Einführung in die Quantenteleportation

Franz Embacher

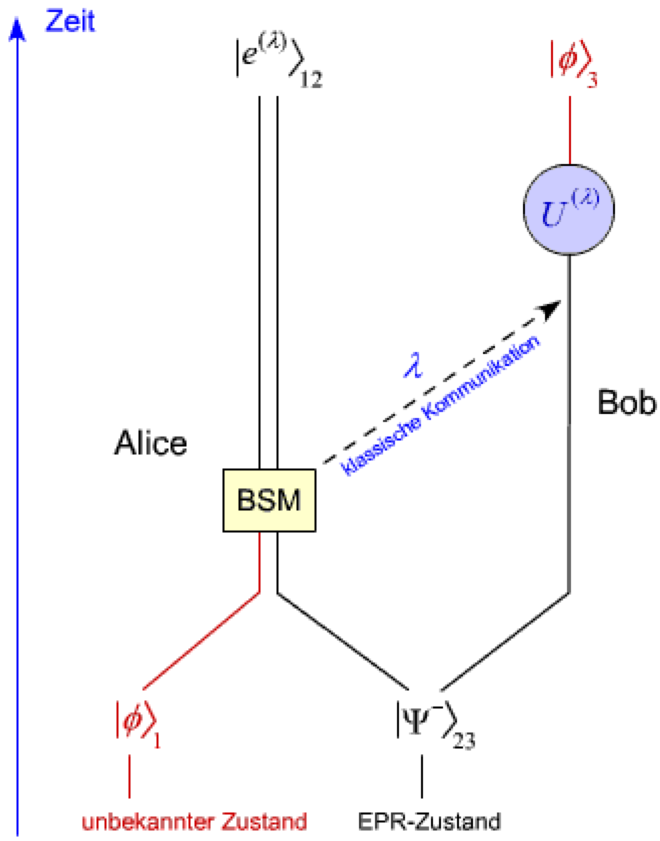
Quantenteleportation im Überblick

Quantenteleportation ist eine Anwendung der „gewöhnlichen“ Quantenmechanik. Die hier besprochene Vorgangsweise (das „Protokoll“) geht auf [1] zurück und ist sehr schön in [2] beschrieben. Sie benutzt nur Systeme (wir nennen sie kurz „Teilchen“) mit endlich vielen Freiheitsgraden (z.B. realisiert durch Spins oder Polarisationen) und ist daher mathematisch nicht besonders aufwändig. Die Grundidee besteht darin,

- einen unbekannten Zustandsvektor $|\phi\rangle$, der in *einem* System an einem (mit „Alice“ assoziierten) Ort realisiert ist,
- auf ein *anderes* System, das sich an einem *anderen* (mit „Bob“ assoziierten) Ort befindet,

zu „übertragen“, wobei Alice lediglich eine geringe Menge an klassischer Information an Bob übermittelt.

Das Protokoll sieht, kurz zusammengefasst, so aus:



1. Schritt:
   Alice bekommt ein Teilchen, das sich in einem unbekannten Spin- oder Polarisations-Zustand befindet.
2. Schritt:
   Es wird ein maximal verschränktes Teilchenpaar (EPR-Paar) erzeugt. Alice bekommt das eine, Bob das andere Teilchen. In diesem Schritt findet *weder* eine Kommunikation *von* Alice *zu* Bob statt noch umgekehrt.
3. Schritt:
   Alice führt an dem 2-Teilchen-System, das ihr nun zur Verfügung steht, eine bestimmte Messung (*Bell state measurement* – BSM) durch, die 4 mögliche Ausgänge hat. (Danach ist ihr System in einem von 4 möglichen Bell-Zuständen und wird nicht mehr benötigt).
4. Schritt:
   Alice teil Bob ihr Messergebnis (durch klassische Kommunikation, also z.B. per Telefon oder eMail) mit.
5. Schritt:
   Bob hat 4 Möglichkeiten zur Verfügung, sein Teilchen einer bestimmten

> Wechselwirkung auszusetzen. Jede dieser 4 Möglichkeiten entspricht einem der möglichen Ausgänge von Alices Messung und wird durch einen unitären Operator beschrieben. Bob setzt nun sein Teilchen *jener* Wechselwirkung aus, die dem ihm von Alice mitgeteilten Messwert entspricht. Danach ist sein Teilchen im unbekannten Quantenzustand.

Der unbekannte Zustand bleibt während des gesamten Prozesses unbekannt. Dem Teilchen, das sich ursprünglich in diesem Zustand befunden hat, kann *nach* Alices Messung kein individueller Zustandsvektor mehr zugeschrieben werden – es ist mit Alices zweitem Teilchen verschränkt. Der unbekannte Zustand wurde also nicht *kopiert*, sondern *übertragen*.

Jedes der drei vorkommenden Teilchen wird durch einen zweidimensionalen Hilbertraum beschrieben, kann also als „Qubit" bezeichnet werden. Jedes Element eines solchen Hilbertraums (d.h. jeder individuelle Zustandsvektor eines Teilchens) kann als Linearkombinationen zweier Basisvektoren $|0\rangle$ und $|1\rangle$ dargestellt werden. Ja nach der physikalischen Realisierung kann

- $|0\rangle$ „spin up" oder „horizontal polarisiert" und
- $|1\rangle$ „spin down" oder „vertikal polarisiert"

bedeuten.

Um die mit den drei Teilchen assoziierten Hilberträume voneinander zu unterscheiden, werden Indizes verwendet (man spricht auch von „Registern"): Die Basisvektoren

- des ersten Hilbertraums $\mathcal{H}_1$ sind $|0\rangle_1$ und $|1\rangle_1$,
- jene des zweiten Hilbertraums $\mathcal{H}_2$ sind $|0\rangle_2$ und $|1\rangle_2$,
- und jene des dritten Hilbertrums $\mathcal{H}_3$ sind $|0\rangle_3$ und $|1\rangle_3$.

Der Hilbertraum für das gesamte 3-Teilchen-System ist das Tensorprodukt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ der drei 1-Teilchen-Hilberträume. Die Basisvektoren dieses Raumes sind die Tensorprodukte der individuellen Basisvektoren.

> So bezeichnet beispielsweise der Zustandsvektor $|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3$ oder, abgekürzt angeschrieben, $|0\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3$, jenen Zustand des Gesamtsystems, in dem sich das erste Teilchen im Zustand $|0\rangle_1$, das zweite im Zustand $|1\rangle_2$ und das dritte im Zustand $|0\rangle_3$ befindet. Da es 8 derartige Kombinationen gibt, ist $\mathcal{H}$ ein 8-dimensionaler Hilbertraum.

Die unbekannte Zustand ist zu Beginn des Teleportations-Protokolls im ersten System (d.h. im ersten Register) realisiert. Wir können ihn daher in der Form

$$|\phi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1 \qquad (1)$$

schreiben, wobei α und β komplexe Zahlen sind und die Normierungsbedingung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ erfüllen.

Wir können nun formulieren, *was erstaunlich an der Quantenteleportation ist*: Der unbekannte Zustandsvektor ist durch zwei komplexe Zahlen charakterisiert, die (außer den Normierungsbedingung) frei wählbar sind. Es gibt *unendlich* viele Möglichkeiten, solche Zahlen zu wählen. Andererseits findet die *einzige* Kommunikation von Alice an Bob in Schritt 4 statt: Alice teilt Bob lediglich *eine von 4 Zahlen* mit – das sind 2 Bit Information! Wie ist es möglich, den unbekannten Zustand (1) durch eine derart kleine Menge an Information zu übertragen?

Wir schicken gleich voraus, dass eine instantane (augenblickliche) physikalische Wirkung auf Bobs Teilchen, die von Alices Messung ausginge, *nicht* die Lösung des Problems ist! Eine solche Wirkung widerspräche der Relativitätstheorie, und es lässt sich auch formal zeigen, dass die Quantentheorie *keine* solche Wirkung voraussagt. *Bevor* Bob den von Alice erzielten Messeausgang erfährt, kann er *nichts* über den unbekannten Zustand aussagen (und auch durch Messungen *nichts* über ihn herausfinden)!

Quantenteleportation im Detail

Gehen wir die einzelnen Schritte nun in mathematischer Formulierung genauer durch:

1. Schritt:
   Alice bekommt das Teilchen im unbekannten Zustand (1). Wichtig ist, dass der Zustandsvektor $|\phi\rangle_1$ sowohl Alice und auch Bob unbekannt ist – und auch unbekannt bleiben wird. Ein „äußerer Beobachter“ (in dessen Rolle wir uns versetzen) kann die Koeffizienten α und β durchaus kennen.

2. Schritt:
   Es wird ein maximal verschränktes Teilchenpaar (EPR-Paar) erzeugt. Wir nummerieren die beiden Teilchen mit den Indizes 2 und 3 und wählen als Zustandsvektor die Superposition

$$|\Psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_2 |1\rangle_3 - |1\rangle_2 |0\rangle_3\right). \qquad (2)$$

   Das ist der gleiche Zustandvektor, der üblicherweise für die Diskussion des Einstein-Rosen-Podolsky-Paradoxons herangezogen und daher kurz als EPR-Zustand bezeichnet wird. Alice bekommt nun das Teilchen 2, Bob bekommt das Teilchen 3. Das 3-Teilchen-Gesamtsystem befindet sich nun im Zustand

$$|\Omega\rangle_{123} = |\phi\rangle_1 |\Psi^-\rangle_{23} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1\right)\left(|0\rangle_2 |1\rangle_3 - |1\rangle_2 |0\rangle_3\right). \qquad (3)$$

3. Schritt:
   Alice führt nun in ihrem aus den Teilchen 1 und 2 bestehenden System eine Bell-Zustands-Messung (BSM) durch. Das bedeutet, sie misst eine Observable, deren Eigenvektoren die vier maximal verschränkten (und zueinander orthogonalen) Bell-Zustände

$$
\begin{aligned}
\left|e^{(0)}\right\rangle_{12} &\equiv \left|\Psi^-\right\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2 - \left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\right)\\
\left|e^{(1)}\right\rangle_{12} &\equiv \left|\Psi^+\right\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\right)\\
\left|e^{(2)}\right\rangle_{12} &\equiv \left|\Phi^-\right\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2 - \left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\right)\\
\left|e^{(3)}\right\rangle_{12} &\equiv \left|\Phi^+\right\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\right)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

sind. Sie werden üblicherweise mit den Symbolen $\left|\Psi^\pm\right\rangle_{12}$ und $\left|\Phi^\pm\right\rangle_{12}$ bezeichnet. Zur Bequemlichkeit wählen wird als gemeinsamen Namen $\left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12}$, wobei λ von 0 bis 3 läuft. Wenn nun Alice die Observable

$$
S = \sum_{\lambda=0}^{3} \lambda \left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12\,12}\left\langle e^{(\lambda)}\right| \tag{5}
$$

misst, so erhält sie einen von 4 möglichen Messresultaten, die genau den Werten von λ entsprechen: 0, 1, 2 oder 3.

An dieser Stelle kommt nun eine einfache aber folgenreiche Identität in Spiel. Durch Nachrechnen können wir leicht zeigen, dass sich der Zustandsvektor des Gesamtsystems in der Form

$$
\left|\Omega\right\rangle_{123} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{3}\left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12} U^{(\lambda)\dagger}\left|\phi\right\rangle_3 \tag{6}
$$

schreiben lässt, wobei die vier Größen $U^{(\lambda)}$ die folgenden unitären Operatoren sind:

$$
\begin{aligned}
U^{(0)} &= -\left|0\right\rangle_{3\;3}\left\langle 0\right| - \left|1\right\rangle_{3\;3}\left\langle 1\right|\\
U^{(1)} &= -\left|0\right\rangle_{3\;3}\left\langle 0\right| + \left|1\right\rangle_{3\;3}\left\langle 1\right|\\
U^{(2)} &= \left|1\right\rangle_{3\;3}\left\langle 0\right| + \left|0\right\rangle_{3\;3}\left\langle 1\right|\\
U^{(3)} &= -\left|1\right\rangle_{3\;3}\left\langle 0\right| + \left|0\right\rangle_{3\;3}\left\langle 1\right|
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Da sie unitär sind, erfüllen sie $U^{(\lambda)\dagger}U^{(\lambda)} = U^{(\lambda)}U^{(\lambda)\dagger} = \mathrm{id}_3$, und weiters gilt: $U^{(0)\dagger} = U^{(0)} = -1$, $U^{(1)\dagger} = U^{(1)}$, $U^{(2)\dagger} = U^{(2)}$ und $U^{(3)\dagger} = -U^{(3)}$.

Falls nun Alice bei ihrer Messung das Ergebnis λ erhält, „kollabiert" der Gesamtzustand gemäß dem Projektionspostulat der Quantentheorie zu

$$
\left|\Omega\right\rangle_{123}^{\text{nach Alices Messung}} = \left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12} U^{(\lambda)\dagger}\left|\phi\right\rangle_3 . \tag{8}
$$

Dieses Resultat zeigt uns, wie die folgenden Schritte aussehen müssen.

4. Schritt:
   Alice teil Bob ihr Messergebnis λ mit.

5. Schritt:
   Bob muss in der Lage sein, den unitären Operator $U^{(\lambda)}$ auf den Zustandsvektor seines Teilchen anzuwenden. Da er zunächst nicht weiß, welchen der 4 möglichen Werte von λ Alice ihm mitteilen wird, muss er auf alle vier Möglichkeiten vorbereitet sein. Die Wirkung eines unitären Operators stellt physikalisch eine (für eine gewisse Zeit „eingeschaltete“) Wechselwirkung dar. Bob muss also die Möglichkeit haben, sein Teilchen wahlweise einer dieser 4 Wechselwirkungen auszusetzen.

   Nachdem ihm Alice ihr Ergebnis λ mitgeteilt hat, schaltet Bob die dem Operator $U^{(\lambda)}$ entsprechende Wechselwirkung ein. Dies führt den Zustandvektor des Gesamtsystems von (8) in

$$\left|\Omega\right\rangle_{123}^{\text{nach Bobs Aktion}} = \left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12} \left|\phi\right\rangle_3 \tag{9}$$

   über. (Erinnern wir uns, dass $U^{(\lambda)}U^{(\lambda)\dagger} = \mathrm{id}_3$ gilt). Wie wir sehen, ist Bobs Teilchen nun im unbekannten Zustand $\left|\phi\right\rangle_3$.

Insgesamt hat sich der Zustand des Gesamtsystems also so geändert:

$$\left|\phi\right\rangle_1 \left|\Psi^-\right\rangle_{23} \quad \to \quad \left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12} \left|\phi\right\rangle_3$$

Der unbekannte Zustand $\left|\phi\right\rangle$ ist vom ersten auf das dritte Teilchen übertragen worden. Das erste Teilchen ist zu einem Bestandteil eines verschränkten 2-Teilchen-Systems im Zustand $\left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12}$ geworden, das ursprüngliche $\left|\phi\right\rangle_1$ wurde „ausgelöscht“.

Diskussion

Kehren wir zur Eingangs gestellten Frage zurück: Wie ist es möglich, den unbekannten Zustand (1), für dessen Wahl es ja unendlich viele Möglichkeiten gibt, durch die Übermittlung von lediglich 2 Bits zu übertragen? Die Antwort auf diese Frage steckt letzten Endes im quantenmechanischen Zustandsbegriff.

Da sich Bobs Teilchen nach der Anwendung der unitären Transformation $U^{(\lambda)}$ im Zustand $\left|\phi\right\rangle_3$ befindet, muss es sich *vorher* im Zustand $U^{(\lambda)\dagger}\left|\phi\right\rangle_3$ befunden haben. Eine einfache Rechnung (Übungsaufgabe!) zeigt, dass Alice jeden der vier möglichen Werte von λ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ erhalten kann.

- ***Bevor*** Bob den gemessenen Wert von λ erfährt, kann er also nur die Aussage

  „Mein Teilchen befindet sich mit gleichen Wahrscheinlichkeiten in *einem* der vier Zustände $U^{(0)\dagger}\left|\phi\right\rangle_3$, $U^{(1)\dagger}\left|\phi\right\rangle_3$, $U^{(2)\dagger}\left|\phi\right\rangle_3$ oder $U^{(3)\dagger}\left|\phi\right\rangle_3$“

  treffen. Auf den ersten Blick ist das eine sehr *starke* Aussage: Bob weiß, dass von den unendlich vielen Möglichkeiten, wie der Zustand seines Teilchens mit dem unbekannten Zustand $|\phi\rangle_3$ zusammenhängen kann, nur diese vier in Frage kommen – und das, bevor irgendeine Kommunikation mit Alice stattgefunden hat! Überraschenderweise ist Bobs Aussage aber die *schwächste* aller möglichen: Tatsächlich weiß er über den unbekannten Zustand *nichts*!

Exkurs: **Der Dichtematrixformalismus**

Ein besonders nützliches Werkzeug der Quantentheorie ist der Dichtematrixformalismus. Ein Zustand, der durch einen Zustandsvektor $|\psi\rangle$ (d.h. ein normiertes Element des Hilbertraums oder eine „Wellenfunktion") beschrieben wird, heißt *reiner Zustand*. In einem reinen Zustand ist der Erwartungswert einer Observablen (d.h. eines hermitischen Operators) A durch $\langle\psi|A|\psi\rangle$ gegeben. Ist

$$A = \sum_n a_n P_n$$

die Spektraldarstellung von A (P_n ist die Projektion auf den n-ten Eigenraum, a_n der zugehörige Eigenwert), so ist die Wahrscheinlichkeit, den Messwert a_n zu erhalten, gleich $\langle\psi|P_n|\psi\rangle$.

Manchmal (z.B. in der Quantenstatistik, aber auch in der Quanteninformation) ist von einem Quantensystem aber nur bekannt, dass es sich in *einem* von *mehreren* (reinen) Zuständen $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$,... befindet (die ganz beliebig sein können, also nicht zueinander orthogonal sein müssen). Wir sprechen in einem solchen Fall von einem *gemischten Zustand*. Ist das System mit der Wahrscheinlichkeit p_j im Zustand $|\psi_j\rangle$, so fließt diese Unkenntnis in die Voraussage von Messergebnissen ein. Letztere können dann durch die **Dichtematrix** (genauer: den **Dichteoperator**)

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \qquad \text{(E1)}$$

beschrieben werden:

- Der Erwartungswert einer Observablen A ist gegeben durch $\mathrm{Tr}(\rho A)$.
- Die Wahrscheinlichkeit, den Messwert a_n zu erhalten, ist gleich $\mathrm{Tr}(\rho P_n)$.

Dabei kann die Spur eines Operators B durch $\mathrm{Tr}(B) = \sum_k \langle e_k|B|e_k\rangle$ berechnet werden, wobei $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, ...\}$ eine *beliebige* Orthonormalbasis des Hilbertraums ist.

Ein reiner Zustand $|\psi\rangle$ kann durch die Dichtematrix $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ beschrieben werden. (Eine nützliche Formel ist $\mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|A) = \langle\psi|A|\psi\rangle$ für jeden linearen Operator A. Beweis: Übungsaufgabe!)

Damit wird der Dichtematrixformalismus zu einem *universellen* Werkzeug der Quantentheorie, mit dessen Hilfe reine wie gemischte Zustände beschrieben werden können. (In der Literatur wird der Ausdruck „Zustand" manchmal sogar synonym mit „Dichtematrix" verwendet). Dichtematrizen können ohne

Bezugnahme auf eine „Mischung“ reiner Zustände charakterisiert werden: *Jeder* hermitische Operator ρ,

- der nur nicht-negative Eigenwerte besitzt (man schreibt dann $\rho \geq 0$ und nennt ρ einen nicht-negativen – schlampigerweise auch „positiven“ – Operator)
- und dessen Spur 1 ist ($\mathrm{Tr}(\rho) = 1$)

ist eine Dichtematrix, d.h. besitzt eine Darstellung der Form (E1). Die folgende Diskussion benutzt nun eine besondere mathematische Eigenschaft: Die Darstellung (E1) ist nicht eindeutig, d.h. ist ρ eine Dichtematrix, so lässt sie sich auf *verschiedene* Weisen in der Form (E1) schreiben:

$$\rho = \sum_j p_j \left|\psi_j\right\rangle\left\langle\psi_j\right| = \sum_r q_r \left|\phi_r\right\rangle\left\langle\phi_r\right| = \ldots \tag{E2}$$

(Übungsaufgabe: Finde ein Beispiel!) Da alle diese Darstellungen durch reine Zustände die gleichen Voraussagen für Messungen ergeben, kann experimentell zwischen ihnen *nicht* unterschieden werden.

Kehren wir nun zur Diskussion des Teleportations-Protokolls zurück. Der springende Punkt ist, dass Bob den Zustand seines Teilchens prinzipiell nicht bestimmen kann, denn dazu müsste er über ein (unendlich großes) Ensemble von Systemen im gleichen Zustand verfügen. Da er aber nur *ein* Teilchen besitzt, kann er lediglich eine Messung vornehmen und erhält – gemäß den Gesetzen der Quantentheorie – einen Messwert. Alle quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsaussagen über Messungen an seinem Teilchens kann er mit Hilfe der Dichtematrix

$$\rho_{\mathrm{Bob}} = \frac{1}{4}\sum_{\lambda=0}^{3} U^{(\lambda)\dagger}\left|\phi\right\rangle_{3\,3}\left\langle\phi\right|U^{(\lambda)} \tag{10}$$

beschreiben. Es handelt sich hier nicht mehr um einen *reinen* (durch einen Zustandsvektor beschreibbaren), sondern um einen *gemischten* (durch eine Dichtematrix beschriebenen) Zustand. Da (Übungsaufgabe!)

$$\rho_{\mathrm{Bob}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{id}_3 \tag{11}$$

gilt[1] (das ist der so genannte Spurzustand), lässt Bobs Aussage keinen Rückschluss darauf zu, wie sich der Zustand seines Teilchens zu $\left|\phi\right\rangle_3$ verhält! Das ist insofern beruhigend, als es jegliche instantane Informationsübertragung von Alice an Bob verhindert: Durch die pure Tatsache, dass Alices ihre Messung ausgeführt hat, fließt keinerlei physikalische Information zu Bob!

---

[1] Das gleiche Resultat ergibt sich, indem von der Dichtematrix $\left|\Omega\right\rangle_{123\,123}\left\langle\Omega\right|$ des Gesamtsystems – siehe (3) und (6) – die Spur über die beiden ersten Hilberträume (die den für Bob unzugänglichen Teilsystemen entsprechen) gebildet wird (Übungsaufgabe!). Das Bilden der Spur über einen Faktor-Hilbertraum ist gleichbedeutend mit dem physikalischen Ignorieren des entsprechenden Teilsystems (TOU = *trace over unobservables*). ρ_{Bob} wird daher auch die „reduzierte Dichtematrix“ für Bobs Teilsystem genannt.

Nachdem Bob den Wert von λ erfahren hat, kann sein Teilchen durch den Zustandsvektor $U^{(\lambda)\dagger}|\phi\rangle_3$ beschrieben werden. Anders ausgedrückt, liegt ein *reiner* Zustand mit Dichtematrix

$$\rho_{\mathrm{Bob}}{}^{(\lambda)} = U^{(\lambda)\dagger}|\phi\rangle_{3\,3}\langle\phi|U^{(\lambda)} \tag{12}$$

vor. Nun weiß Bob, dass der Zustand seines Teilchens durch die Anwendung des Operators $U^{(\lambda)}$ in den unbekannten Zustand $|\phi\rangle_3$ übergeführt werden kann.

Daher ist der Zustand des Teilchens, das Bob übernimmt, für ihn nur jene 2 Bit an Information, die mit der Angabe einer der vier unitären Transformationen $U^{(\lambda)}$ verbunden sind, von *jedem möglichen* Zustand $|\phi\rangle_3$ „entfernt". Das gilt ganz *unabhängig von* dem, was *Alice* macht (es gilt auch *vor* ihrer Messung und sogar dann, wenn Alice gar keine Messung durchführt)!

Entanglement Swapping (Verschränkungstransfer)

Eine Verallgemeinerung des Teleportations-Protokolls ergibt sich, wenn der unbekannte Zustand nicht *rein* ist, sondern Teil eines verschränkten 2-Teilchen-Systems (und damit *gemischt*). Dazu führen wir ein zusätzliches Teilchen (Register) mit der Nummer 0 ein. Zu Beginn ist das Gesamtsystem im Zustand

$$|\Omega\rangle_{0123} = |\Lambda\rangle_{01}|\Psi^-\rangle_{23} \equiv |\Lambda\rangle_{01}\left(|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3\right), \tag{13}$$

wobei $|\Lambda\rangle_{01}$ einen beliebigen Zustand des 2-Teilchen-Systems 01 (z.B. den verschränkten EPR-Zustand $|\Lambda\rangle_{01} = |\Psi^-\rangle_{01} \equiv |0\rangle_0|1\rangle_1 - |1\rangle_0|0\rangle_1$) beschreibt. Alice bekommt das Teilchen 1, und das Protokoll läuft ab wie oben beschrieben. Zuletzt ist das System im Zustand

$$|e^{(\lambda)}\rangle_{12}|\Lambda\rangle_{03}, \tag{14}$$

wobei nun die Teilchen der Bequemlichkeit halber in der Reihenfolge 1203 angeschrieben wurden: Bobs Teilchen weist mit dem (im Protokoll nicht benutzten) Teilchen 0 die gleiche Verschränkung auf wie *vor* der Ausführung des Protokolls das Teilchen 1. Insgesamt wurde also

$$|\Lambda\rangle_{01}|\Psi^-\rangle_{23} \quad \to \quad |e^{(\lambda)}\rangle_{12}|\Lambda\rangle_{03}$$

erreicht. Der nun vorliegende Quantenzustand des 2-Teilchen-Systems 03 ist gleiche wie der Anfangszustand des 2-Teilchen-Systems 01 – die Verschränkung wurde vom Teilchenpaar 01 auf das Teilchenpaar 03 transferiert (daher der deutsche Name „Verschränkungstransfer"). Die Tatsache, dass der teleportierte Zustand Teil eines verschränkten Systems ist, bleibt aufrecht. Es wurden lediglich die Teilchen ausgetauscht, in denen er realisiert ist (daher der englische Name: *entanglement* = Verschränkung, *swap* = vertauschen).

Teleportation mit beliebigem gemeinsamem Zustand

Neben der klassischen Kommunikation (d.h. Alices Mitteilung ihres Messergebnisses an Bob) ist der gemeinsame verschränkte Zustand (2) die entscheidende Verbindung zwischen Alice und Bob. Eine weitere Verallgemeinerung des Teleportationsprozesses ergibt sich, wenn statt dessen ein beliebiger *anderer* (reiner oder gemischter) 2-Teilchenzustand verwendet wird, das Protokoll als solches (d.h. die Abfolge der Handlungen von Alice und Bob) aber gleich bleibt. Wird der gemeinsame Zustand durch die Dichtematrix ρ_{23} und der unbekannte Zustand durch die Dichtematrix μ_1 beschrieben, so ist die Dichtematrix des Gesamtsystems zu Beginn das Tensorprodukt $\mu_1\rho_{23}$. Erhält Alice bei der Bell-Zustands-Messung den Wert λ, so geht der Zustand in

$$\frac{1}{c}\left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12\,12}\left\langle e^{(\lambda)}\right|\mu_1\rho_{23}\left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12\,12}\left\langle e^{(\lambda)}\right| \tag{15}$$

über, wobei die Normierungskonstante $c = {}_{12}\left\langle e^{(\lambda)}\right|\mu_1\mathrm{Tr}_3(\rho_{23})\left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12}$ dafür sorgt, dass die Spur dieses Operators 1 ist. Nachdem Bob den Wert λ erfahren hat und den entsprechenden unitären Operator $U_3^{(\lambda)}$ angewandt hat, ist der Zustand des Gesamtsystems

$$\frac{1}{c}\,U_3^{(\lambda)}\left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12\,12}\left\langle e^{(\lambda)}\right|\mu_1\rho_{23}\left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12\,12}\left\langle e^{(\lambda)}\right|U_3^{(\lambda)\dagger}. \tag{16}$$

Der Zustand von Bobs Teilchen wird nun durch jene reduzierte Dichtematrix beschrieben, die durch Spurbildung über die Teilchen 1 und 2 entsteht:

$$\eta_3^{(\lambda)} = \frac{U_3^{(\lambda)}\ {}_{12}\left\langle e^{(\lambda)}\right|\mu_1\rho_{23}\left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12}U_3^{(\lambda)\dagger}}{{}_{12}\left\langle e^{(\lambda)}\right|\mu_1\mathrm{Tr}_3(\rho_{23})\left|e^{(\lambda)}\right\rangle_{12}}. \tag{17}$$

Ist der gemeinsame Zustand ρ_{23} durch (2) gegeben, d.h. im Dichtematrixformalismus $\rho_{23} = \left|\Psi^-\right\rangle_{23\,23}\left\langle\Psi^-\right|$, so ist $\eta_3^{(\lambda)} = \mu_3$, d.h. durch den Teleportationsprozess wird der unbekannte Zustand immer perfekt auf das Teilchen 3 übertragen. Wird irgendein *anderer* gemeinsamer Zustand ρ_{23} verwendet, so ist das nicht notwendigerweise der Fall. Ist der unbekannte Zustand rein, d.h. $\mu_1 = \left|\phi\right\rangle_{11}\left\langle\phi\right|$, kann die Güte der Teleportation etwa durch die Kenngröße (*fidelity* oder *score*)

$$F^{(\lambda)} = \mathrm{Tr}(\mu\eta^{(\lambda)}) \equiv \left\langle\phi\right|\eta^{(\lambda)}\left|\phi\right\rangle \tag{18}$$

(womit $\mathrm{Tr}_3(\mu_3\eta_3^{(\lambda)}) \equiv {}_3\left\langle\phi\right|\eta_3^{(\lambda)}\left|\phi\right\rangle_3$ gemeint ist) ausgedrückt werden. Sie kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen und ist ein Maß dafür, wie sehr sich der unbekannte vom teleportierten Zustand unterscheidet. Ist sie 1, so ist $\eta^{(\lambda)} = \mu \equiv \left|\phi\right\rangle\left\langle\phi\right|$, d.h. das entsprechende Schema bewirkt die perfekte Übertragung des unbekannten Zustands vom Teilchen 1 auf das Teilchen 3. Größen wie diese können dazu benutzt werden, den Grad der „Nichtlokalität" des gemeinsamen Zustands ρ_{23} zu messen.

Der Nenner von (17) ist übrigens die Wahrscheinlichkeit, dass Alice den Messwert λ erhält. Wird der Teleportationsvorgang mit identischen Ausgangsbedingungen sehr oft wiederholt, so ergibt sich als Mittel aller erhaltenen Dichtematrizen $\eta_3^{(\lambda)}$

$$\eta_3 = \sum_{\lambda=0}^{3} U_3^{(\lambda)}\ {}_{12}\left\langle e^{(\lambda)} \middle| \mu_1 \rho_{23} \middle| e^{(\lambda)} \right\rangle_{12} U_3^{(\lambda)\dagger}\ . \tag{19}$$

Anders ausgedrückt entspricht dieser Zustand dem Kenntnisstand eines Beobachters, der zwar μ_1 und ρ_{23} kennt, nicht aber den gemessenen Wert λ. Daraus ergibt sich für den Fall $\mu = |\phi\rangle\langle\phi|$ mit

$$F = \mathrm{Tr}(\mu\eta) \equiv \langle\phi|\eta|\phi\rangle \equiv \sum_{\lambda=0}^{3}\ {}_{12}\left\langle e^{(\lambda)} \middle| \phi \right\rangle_1\ {}_3\left\langle \phi \middle| U_3^{(\lambda)} \rho_{23} U_3^{(\lambda)\dagger} \middle| \phi \right\rangle_3\ {}_1\left\langle \phi \middle| e^{(\lambda)} \right\rangle_{12} \tag{20}$$

ein weiteres Maß für die Güte der Teleportation (das genau dann gleich 1 ist, wenn die Übertragung des unbekannten Zustands auf Bobs Teilchen in allen Versuchsdurchgängen perfekt ist). Um sicherzustellen, dass der unbekannte Zustand tatsächlich *unbekannt* ist, empfiehlt sich eine zusätzliche Mittelung über $|\phi\rangle$. Die Berechnung (deren Details über diese Einführung hinausgehen[2]) ergibt die modifizierte Kenngröße[3]

$$\overline{F} = \frac{2}{3}\ {}_{23}\left\langle \Psi^- \middle| \rho_{23} \middle| \Psi^- \right\rangle_{23} + \frac{1}{3}, \tag{21}$$

die nun lediglich vom gemeinsamen Zustand ρ_{23} abhängt. Verwenden Alice und Bob einen Produktzustand $\rho_{23} = |a\rangle_2\ {}_2\langle a| \otimes |b\rangle_3\ {}_3\langle b|$, so ergibt sich maximal (bei geeigneter Wahl von $|a\rangle$ und $|b\rangle$) $\overline{F} = \frac{2}{3}$. In diesem Fall kann natürlich keine erfolgreiche Teleportation stattfinden. Ist ρ_{23} eine Mischung aus Produktzuständen (ein so genannter *separabler* Zustand), so kann $\overline{F}$ die Zahl $\frac{2}{3}$ ebenfalls nicht überschreiten. Ein höherer Wert kann offensichtlich mit rein klassischer Kommunikation, in der die von Alice erhaltenen Messwerte λ nichts mit Bobs Zustand zu tun haben, nicht erzielt werden. Daraus ergibt sich als Umkehrung ein wichtiges Kriterium: Ein gemeinsamer Zustand ρ_{23}, für den

$$\overline{F} > \frac{2}{3} \tag{22}$$

---

[2] Es sei lediglich erwähnt, dass für die Mittelung über Zustände gemäß der natürlichen Geometrie eines n–dimensionalen Hilbertraums die Formeln $\int \mathcal{D}\phi = 1$, $\int \mathcal{D}\phi\, |\phi\rangle\langle\phi| = \frac{1}{n}\,\mathrm{id}$ und $\int \mathcal{D}\phi\, \langle\phi|A|\phi\rangle |\phi\rangle\langle\phi| = \frac{1}{n(n+1)}\big(A + \mathrm{Tr}(A)\ \mathrm{id}\big)$ verwendet werden.

[3] Interessanterweise tritt in dieser Formel $\left|\Psi^-\right\rangle_{23}$ auf. Das illustriert, dass das Teleportations-Protokoll, insbesondere die Form der Operatoren $U^{(\lambda)}$, *nicht* in symmetrischer Weise auf die vier Bell-Zustände (4) Bezug nimmt.

gilt, *erhöht* die Güte der Teleportation *über das durch rein klassische Kommunikation erreichbare Maß* hinaus. Ein solcher Zustand muss *nichtlokale* (klassisch nicht erklärbare) Korrelationseigenschaften haben. Ist ρ_{23} durch (2) gegeben, so ergibt sich mit $\overline{F}=1$ der erreichbare Maximalwert. Die einfach zu berechnende Kenngröße (21) wird – wie (18) und (20) – als *fidelity* oder *score* bezeichnet. Als Verallgemeinerung von (21) kann die Größe $\frac{2}{3}\,{}_{23}\langle\Gamma|\rho_{23}|\Gamma\rangle_{23}+\frac{1}{3}$ für einen beliebigen „maximal verschränkten" Zustand $|\Gamma\rangle_{23}$ zur Prüfung von ρ_{23} auf Nichtlokalität verwendet werden.

Anhang

Der mathematische Grund für das Funktionieren der Quantenteleportation ist die Gleichheit der Dichtematrizen (10) und (11) für *jeden* Zustand $|\phi\rangle_3$, d.h. die Unabhängigkeit der Dichtematrix (10) von $|\phi\rangle_3$. Die Identität

$$\frac{1}{4}\sum_{\lambda=0}^{3}U^{(\lambda)\dagger}|\phi\rangle_{33}\langle\phi|U^{(\lambda)}=\frac{1}{2}\,\mathrm{id}_3 \qquad \text{für } \textit{jeden} \text{ (normierten) Zustand } |\phi\rangle_3\in\mathscr{H}_3 \tag{A1}$$

widerspiegelt einen fundamentalen Zug der Quantenmechanik. Lesen wir diese Beziehung von rechts nach links, so besagt sie:: Die Dichtematrix $\frac{1}{2}\,\mathrm{id}_3$ kann auf unendlich viele Weisen in der Form (A1) geschrieben werden – vgl. (E2). Eine ähnliche, aber einfachere Situation liegt vor, wenn

- jemand behauptet, ein (zweidimensionales) Quantensystem befinde sich mit gleichen Wahrscheinlichkeiten in einem der beiden Zustände $|0\rangle$ oder $|1\rangle$, während
- jemand anderer sagt, das System befinde sich mit gleichen Wahrscheinlichkeiten in einem der beiden Zustände $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)$ oder $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)$.

Diese beiden Aussagen sind physikalisch gleichwertig, d.h. es kann zwischen ihnen durch Messungen nicht entschieden werden. Mathematisch entspricht diese Äquivalenz den Identitäten (Übungsaufgabe!)

$$\frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\frac{\langle 0|+\langle 1|}{\sqrt{2}}+\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\frac{\langle 0|-\langle 1|}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{id}\,. \tag{A2}$$

Durch Messung kann also *nicht* unterschieden werden, ob ein System

- mit gleichen Wahrscheinlichkeiten in einen der beiden Zustände $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ gebracht wurde, oder ob es
- mit gleichen Wahrscheinlichkeiten in einen der beiden Zustände $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)$ oder $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)$ gebracht wurde,

denn es wird in beiden Fällen durch die Dichtematrix $\frac{1}{2}\mathrm{id}$ beschrieben.

Literatur

[1] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, & W. K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, Phys. Rev. Lett. 70, 1895-1899 (1993).
Online unter http://citeseer.ist.psu.edu/bennett93teleporting.html
(Die Onlineversion unter
http://www.research.ibm.com/quantuminfo/teleportation/teleportation.html
scheint zur Zeit nicht zur Verfügung zu stehen.)

[2] D. Bouwmeester, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Quantum Teleportation Protocol, in: Dirk Bouwmeester et. al., The Physics of Quantum Information, Springer 2000, p. 51.