Einführung in die Bohmsche Interpretation der Quantenmechanik

Ausgewählte Probleme der Quantentheorie

Ing. Gerd Ch. Krizek

31. Jänner 2006

Abstract:

Die Bohmsche Interpretation ist eine alternative Interpretation der Quantenmechanik, die Interpretationsprobleme der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik umgeht. So soll in dieser Arbeit eine kurze Einführung in die bohmschen Ansatz gegeben werden. Ausgehend vom Einteilchenproblem ohne Spin, dass im Rahmen der bohmschen Interpretation sehr überzeugend ist, wird auch der Spin betrachtet sowie eine relativistische Verallgemeinerung.

I. Grundlagen

Die Bohmsche Mechanik ist keine neue Theorie, sondern benutzt dieselben quantenmechanischen Grundlagen wie die Kopenhagener Deutung, insbesondere die Schrödingergleichung.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(x)\psi$$

Indem man einen Ansatz für die Wellenfunktion in die Schrödingergleichung einsetzt, kann man eine neue Darstellung für die Schrödingergleichung finden:

Man benutzt die Polardarstellung der Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = R(x,t)e^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)}$$

wobei R und S reelle Funktionen sind und $R = |\psi|$ gilt.
Setzt man dies in die Schrödingergleichung ein erhält man:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(R e^{\frac{i}{\hbar}S}\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\left(R e^{\frac{i}{\hbar}S}\right)+V(x)\left(R e^{\frac{i}{\hbar}S}\right)$$

Die zwei reellen Funktionen R,S hängen aber von x und t ab, daher gilt:

$$i\hbar\frac{\partial R}{\partial t}e^{\frac{i}{\hbar}S}+i\hbar\frac{i}{\hbar}R e^{\frac{i}{\hbar}S}\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\left(\nabla R e^{\frac{i}{\hbar}S}+\frac{i}{\hbar}R e^{\frac{i}{\hbar}S}\nabla S\right)+V(x)\left(R e^{\frac{i}{\hbar}S}\right)$$

Die weitere Gradientenbildung liefert

$$i\hbar\frac{\partial R}{\partial t}e^{\frac{i}{\hbar}S}+i\hbar\frac{i}{\hbar}R e^{\frac{i}{\hbar}S}\frac{\partial S}{\partial t}=$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2 R e^{\frac{i}{\hbar}S}+\frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}S}\nabla R\nabla S+\frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}S}\nabla S\nabla R+\frac{i^2}{\hbar^2}R e^{\frac{i}{\hbar}S}\nabla S\nabla S+\frac{i}{\hbar}R e^{\frac{i}{\hbar}S}\nabla^2 S\right)+V(x)\left(R e^{\frac{i}{\hbar}S}\right)$$

Eine Aufspaltung in Real- und Imaginärteil liefert:

$$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{1}{2m}\left(R\nabla^2 S+2\nabla R\nabla S\right) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{(\nabla S)^2}{2m}+V(x)-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R} \qquad (2)$$

I.1 Herleitung des Quantenpotentials

Gleichung (2) ist der Hamilton-Jacobi Gleichung aus der klassischen Mechanik sehr ähnlich, und unterscheidet sich nur durch den Term

$$Q=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}$$

den wir in Folge als Quantenpotential auffassen wollen. Damit ist diese Gleichung einfach die Hamilton-Jacobi Gleichung mit einem Zusatz-Potentialterm der nur bei Quantenphänomenen auftritt.

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{(\nabla S)^2}{2m}+V(x)+Q$$

I.2 Wahrscheinlichkeitserhaltung

Wir wollen Gleichung (1) durch Umformung näher analysieren:

Zuerst erhalten wir

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(R\nabla^2 S + 2\nabla R \nabla S\right)$$

Durch Auflösung der Klammer und Erweitern mit R auf der rechten Seite erhält man:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\frac{R^2\nabla^2 S}{R} - \frac{2R\nabla R\nabla S}{2mR}$$

Für die reelle Größe R gilt: $R^2 = \left|\psi\psi^*\right| = \varphi$

Wir wollen eine Relation für die Wahrscheinlichkeitsdichte φ, daher bilden wir folgende Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial t}R^2 = 2R\frac{\partial R}{\partial t}$$

Wir formen um und erhalten:

$$2R\frac{\partial R}{\partial t} = -R^2\frac{\nabla^2 S}{m} - \frac{2R\nabla R\nabla S}{m}$$

Mit der Produktregel des Gradienten und obiger Beziehung formen wir um:

$$\frac{\partial}{\partial t}R^2 = -\frac{1}{m}\nabla\left(R^2\nabla S\right)$$

Mit $R^2 = r$ erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial t}r = -\nabla\left(\frac{R^2\nabla S}{m}\right)$$

Jetzt fehlt uns noch die Interpretation des Termes $\frac{R^2\nabla S}{m}$:

Aus der Schrödingergleichung kann man für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte folgende Formel herleiten:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right]$$

Setzt man in diese Wahrscheinlichkeitsstromdichte die Polardarstellung $\psi(x,t) = R(x,t)e^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)}$ ein, so erhält man

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left[R e^{\frac{i}{\hbar}S}\left(\nabla R e^{-\frac{i}{\hbar}S} - \frac{i}{\hbar} R e^{-\frac{i}{\hbar}S} \nabla S \right) - R e^{-\frac{i}{\hbar}S}\left(\nabla R e^{\frac{i}{\hbar}S} + \frac{i}{\hbar} R e^{\frac{i}{\hbar}S} \nabla S \right) \right]$$

Die meisten Terme fallen weg. Übrig bleibt nur:

$$\vec{j} = \frac{R^2 \nabla S}{m}$$

Dies ist aber genau unser gesuchter Ausdruck und wir können schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t} r = -\nabla\left(\vec{j}\right)$$

Oder auch die besser bekannte Form der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} r + div\, \vec{j} = 0$$

I.3 Zusammenfassung:

Aus der Schrödingergleichung leiten wir eine Gleichung ab die sich in Realteil und Imaginärteil zerlegen lässt.

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{t}} = -\frac{1}{2\mathrm{m}}\left(\mathrm{R}\nabla^2\mathrm{S} + 2\nabla\mathrm{R}\nabla\mathrm{S}\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}$$

Der Realteil ist die Hamiltion-Jacobi-Gleichung mit dem neuen Quantenpotential. Der Imaginärteil ist die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit,

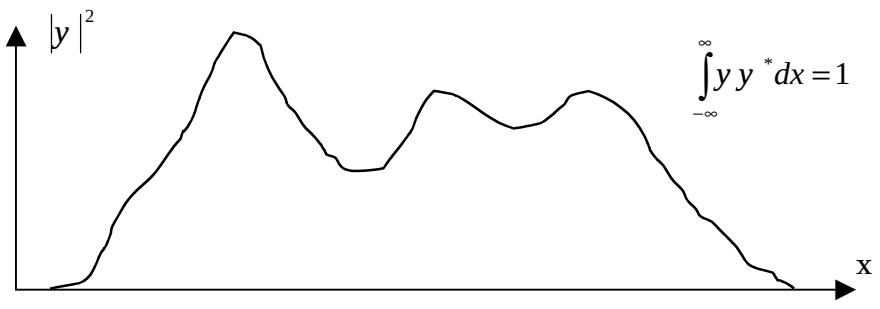
Realteil	Imaginärteil
$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(x) + Q$	$\frac{\partial}{\partial t} r + div\,\vec{j} = 0$

I.4 Anschauliche Herleitung:

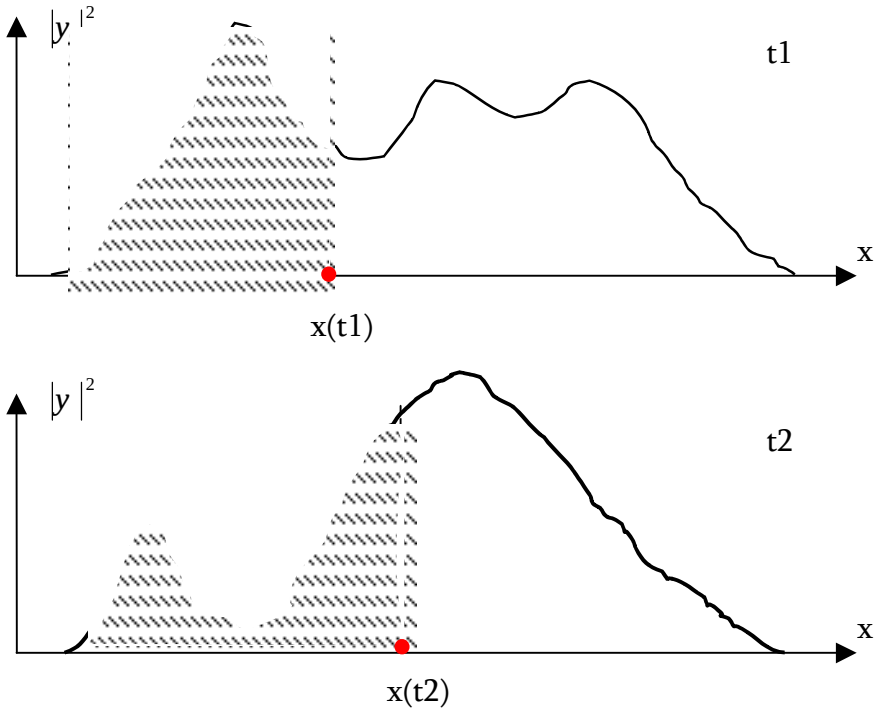
Es gibt eine zweite sehr anschauliche Möglichkeit die Bohmsche Interpretation herzuleiten:

Wir betrachten zunächst eine gegebene Wellenfunktion zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die Wellenfunktion muß normiert sein. Das bedeutet es gilt für Ψ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\, y^{*} dx = 1$$



Wir suchen nun nach einer Definition für etwas das man als Teilchenbahn interpretieren könnte. Dazu teilen wir die Fläche unter der Kurve der Wahrscheinlichkeitsdichte in zwei Teile. Die Gesamtfläche ist ja konstant, bei Normierung 1. Durch die Teilung wird ein Ort x definiert. Zu einem späteren Zeitpunkt wollen wir dass die Fläche unter der Kurve gleich bleibt, auch wenn sich die Form der Kurve, also die Wahrscheinlichkeitsverteilung, ändert. Der Ort x zu dem späteren Zeitpunkt ist jetzt gerade wieder durch die gleichgebliebene Fläche unter der Kurve definiert.
Führen wir dies für alle Zeiten durch erhalten wir eine Trajektorie. Diese Trajektorie, so behaupten wir jetzt ist die Teilchenbahn eines Teilchens mit der Anfangsbedingung x(t1). Wenn wir ein Teilchen zum Zeitpunkt t2 am Ort x(t2) messen, kennen wir die Bahn auf der es zu diesem Ort gelangt ist.



Die eben angeführten Überlegungen wollen wir in Formeln fassen und sehen, ob wir eine Gleichung für die Trajektorien finden können.

Wir wissen, dass folgende Relation gilt:

$$\int_{-\infty}^{x(t)} y\,(x',t)\,y^{*}(x',t)\,dx' + \int_{x(t)}^{\infty} y\,(x',t)\,y^{*}(x',t)\,dx' = 1$$

Die Summe unter beiden Flächen muß 1 sein. Wir verlangen nun, dass die Fläche sich nicht mit der Zeit ändern darf.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{x(t)} y\,(x',t)\,y^{*}(x',t)\,dx' \right) = 0$$

Wir ziehen die Zeitableitung nun in das Integral und erhalten:

$$\int_{-\infty}^{x(t)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} y\,(x',t) \right) y^{*}(x',t) + y\,(x',t) \left(\frac{\partial}{\partial t} y^{*}(x',t) \right) \right] dx' + \dot{x}\,y^{*}(x,t)\,y\,(x,t) = 0$$

Indem wir jetzt die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial y}{\partial t} = Hy = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x) \right) y$$

$$-i\hbar \frac{\partial y^{*}}{\partial t} = Hy^{*} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x) \right) y^{*}$$

einsetzt erhält man:

$$\int_{-\infty}^{x(t)} \left[\frac{H\,y\,(x',t)}{i\hbar} y^{*}(x',t) + y\,(x',t) \frac{H\,y^{*}(x',t)}{-i\hbar} \right] dx' + \dot{x}\,y^{*}(x,t)\,y\,(x,t) = 0$$

und wenn wir den Hamilton explizit ausdrücken:

$$\int_{-\infty}^{x(t)} \left[\begin{array}{l} \dfrac{-\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} y\,(x',t) \right)}{i\hbar} y^{*}(x',t) + y\,(x',t) \dfrac{-\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} y^{*}(x',t) \right)}{-i\hbar} \\ + \dfrac{V(x)\,y\,(x',t)\,y^{*}(x',t)}{i\hbar} - \dfrac{V(x)\,y\,(x',t)\,y^{*}(x',t)}{i\hbar} \end{array} \right] dx' + \dot{x}\,y^{*}(x,t)\,y\,(x,t) = 0$$

Die letzten zwei Terme fallen weg und wir erhalten:

$$\int_{-\infty}^{x(t)} \left[\frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y\,(x',t) \right) y^{*}(x',t) - y\,(x',t) \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y^{*}(x',t) \right) \right] dx' + \dot{x}\,y^{*}(x,t)\,y\,(x,t) = 0$$

Mit folgender Umformung erreichen wir eine andere Darstellung.

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'}y\left(x',t\right)\right)y^{*}(x',t)-y\left(x',t\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'}y^{*}(x',t)\right)\right]=$$
$$\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x'^{2}}y\left(x',t\right)\right)y^{*}(x',t)-y\left(x',t\right)\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x'^{2}}y^{*}(x',t)\right)$$

$$\frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{x(t)}\frac{\partial}{\partial x'}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'}y\left(x',t\right)\right)y^{*}(x',t)-y\left(x',t\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'}y^{*}(x',t)\right)\right]dx'+\dot{x}y^{*}(x,t)y\left(x,t\right)=0$$

und erhalten:

$$\frac{i\hbar}{2m}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}y\left(x,t\right)\right)y^{*}(x,t)-y\left(x,t\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}y^{*}(x,t)\right)\right]+\dot{x}y^{*}(x,t)y\left(x,t\right)=0$$

Damit erhält man eine Differentialgleichung für die Trajektorien die wie folgt aussieht:

$$\boxed{\dot{x}(t)=-\frac{i\hbar}{2m}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}y\left(x,t\right)\right)y^{*}(x,t)-y\left(x,t\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}y^{*}(x,t)\right)}{y^{*}(x,t)y\left(x,t\right)}}$$

Diese Gleichung nennt man auch die Leitgleichung.

I.5 Zusammenhang der anschaulichen Herleitung mit dem mathematischen Formalismus:

Wir haben jetzt die Leitgleichung aus anschaulichen Überlegungen gewonnen. Lässt sich die Leitgleichung auch aus dem mathematischen Formalismus gewinnen mit dem wir vorher Bohmsche Quantenmechanik begründet haben?

Wenn wir den Realteil der in I.2 gewonnenen Gleichung als Hamilton-Jacobi Gleichung interpretieren und damit S als Wirkung interpretieren, so können wir die Bewegungsgleichung aus der Wirkungsfunktion mit folgender Relation erhalten:

$$\dot{x}=\frac{\nabla S}{m}$$

Ist dies aber identisch mit der Leitgleichung? Wenn wir den Ansatz der Wellenfunktion in Polardarstellung in die anschaulich gewonnene Leitgleichung einsetzen erhalten wir folgendes:

$$\dot{x}(t) = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{Re^{-\frac{i}{\hbar}S}\nabla\left(Re^{\frac{i}{\hbar}S}\right) - Re^{\frac{i}{\hbar}S}\nabla\left(Re^{-\frac{i}{\hbar}S}\right)}{Re^{\frac{i}{\hbar}S}Re^{-\frac{i}{\hbar}S}}$$

Man erhält:

$$\dot{x}(t) = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\nabla R e^{\frac{i}{\hbar}S}e^{-\frac{i}{\hbar}S} + R\frac{i}{\hbar}\nabla S\, e^{\frac{i}{\hbar}S}e^{-\frac{i}{\hbar}S} - \nabla \mathrm{Re}^{-\frac{i}{\hbar}S}e^{\frac{i}{\hbar}S} + R\frac{i}{\hbar}\nabla S\, e^{-\frac{i}{\hbar}S}e^{\frac{i}{\hbar}S}}{R}$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{2R\frac{i}{\hbar}\nabla S}{R} = \frac{\nabla S}{m}$$

Wie man sieht ist die anschaulich gewonnene Leitgleichung identisch mit der aus dem mathematischen Formalismus gewonnenen Bewegungsgleichung. Unsere anschauliche Methode Teilchenbahnen zu finden ist konsistent mit dem mathematischen Formalismus.

II. Betrachtung des Spins

Einführend muß man hier ganz klar sagen, dass hier nur ein Abriss der Überlegungen zur Behandlung des Spins im Rahmen der Bohmschen Interpretation der Quantenmechanik gegeben werden kann. Die Berücksichtigung des Spin-Freiheitsgrades lässt zwar eine Behandlung im Rahmen der Bohmschen Interpretation zu, hat aber nicht mehr die übetzeugende Stärke wie im Falle der Einteilchen-Schrödingergleichung.

Ausgehend von der Pauli-Gleichung haben wir also:

$$i\hbar\frac{\partial y}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c}A\right)^2 + m\,B\cdot s\, + eA_0 + V(x)\right]y$$

Für die Wellenfunktion macht man einen ähnlichen Ansatz wie schon bei der Einteilchen-Schrödingergleichung:

$$y^{\,a}(x,t) = R^a(x,t)e^{\frac{i}{\hbar}S^a(x,t)}$$

Hier wird dem Spin-Freiheitsgrad Rechnung getragen, da wir es jetzt mit Spinoren zu tun haben. Eine Schreibweise die für eine weitere Behandlung besser mit dem Einteilchen-Schrödingergleichung verträglich ist:

$$y^{a}(x,t) = R(x,t)e^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)}j^{a}$$

Wir haben alle Spin-Eigenschaften in die j^{a} gelegt mit:

$$j^{a} = r^{a}e^{\frac{i}{\hbar}s^{a}} \text{ und } j^{+}j = r^{+}r = 1 \text{ und } \frac{1}{2}\left(s^{1} + s^{2}\right) = 0$$

Um zu einer Hamilton-Jacobi-artigen Gleichung zu kommen kontrahieren wir die Pauli-Gleichung mit y^{+} und spalten in Real- und Imaginärteil auf.

Wir erhalten zwei reelle Gleichungen:

$$\frac{\partial S}{\partial t} - i\hbar j^{+}\frac{\partial j}{\partial t} + \frac{1}{2}mv^{2} + Q + Q_{s} + \left(\frac{2m}{\hbar}\right)B \cdot s + eA_{0} + V = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(R^{2}\right) + div\,\vec{j} = 0$$

mit

$$v = \frac{\hbar}{2miR^{2}}\left[y^{+}\nabla y - \left(\nabla y^{+}\right)y\right] - \frac{e}{mc}A$$

$$Q = -\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\nabla R}{R}$$

$$Q_{s} = \frac{1}{2m}\partial_{i}s_{j}\partial_{j}s_{i}$$

Man fasst nun die erste Gleichung als Hamilton-Jacobi Gleichung mit einigen Zusatz-Termen auf, dem üblichen Quantenpotential, einem Quantenpotential für den Spin-Anteil sowie einigen Termen die aus den Spin-Eigenschaften resultieren.

Für die Energie des Teilchens setzt man an:

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t} + i\hbar j^{+}\frac{\partial j}{\partial t}$$

Für die Trajektorien hat man nun folgende Gleichung, die das Analogon zur Leitgleichung ist:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v = \frac{\hbar}{2miR^2}\left[y^{+}\nabla y - \left(\nabla y^{+}\right)y\right] - \frac{e}{mc}A$$

Wie man schon auf den ersten Blick sieht ist der mathematische Apparat angewachsen und erschwert die Rechnung, sowie eine einfache übersichtliche Behandlung. Anwendungen dieser Theorie finden sich aber zum Beispiel bei Rauch der Trajektorien für die Neutronen-Interferometrie angibt.

III. Relativistische Verallgemeinerung

Wie schon im Falle des Spins wird hier nur ein kleiner Einblick gegeben, da eine vollständige Diskussion den Rahmen bei weitem sprengen würde. Es soll am Beispiel der Klein-Gordon Gleichung gezeigt werden wie eine bohmsche Interpretation im relativistischen Fall angesetzt wird und welche Probleme auftreten.

Ausgehend von der Klein-Gordon Gleichung werden wir wieder einen Ansatz für die Lösung der Wellenfunktion machen und in Real- und Imaginärteil aufspalten:

$$\left[\partial_m \partial^m + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] f(x) = 0$$

$$f(x) = R(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}$$

Einsetzen des Ansatzes bringt uns zu:

$$\partial_m\left(e^{\frac{i}{\hbar}S}\partial^m R + \frac{iR}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}S}\partial^m S\right) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 f = 0$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}S}\partial_m\partial^m R + \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}S}\partial_m S\,\partial^m R + \frac{iR}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}S}\partial_m\partial^m S + \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}S}\partial_m R\,\partial^m S$$

$$-\frac{R}{\hbar^2}e^{\frac{i}{\hbar}S}\partial_m S\,\partial^m S + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 f = 0$$

In Real- und Imaginärteil aufgespaltet bringt uns dies zu zwei reellen Gleichungen:

$$\partial_m \partial^m R - \frac{R}{\hbar^2}\partial_m S \partial^m S + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 R = 0$$

und

$$\partial_m S \partial^m R + R\partial_m \partial^m S + \partial_m R \partial^m S = 0$$

Die erste Gleichung können wir wieder als eine Hamilton-Jacobi Gleichung interpretieren und durch Umformung auf folgende Form bringen:

$$-\frac{\partial_m S \partial^m S}{m} + \frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial_m \partial^m R}{R} + mc^2 = 0$$

Für die zweite Gleichung kann man zeigen, dass es sich um die Kontinuitätsgleichung handelt:

$$\partial_m S \partial^m R + R\partial_m \partial^m S + \partial_m R \partial^m S = 0$$

Der erste und letzte Term sind ident. Man kann also schreiben:

$$2\partial_m R \partial^m S + R\partial_m \partial^m S = 0$$

Mit Hilfe der Relation $R^2 \partial_m \partial^m S = \partial_m \left(R^2 \partial^m S\right) - 2\partial_m R \partial^m S$ schreibt man:

$$\partial_m \left(R^2 \partial^m S\right) = 0 \text{ bzw.}$$

$$\partial_m \left(R^2 \frac{\partial^m S}{m}\right) = \partial_m j^m = 0$$

Hiermit haben wir die Kontinuitätsgleichung für die Klein-Gordon Gleichung gefunden.
Auf den ersten Blick wirkt das schon sehr erfreulich. Die Probleme liegen jetzt aber in der Interpretation. j^0 ist indefinit und erlaubt damit keine Wahrscheinlichkeitsinterpretation. j^m muß nicht notwendigerweise zeitartig sein. Dies bringt ebenfalls Probleme mit der Interpretation, die genauer in [2]behandelt sind.

IV. Literatur:

[1] „The undivides universe“
D. Bohm and B.J.Hiley
Routledge ISBN 0-415-06588-7

[2] „The quantum theory of motion“
Peter Holland
Cambridge Univ. Press

[3] „Quantum Mechanics“
James T.Cushing
The university of Chicago press

[4] „Bohmsche Mechanik als Grundlage der Quantenmechanik“
Detlef Dürr
Springer Verlag

[5] „Philosophical concepts in physics“
James T.Cushing
Cambridge Univ. Press