagger = A$. Ist λ Eigenwert von A, so ist $\lambda^\star$ Eigenwert von $A^\dagger$.

- A heißt **hermitisch** (**selbstadjungiert**), wenn $\langle\phi|A\psi\rangle = \langle A\phi|\psi\rangle\ \forall\phi,\psi \in \mathcal{H}$, d.h. wenn $A^\dagger = A$. Alle Eigenwerte eines hermitischen Operators sind reell.

- A heißt **antihermitisch**, wenn $A^\dagger = -A$. Alle Eigenwerte eines antihermitischen Operators sind imaginär.

- U heißt **unitär**, wenn innere Produkte durch die Anwendung von U nicht verändert werden, d.h. wenn $\langle U\phi|U\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle\ \forall\phi,\psi \in \mathcal{H}$. Das ist genau dann der Fall, wenn $U^\dagger U = \mathbf{1}$ ist. Ein unitärer Operator ist invertierbar, und es gilt $U^{-1} = U^\dagger$. Alle Eigenwerte eines unitären Operators haben Betrag 1. Die Wirkung eines unitären Operators kann man sich als "Rotation" vorstellen.

- P heißt **Projektion** (oder **Projektor**), wenn $P^2 = P$ gilt. Wichtig sind die hermitischen (orthogonalen) Projektionen, die zusätzlich $P^\dagger = P$ erfüllen. Die orthogonale Projektion auf den von einem normierten Element $|\phi\rangle$ aufgespannten (eindimensionalen) Teilraum von $\mathcal{H}$ ist durch $P = |\phi\rangle\langle\phi|$ gegeben. Die orthogonale Projektion auf einen höherdimensionalen Teilraum von $\mathcal{H}$ ist $P = \sum_r |\phi_r\rangle\langle\phi_r|$, wobei die $|\phi_r\rangle$ eine Orthonormalbasis dieses Teilraums bilden. Eine Projektion kann nur 0 und 1 als Eigenwerte haben.

- A heißt **normal**, wenn es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A gibt. Die Matrix von A bezüglich dieser Basis ist dann diagonal. A ist genau dann normal, wenn $A^\dagger A = AA^\dagger$ gilt. Hermitische, antihermitische und unitäre Operatoren sind normal.

- A heißt **semi-positiv**, wenn $\langle\psi|A\psi\rangle \geq 0\ \forall\psi \in \mathcal{H}$. Man schreib dafür $A \geq 0$. Ein linearer Operator ist genau dann semi-positiv, wenn er hermitisch ist und alle seine Eigenwerte ≥ 0 sind.

Jeder normale Operator A kann in der Form (**Spektraldarstellung** oder **Spektralzerlegung**)

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \tag{1.25}$$

geschrieben werden, wobei die $|\psi_j\rangle$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren bilden und die λ_j Eigenwerte sind. Sie müssen nicht alle voneinander verschieden sein. Wenn einige λ_j gleich 0 sind, scheinen die entsprechenden Terme nicht in der Summe auf.

- Beispiel: Die Darstellung des Einheitsoperator (1.22) ist von dieser Form. Die gewählte Orthonormalbasis ist beliebig, da *jedes* $|\psi\rangle \neq 0$ Eigenvektor des Einheitsoperators ist. Der einzige Eigenwert ist 1.

- Beispiel: Die oben erwähnte orthogonale Projektion auf den von einem normierten Element $|\phi\rangle$ aufgespannten Teilraum, $P = |\phi\rangle\langle\phi|$, ist in dieser Form angeschrieben. Die Eigenwerte sind 1 und 0. $|\phi\rangle$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Jedes zu $|\phi\rangle$ orthogonale (und von 0 verschiedene) $|\psi\rangle$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 0.

- Beispiel: Die oben erwähnte Projektion auf einen höherdimensionalen Teilraum, $P = \sum_r |\phi_r\rangle\langle\phi_r|$, ist in dieser Form angeschrieben. Die Eigenwerte sind 1 und 0. Jedes $|\phi_r\rangle$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Jedes zu allen $|\phi_r\rangle$ orthogonale (und von 0 verschiedene) $|\psi\rangle$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 0.

- Beispiel: In $d = 2$ werden die Operatoren

$$\sigma_1 = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \tag{1.26}$$

$$\sigma_2 = -\,i\,|0\rangle\langle 1| + i\,|1\rangle\langle 0| \tag{1.27}$$

$$\sigma_3 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \tag{1.28}$$

oft benutzt. In Matrixform bezüglich der Standardbasis nehmen sie die Gestalt der **Paulischen Spinmatrizen** an:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

σ_3 liegt bereits in der Spektralform (1.25) vor. Seine Eigenwerte sind 1 und -1, die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren sind die Basisvektoren $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Die Spektraldarstellung von σ_1 lautet

$$\sigma_1 = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\,\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\,\frac{\langle 0| - \langle 1|}{\sqrt{2}}, \tag{1.30}$$

was leicht nachzurechnen ist (Übungsaufgabe). Daraus folgt, dass die Eigenwerte ± 1 und die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ sind. Schließlich gilt

$$\sigma_2 = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}\,\frac{\langle 0| - i\langle 1|}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}\,\frac{\langle 0| + i\langle 1|}{\sqrt{2}}. \tag{1.31}$$

Daher sind die Eigenwerte von σ_2 ebenfalls ± 1 und die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle)$. Man beachte, dass die zugehörigen "Bras" durch $\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| \mp i\langle 1|)$ gegeben sind.

Werden in (1.25) die Terme mit gleichem λ_j zusammengefasst, so entsteht mit

$$A = \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda} \tag{1.32}$$

eine alternative Schreibweise der Spektraldarstellung. Die Summe erstreckt sich über alle Eigenwerte, und P_{λ} ist die orthogonale Projektion auf den zu λ gehörigen Eigenraum. Diese Darstellung ist eindeutig, d.h. sie hängt im Unterschied zu (1.25) nicht von der Wahl einer Basis in jedem Eigenraum ab.

- Beispiel: Für den Einheitsoperator nimmt diese Darstellung die triviale Form $A = \mathbf{1}$ an.

- Beispiel in $n = 3$: Sei $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis und

$$A = 2|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + 3|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + 3|\psi_3\rangle\langle\psi_3|. \tag{1.33}$$

Diese Form entspricht (1.25). Die Eigenwerte sind 2 (nicht-entartet) und 3 (2-fach entartet). Mit den orthogonalen Projektionen

$$P_2 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \tag{1.34}$$
$$P_3 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_3\rangle\langle\psi_3| \tag{1.35}$$

auf die Eigenräume ergibt sich die (1.32) entsprechende Schreibweise

$$A = 2P_2 + 3P_3. \tag{1.36}$$

In Matrixform kann das so veranschaulicht werden:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Die Spektraldarstellung ist unter anderem nützlich bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ausgänge einer Messung.

Jeder lineare Operator A besitzt eine **Spur**. In der Matrixdarstellung (1.19) ist sie die Summe der Diagonalelemente

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{jj}. \tag{1.38}$$

Diese Größe hängt nicht von der verwendeten Basis ab. Eine andere Formel für sie ist

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j | A e_j \rangle, \tag{1.39}$$

wobei es wiederum auf die zur Berechnung verwendete Orthonormalbasis nicht ankommt. Die Spur kann auch als "Summe der Eigenwerte" verstanden werden, wobei aber jeder entartete Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit öfter gezählt werden muss. So ist etwa im Beispiel (1.37) die Spur von A durch $2 + 3 + 3 = 8$ gegeben. Für zwei lineare Operatoren A und B gilt

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA). \tag{1.40}$$

Ist A ein linearer Operator und $|\phi\rangle$ ein normiertes Element von $\mathcal{H}$, so gilt

$$\mathrm{Tr}(|\phi\rangle\langle\phi|A) = \langle\phi|A\phi\rangle. \tag{1.41}$$

Diese Formel (Spur über das Produkt einer "eindimensionalen orthogonalen Projektion" mit einem beliebigen Operator) ist für viele quantenmechanische Rechungen nützlich.

2 Zustände, Observable und Messungen

Was bedeuten die bisher besprochenen mathematischen Strukturen physikalisch?

Reine Zustände

Über weite Strecken kommt man mit folgender Interpretation des Formalismus aus: Ein Zustand wird durch einen Zustandsvektor, d.h. ein normiertes Element $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ beschrieben. Dabei handelt es sich um einen **reinen Zustand**, und es ist zu bedenken:

1. Zwei Zustandsvektoren, die sich nur um einen Phasenfaktor unterscheiden, ($|\phi\rangle$ und $e^{i\varphi}|\phi\rangle$, wobei φ reell ist) beschreiben denselben Zustand.

2. Es gibt auch andere ("gemischte") Zustände (die durch Dichtematrizen beschrieben werden, s.u.).

Observable (Messgrößen) werden durch hermitische lineare Operatoren dargestellt.

Superpositionsprinzip

In gewissem Sinn ist dieses Prinzip in unseren Formalismus fest eingebaut: Sind $|\phi_1\rangle$ und $|\phi_2\rangle$ Zustandsvektoren, so ist, für $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, die Linearkombination

$$|\phi_3\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle \tag{2.1}$$

wieder ein Zustandsvektor, beschreibt also einen möglichen Zustand des Systems.

Projektive Messung in reinen Zuständen

Befindet sich das System im Zustand $|\phi\rangle$, und wird eine Messung der Observablen A durchgeführt, so sind die möglichen Ergebnisse genau die Eigenwerte von A (die, da A hermitisch ist, immer reell sind). Die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert λ als Messresultat zu erhalten, ist durch

$$w_\lambda = \langle\phi|P_\lambda\phi\rangle \tag{2.2}$$

gegeben, wobei P_λ die orthogonale Projektion auf den zu λ gehörigen Eigenraum ist. Falls λ nicht-entartet ist, ist dieser Eigenraum eindimensional, und die Projektion darauf kann in der Form $P = |\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|$ geschrieben werden, wobei $|\psi_\lambda\rangle$ ein Eigenvektor zu λ ist. ($|\psi_\lambda\rangle$ ist in diesem Fall bis auf einen Phasenfaktor eindeutig). Dann vereinfacht sich (2.2) zu der bekannteren Formel

$$w_\lambda = |\langle\psi_\lambda|\phi\rangle|^2. \tag{2.3}$$

Wird die Observable A in vielen Kopien des Systems, die sich alle im gleichen Quantenzustand befinden, gemessen, so ist der Mittelwert der Messresultate

$$\overline{\lambda} = \sum_\lambda \lambda w_\lambda, \tag{2.4}$$

wobei sich die Summe über alle Eigenwerte von A erstreckt. Mit (2.2) und (1.32) wird dieser Ausdruck zu $\langle\phi|\sum_\lambda \lambda P_\lambda\phi\rangle = \langle\phi|A\phi\rangle$. Er heißt **Erwartungswert** der Observable A und wird in der Form

$$\langle A\rangle = \langle\phi|A\phi\rangle \tag{2.5}$$

angeschrieben. (Um zu betonen, dass es sich um den durch $|\phi\rangle$ beschriebenen Zustand handelt, kann man dafür auch $\langle A\rangle_\phi$ schreiben). Das Quadrat der Schwankung (Standardabweichung) der Messresultate ist durch

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 \tag{2.6}$$

gegeben. ΔA (auch als $\Delta_\phi A$ zu schreiben) wird in der Quantentheorie als **Unschärfe** bezeichnet. Ist $\Delta A = 0$, so ist $|\phi\rangle$ ein Eigenvektor von A, und der Ausgang der Messung liefert mit Sicherheit den entsprechenden Eigenwert. (Man sagt dann, dass A "einen scharfen Wert besitzt"). Die **Unschärferelation** (besser: **Unbestimmtheitsrelation**) besagt, dass für zwei Observable A und B stets die Ungleichung

$$\Delta A\,\Delta B \,\geq\, \frac{1}{2}\,|\langle[A,B]\rangle| \tag{2.7}$$

gilt, wobei $[A,B] = AB - BA$ der **Kommmutator** der beiden Operatoren ist. Ist er ungleich 0, so können nicht beide Observable scharfe Werte haben.

In welchem Zustand ist das System unmittelbar nach einer Messung (sofern es durch die Messung nicht zerstört oder sonstigen Einflüsse ausgesetzt wurde)? Falls der Wert λ gemessen wurde, wirkt sich die Messung wie eine orthogonale Projektion von $|\phi\rangle$ auf den Eigenraum von λ aus:

$$|\phi_{\mathrm{nach}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\phi|P_\lambda\phi\rangle}}\,P_\lambda|\phi\rangle, \tag{2.8}$$

wobei der Vorfaktor für die korrekte Normierung des neuen Zustandvektors sorgt. Jede weitere Messung derselben Observablen A wird mit Sicherheit denselben Messwert λ ergeben. Ist λ nicht-entartet, so existiert ein (bis auf einen Phasenfaktor eindeutiger) Eigenvektor $|\psi_\lambda\rangle$, und es ist $P_\lambda = |\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|$. In diesem Fall wird (2.8) zu

$$|\phi_{\mathrm{nach}}\rangle = c\,|\psi_\lambda\rangle, \tag{2.9}$$

wobei c ein Phasenfaktor ist (und daher ignoriert werden kann). Auf diese Weise ergibt sich die bekannte Aussage, dass sich das System nach der Messung im entsprechenden Eigenzustand befindet.

Messungen dieses Typs werden **projektive Messungen** (oder **von Neumann-**Messungen) genannt. Sie stellen den in der Praxis am häufigsten betrachteten, aber nicht den allgemeinsten Typ einer Messung an einem Quantensystem dar[1].

Man beachte, dass die Wahrscheinlichkeiten (2.2) bzw. (2.3) nur von der Struktur der Eigenräume von A abhängen, nicht aber von den Eigenwerten als solchen. Sind alle Eigenwerte nicht-entartet, und ist eine Orthonormalbasis $\{|\psi_j\rangle\}$ von Eigenvektoren gewählt, so kann die Messung als Zufallsentscheidung zugunsten eines dieser Eigenvektoren aufgefasst werden. Daher spricht man auch manchmal von der "Messung in einer Basis", wobei der zugehörige Operator gar nicht angegeben werden muss.

- Beispiel: In $n = 2$ ist eine "Messung in der Standardbasis" die Messung einer Observablen, deren (zwei) Eigenwerte voneinander verschieden (daher nicht-entartet) sind, und deren Eigenvektoren $|0\rangle$ und $|1\rangle$ sind. Am günstigsten stellt man sich dabei vor, dass es sich um eine Messung des Operators $N = |1\rangle\langle 1|$ handelt. Die Messwerte (Eigenwerte) 0 und 1 entsprechen den Eigenvektoren $|0\rangle$ und $|1\rangle$.

  Übungsaufgabe: Das System befinde sich in dem durch

$$|\phi\rangle = \text{const} \times (3|0\rangle + 4i|1\rangle). \tag{2.10}$$

  beschriebenen Zustand. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten werden bei einer Messung in der Standardbasis die Werte 0 und 1 auftreten?
  (Lösungen: $w_0 = (\frac{3}{5})^2$, $w_1 = (\frac{4}{5})^2$).

[1]Eine Verallgemeinerung bilden die so genannten POVMs, *positive operator valued measures*, auf die wir hier aber nicht eingehen.

Allgemeine Zustände und Dichtematrizen

Der allgemeinste Typ von Zuständen wird durch Dichtematrizen beschrieben. Eine **Dichtematrix** ist ein linearer Operator $\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit den Eigenschaften

1. $\rho \geq 0$ (d.h. $\rho^\dagger = \rho$ und alle Eigenwerte sind ≥ 0),
2. $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

Wird in einem Quantensystem, das sich im Zustand ρ befindet, die Observable A gemessen, so ist die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert λ zu erhalten, durch

$$w_\lambda = \mathrm{Tr}(\rho P_\lambda) \tag{2.11}$$

gegeben, wobei P_λ die orthogonale Projektion auf den zu λ gehörigen Eigenraum ist. Wird die Observable A in vielen Kopien des Systems, die sich alle im gleichen Quantenzustand ρ befinden, gemessen, so ist der Mittelwert der Messresultate (der Erwartungswert von A im Zustand ρ)

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}(\rho A). \tag{2.12}$$

Eine Dichtematrix, für die $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$ gilt, ist eine orthogonale Projektion auf einen eindimensionalen Teilraum. Sie hat daher immer die Form

$$\rho = |\phi\rangle\langle\phi| \tag{2.13}$$

für ein normiertes $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ und entspricht dem reinen Zustand, der durch den Zustandsvektor $|\phi\rangle$ beschrieben wird. Um das einzusehen, müssen wir nur (2.11) berechnen: Mit (1.41) ergibt sich $w_\lambda = \mathrm{Tr}(|\phi\rangle\langle\phi|P_\lambda) = \langle\phi|P_\lambda\phi\rangle$, was genau (2.2) ist. Der Erwartungswert (2.12) reduziert sich auf $\langle A \rangle = \langle\phi|A\phi\rangle$, d.h. auf (2.5). Diese Beschreibung von reinen Zuständen hat den Vorteil, eindeutig zu sein, denn im Gegensatz zum Zustandsvektor ist die Dichtematrix eindeutig: $|\phi'\rangle = e^{i\varphi}|\phi\rangle$ (für reelles φ) beschreibt denselben Zustand wie $|\phi\rangle$, aber es gilt $|\phi'\rangle\langle\phi'| = |\phi\rangle\langle\phi|$.

Gemischte Zustände

Eine Dichtematrix, für die $\mathrm{Tr}(\rho^2) \neq 1$ ist (es folgt dann $\mathrm{Tr}(\rho^2) < 1$) beschreibt einen **gemischten Zustand**. Sie lässt sich (auf viele verschiedene Weisen) in der Form

$$\rho = \sum_r p_r |\phi_r\rangle\langle\phi_r| \tag{2.14}$$

schreiben (wobei die $|\phi_r\rangle$ normiert, alle $p_r \geq 0$ sind und $\sum_r p_r = 1$ gilt). Ein in diesem Zustand befindliches System verhält sich so, als ob es mit Wahrscheinlichkeit p_r im reinen Zustand $|\phi_r\rangle\langle\phi_r|$ wäre. Daher rührt die Namensgebung: Dichtematrizen, für die $\mathrm{Tr}(\rho^2) < 1$ ist, beschreiben ein statistisches "Gemisch" (Ensemble) aus reinen Zuständen. Ein Beispiel für eine Darstellung vom Typ (2.14) ist die Spekralzerlegung von ρ (bei der die $|\phi_r\rangle$ eine Orthonormalbasis bilden).

- Beispiel: In $n = 2$ sei
$$\rho = \frac{1}{3}\,|0\rangle\langle 0| + \frac{2}{3}\,|1\rangle\langle 1|. \tag{2.15}$$
Ein System in diesem Zustand verhält sich so, als ob es mit Wahscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ im reinen Zustand $|0\rangle\langle 0|$ und mit Wahscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ im reinen Zustand $|1\rangle\langle 1|$ wäre. Wir können dieselbe Dichtematrix aber auch in der Form
$$\rho = \frac{1}{3}\,\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\,\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\,\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\,\frac{\langle 0| - \langle 1|}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\,|1\rangle\langle 1| \tag{2.16}$$
schreiben. (Übungsaufgabe: Rechnen Sie nach!) Das System verhält sich daher auch so, als ob es mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{3}$ in einem der drei durch die Zustandsvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ und $|1\rangle$ beschriebenen reinen Zustände wäre. Interessanterweise sind diese beiden Interpretationen physikalisch (d.h. durch Messungen) nicht zu unterscheiden.

Der "gemischteste" Zustand ist der **Spurzustand**
$$\rho = \frac{1}{n}\,\mathbf{1}. \tag{2.17}$$
In ihm ist der Ausgang von Messungen maximal unbestimmt.

Projektive Messung in allgemeinen Zuständen

Wird in einem allgemeinen Zustand ρ eine Observable A gemessen, so werden die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Messausgänge durch (2.11) beschrieben, der Erwartungswert ist durch (2.12) gegeben. Was bleibt, ist die Frage, in welchem Zustand sich das System (sofern es durch die Messung nicht zerstört oder sonstigen Einflüsse ausgesetzt wurde) unmittelbar nach der Messung befindet. Wie im Fall der reinen Zustände wirkt sich eine Messung wie eine Projektion aus: Ergab die Messung den Eigenwert λ, so ist das System danach im Zustand

$$\rho_{\text{nach}} = \frac{1}{\text{Tr}(\rho P_\lambda)} P_\lambda \rho P_\lambda, \tag{2.18}$$

wobei der Vorfaktor wie in (2.8) für die korrekte Normierung (die hier $\text{Tr}(\rho_{\text{nach}}) = 1$ lautet) sorgt. Wurde eine Messung durchgeführt, ist das Ergebnis aber nicht bekannt, so ist das System durch die Dichtematrix

$$\rho_{\text{nach}} = \sum_\lambda P_\lambda \rho P_\lambda, \tag{2.19}$$

zu beschreiben, wobei sich die Summe über alle Eigenwerte von A erstreckt. Dies ist insbesondere die *vor* der Messung gemachte Voraussage des Zustands *nach* der Messung. Sie entspricht einem statistischen Gemisch von Zuständen des Typs (2.18), da vor der Messung ja nicht bekannt ist, welches λ auftreten wird.

Wechselwirkung und Zeitentwicklung

Wechselwirkungen führen zu dazu, dass der Zustand eines Quantensystems sich mit der Zeit ändert. Sie werden beschrieben durch einen (hermitischen) Hamiltonoperator H_t, der selbst von der Zeit abhängen darf, und der im Fall eines reinen Zustands über die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi_t\rangle \;=\; H_t |\phi_t\rangle, \tag{2.20}$$

im Fall eines gemischten Zustands über die von Neumann-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_t \;=\; [H_t, \rho_t] \tag{2.21}$$

die zeitliche Entwicklung des Systems bestimmt. Der Zustand zur Zeit t_1 geht aus jenem zu einer früheren Zeit t_0 durch die Wirkung eines unitären Operators U_{t_1,t_0} hervor. (Man spricht daher auch von der "unitären Zeitentwicklung"). In Fall eines reinen Zustands ist

$$|\psi_{t_1}\rangle = U_{t_1,t_0} |\psi_{t_0}\rangle, \tag{2.22}$$

im Fall eines gemischten Zustands ist

$$\rho_{t_1} = U_{t_1,t_0} \rho_{t_0} U^\dagger_{t_1,t_0}. \tag{2.23}$$

Hängt H_t im Intervall $[t_0, t_1]$ nicht von der Zeit ab ($H_t \equiv H$), so ist

$$U_{t_1,t_0} = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_1-t_0)}. \tag{2.24}$$

Ist in diesem Zeitintervall $H_t = 0$, so ist $U_{t_1,t_0} = \mathbf{1}$. In der Quanteninformatik wird oft nur in kurzen Zeitintervallen eine Wechselwirkung "eingeschaltet". Die resultierende Zeitentwicklung wird dann durch die Wirkung einzelner unitärer Operatoren zu bestimmten Zeitpunkten beschrieben, während sich der Zustand dazwischen nicht ändert.

- Beispiel: In $n = 2$ ist durch

$$K|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big) \tag{2.25}$$

$$K|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle - |1\rangle\Big) \tag{2.26}$$

  ein unitärer Operator (die so genannte "Hadamard-Transformation") definiert. Physikalisch kann ihre Wirkung

$$|\phi\rangle_{\text{nach}} = K|\phi\rangle_{\text{vor}} \tag{2.27}$$

  beispielsweise durch einen Strahlteiler realisiert werden und entspricht einem für kurze Zeit nicht-verschwindenden Hamiltonoperator.

Dass die Zeitentwicklung (2.8) und (2.18) während eines Messprozesses nicht unitär ist, gibt Anlass zu anhaltenden erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten.

3 Alice und Bob

Tensorprodukt

In der Quanteninformation sind Systeme wichtig, die aus zwei oder mehr kinetisch unabhängigen (z.B. räumlich getrennten) Teilsystemen bestehen. Im Kontext von Quantencomputern heißen diese Teilsysteme "Register". Wir betrachten ein System, das aus zwei solchen Systemen zusammengesetzt ist (man kann dabei etwa an ein Teilchenpaar denken) und ordnen ihnen die Etiketten "Alice" und "Bob" zu. Jedes Teilsystem besitzt seinen eigenen Hilbertraum ($\mathcal{H}_{\text{Alice}}$ bzw. $\mathcal{H}_{\text{Bob}}$). Das Gesamtsystem wird durch das Tensorprodukt

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Alice}} \otimes \mathcal{H}_{\text{Bob}} \tag{3.1}$$

beschrieben. Mathematisch wird dieser Raum am einfachsten so charakterisiert: Ist $\{|e_j\rangle | j = 1, \ldots n_{\text{Alice}}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_{\text{Alice}}$ und $\{|f_k\rangle | j = 1, \ldots n_{\text{Bob}}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_{\text{Bob}}$, so bildet die Menge aller "symbolischen Produkte" $|e_j\rangle \otimes |f_j\rangle$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Das $\otimes$-Produkt ist mit der Hilbertraumstruktur verträglich, und es gelten Rechenregeln wie

$$\begin{aligned}
|\chi\rangle \otimes \Big(|\xi\rangle + c\,|\eta\rangle\Big) &= |\chi\rangle \otimes |\xi\rangle + c\,|\chi\rangle \otimes |\eta\rangle && (3.2)\\
\Big(|\chi\rangle + c\,|\zeta\rangle\Big) \otimes |\xi\rangle &= |\chi\rangle \otimes |\xi\rangle + c\,|\zeta\rangle \otimes |\xi\rangle && (3.3)\\
\langle \chi \otimes \zeta | \xi \otimes \eta\rangle &= \langle\chi|\xi\rangle\langle\zeta|\eta\rangle. && (3.4)
\end{aligned}$$

In der letzten Regel wurde die Schreibweise $|\xi \otimes \eta\rangle \equiv |\xi\rangle \otimes |\eta\rangle$ verwendet. Andere Schreibweisen für Tensorprodukte sind $|\xi\rangle_{\text{Alice}}|\eta\rangle_{\text{Bob}}$ oder einfach $|\xi\rangle|\eta\rangle$, wobei der erste Faktor zu Alices und der zweite zu Bobs Hilbertraum gehört.

- Beispiel: Sei $n_{\text{Alice}} = n_{\text{Bob}} = 2$. Sowohl Alice als auch Bob verwenden die Standardbasis ihres jeweiligen Hilbertraums. Mit $|01\rangle$ bezeichnen wir das Tensorprodukt $|0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |0\rangle_{\text{Alice}}|1\rangle_{\text{Bob}}$. Der berühmte EPR-Zustandsvektor ist

$$|\Psi_{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|01\rangle - |10\rangle\Big). \tag{3.5}$$

Übungsaufgabe: Man überprüfe, dass $|\Psi_{\text{EPR}}\rangle$ normiert ist.

Wenn Alice und Bob (unabhängig voneinander) Messungen in ihrer Standardbasis durchführen, können die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Messausgänge (sie entsprechen den Elementen der Orthonormalbasis

$$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\} \tag{3.6}$$

von $\mathcal{H}$) durch Anwendung der obigen Formel (2.3) berechnet werden. Unter Verwendung der Rechenregel (3.4) ergibt sich

$$\begin{aligned} w_{00} &= |\langle 00|\Psi_{\mathrm{EPR}}\rangle|^2 = 0 && (3.7)\\ w_{01} &= |\langle 01|\Psi_{\mathrm{EPR}}\rangle|^2 = \frac{1}{2} && (3.8)\\ w_{10} &= |\langle 10|\Psi_{\mathrm{EPR}}\rangle|^2 = \frac{1}{2} && (3.9)\\ w_{11} &= |\langle 11|\Psi_{\mathrm{EPR}}\rangle|^2 = 0. && (3.10) \end{aligned}$$

Für Alice und Bob können jeweils beide Messwerte (0 oder 1) auftreten. Allerdings sind diese Werte korreliert: Mißt Alice 0 (bzw. 1), so misst Bob 1 (bzw. 0).

Das EPR-Paradoxon ergibt sich, wenn Alice und Bob auch Messungen in anderen Basen durchführen können. Darauf wollen wir hier aber nicht eingehen.

Partielle Spur

Wird das Gesamtsystem durch die Dichtematrix ρ auf $\mathcal{H}$ beschrieben, so verhält sich Alices Teilsystem unter beliebigen Messungen entsprechend der in $\mathcal{H}_{\mathrm{Alice}}$ wirkenden Dichtematrix

$$\rho_{\mathrm{Alice}} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{Bob}}(\rho). \tag{3.11}$$

Dabei ist $\mathrm{Tr}_{\mathrm{Bob}}(\rho)$ die **partielle Spur** über Bobs Teilsystem. Ist $\{|f_k\rangle\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_{\mathrm{Bob}}$, so ist sie durch

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{Bob}}(\rho) = \sum_k {}_{\mathrm{Bob}}\langle f_k|\rho|f_k\rangle_{\mathrm{Bob}} \tag{3.12}$$

gegeben. Von der Bildung der in dieser Formel vorkommenden inneren Produkte in $\mathcal{H}_{\mathrm{Bob}}$ werden die Elemente von $\mathcal{H}_{\mathrm{Alice}}$ nicht berührt. Ein Ausdruck wie

$${}_{\mathrm{Bob}}\langle\zeta|\Big(|\xi\rangle_{\mathrm{Alice}}|\eta\rangle_{\mathrm{Bob}}\Big) \tag{3.13}$$

vereinfacht sich demgemäß zum Produkt der komplexen Zahl $\langle\zeta|\eta\rangle$ (die ganz innerhalb von $\mathcal{H}_{\text{Bob}}$ berechnet wird) mit $|\xi\rangle_{\text{Alice}}$.

Das Bilden der partiellen Spur entspricht dem Ignorieren von Bobs Teilsystem. Es wird manchmal als TOU (*trace over unobservables*) bezeichnet. Eine ähnliche Situation tritt auf, wenn ein großes System Freiheitgrade enthält, die nicht beobachtet werden können, aber mit dem beobachteten Teilsystem wechselwirken[2].

- Übungsaufgabe: Man berechne ρ_{Alice} und ρ_{Bob} für den EPR-Zustand (3.5) (der durch die Dichtematrix $\rho = |\Psi_{\text{EPR}}\rangle\langle\Psi_{\text{EPR}}|$ beschrieben werden kann).
- Übungsaufgabe: Alice macht im EPR-Zustand eine Messung in der Standardbasis und erhält den Messwert 0. In welchem Zustand ist das Gesamtsystem unmittelbar danach?

Separabilität und Verschränkung

Ein Zustand ρ des Gesamtsystems heißt **unkorreliert**, wenn er als Tensorprodukt

$$\rho = \rho_{\text{Alice}} \otimes \rho_{\text{Bob}} \tag{3.14}$$

geschrieben werden kann, wobei ρ_{Alice} und ρ_{Bob} Dichtematrizen in Alices und Bobs Teilsystemen sind. Ein Zustand heißt **separabel** oder **klassisch korreliert**, wenn er in der Form

$$\rho = \sum_r p_r \rho_{r,\text{Alice}} \otimes \rho_{r,\text{Bob}} \tag{3.15}$$

mit $p_r \geq 0$, $\sum_r p_r = 1$ (d.h. als statistisches Gemisch unkorrelierter Zustände) geschrieben werden kann. Ist das nicht der Fall, heißt er **verschränkt**. Ein Beispiel für einen verschränkten Zustand ist (3.5).

Stehen Alice und Bob viele Kopien des Systems, die sich alle im gleichen Quantenzustand ρ befinden, zur Verfügung, und ist ρ klassisch korreliert, so sind alle Korrelationen in den Messdaten, die Alice und Bob unabhängig voneinander erhalten, klassischer (nicht-quantenmechanischer) Natur: Sie sind unter der Annahme

[2] Diese Betrachtungsweise führt auf den Begriff der Dekohärenz, auf den wir hier aber nicht eingehen.

erklärbar, dass sich jedes Teilsystem im Zeitpunkt der Messung in einem individuellen (möglicherweise unbekannten) Quantenzustand befindet, also ein vom anderen Teilsystem unabhängiges Verhalten aufweist. Eine derartige Erklärung von Korrelationen heißt "lokal-realistisch" (oder "Modell lokaler verborgener Parameter"). Für den EPR-Zustand ist eine derartige Erklärung der Korrelationen unmöglich. Man spricht daher auch von "Quanten-Nichtlokalität". Die genauere Analyse dieses Verhaltens führt auf die Bellschen Ungleichungen, auf die wir hier nicht eingehen.