

Polarisationsverschränkte Photonenpaare*

08.06.2009

von Stefanie Barz

1. Verschränkte Zustände

In der Quantenmechanik werden Zustände durch normierte Zustandsvektoren in einem Hilbertraum beschrieben. Ein allgemeiner Zustand $|\alpha\rangle$ kann dabei in einer Basis $\{|a_i\rangle\}$ des Hilbertraumes entwickelt werden:

$$|\alpha\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \quad (1.1)$$

Observablen, wie zum Beispiel Ort und Impuls, werden durch Operatoren auf diesem Hilbertraum ausgedrückt. Eine Messung einer Observablen A wird durch die Anwendung eines Operators \hat{A} auf den entsprechenden Zustand dargestellt, dabei sind die möglichen Messergebnisse gerade die Eigenwerte α dieses Operators:

$$\hat{A}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.2)$$

Das System befindet sich nach der Messung im Eigenzustand zum gemessenen Eigenwert. Ein aus mehreren Systemen zusammengesetztes System entspricht einem Zustand im Tensorprodukt der Hilberträume der einzelnen Teilsysteme. In diesem Produktraum existieren allerdings Zustände, die nicht als Produkt von Zuständen der einzelnen Hilberträume geschrieben werden können. Sind z.B. $|0\rangle_i$ und $|1\rangle_i$ die Basiszustände des i -ten Teilraums ($i = 1, 2$), so lässt sich im Produktraum eine Überlagerung von Produktzuständen bilden, die nicht mehr faktorisiert ist, z.B.:

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 - |1\rangle_1 |0\rangle_2) \neq (a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1)(c|0\rangle_2 + d|1\rangle_2) \quad (1.3)$$

*nach [1]

2. EPR und Bellsche Ungleichungen

Diese Zustände nennt man verschränkt.

Liegt ein verschränkter Zustand vor, so kann dieser durch einen Zustandsvektor im Produktraum beschrieben werden. Allerdings ist es nicht möglich, den einzelnen Subsystemen Zustandsvektoren zuzuordnen, es liegt keine Information über die Subsysteme vor.

1.1. Bell-Zustände

Eine besondere Art von verschränkten Zuständen sind die maximal verschränkten Bell-Zustände

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 - |1\rangle_1 |0\rangle_2) \quad (1.4)$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2) \quad (1.5)$$

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 - |1\rangle_1 |1\rangle_2) \quad (1.6)$$

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2), \quad (1.7)$$

bei denen strikte Antikorrelationen bzw. Korrelationen zwischen den Zuständen der beiden Teilchen vorliegen. Der Zustand $|\psi^-\rangle$ zeichnet sich dabei zudem durch Rotationsinvarianz aus, die strikte Antikorrelation liegt also in jeder Basis vor.

2. EPR und Bellsche Ungleichungen

„One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete“ [2]

In ihrer grundlegenden Arbeit *„Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete“* [2] von 1935 stellen Einstein, Podolski und Rosen (EPR) einen Beweis dar, der die Unvollständigkeit der Quantenmechanik zeigen soll. Sie werfen dabei die Frage auf, ob die Quantenmechanik durch sogenannte verborgene Parameter ergänzt werden müsse, in denen die Eigenschaften eines Systems festgelegt sind.

In den ersten Jahren nach der Veröffentlichung des EPR-Papiers war die Diskussion über die Ergänzung der Quantenmechanik durch lokale verborgene Parameter größtenteils philosophischer Art und geriet wieder in Vergessenheit. Mit der Veröffentlichung der ersten Bellschen Ungleichung durch John Bell [3] 1964 gewann diese erneut an Dynamik. Diese zeigte die Unvereinbarkeit der Aussagen lokaler realistischer Theorien und den Vorhersagen der Quantenmechanik und bot eine erste quantitative Formulierung, die die Abgrenzung der Quantenmechanik von Theorien lokaler verborgener Parameter ermöglichte.

3. Experimente

„In this note, that idea will be formulated mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of quantum mechanics.“ [3]

Die ursprüngliche Bellsche Ungleichung basierte allerdings auf idealen Bedingungen und war für reale Experimente nicht anwendbar. Clauser, Horne, Shimony und Holt (CHSH) veröffentlichten 1969 eine modifizierte Ungleichung [4], die im Gegensatz zu Bell nicht von perfekten Korrelationen ausgeht und somit für experimentelle Tests anwendbar ist. Bell [5] selbst modifizierte seine ursprüngliche Ungleichung dahingehend, dass er berücksichtigte, dass reale Messinstrumente möglicherweise nicht alle Teilchen detektieren, und somit eine der CHSH-Ungleichung ähnliche Ungleichung herleitete (siehe A.2).

3. Experimente

In den siebziger Jahren wurden die ersten Experimente zum Test der Bellschen Ungleichung durchgeführt. Dabei gab es in dieser ersten Generation von Bell-Experimenten Realisierungen mithilfe unterschiedlicher physikalischer Systeme: Photonenpaare aus Kaskadenübergänge in Kalzium und Quecksilber, Experimente mit energiereichen Photonenpaaren aus Positronvernichtung sowie Experimente mit Protonenpaaren [6].

Eine wichtige Periode der Durchführung von Bell-Experimenten begann 1981 mit den Experimenten von Aspect et al. [7]. Diese nutzten einen Kaskadenübergang in Kalzium und realisierten eine Quelle mit einer wesentlich größeren Erzeugungsrate von Photonenpaaren als bei vorhergehenden Experimenten.

Die bis zu diesem Zeitpunkt größte Verletzung der Bellschen Ungleichung wiesen Aspect et al. [8] im darauffolgenden Jahr nach, indem sie die gleichzeitige Messung von zwei Polarisatorausgängen verwirklichten.

Eine neue Generation der Bell-Experimente entstand Ende der achtziger Jahre mithilfe spontaner parametrischer Fluoreszenz [9, 10]. Dabei werden Photonenpaare mit einer wesentlich höheren Effizienz als bei bisherigen Experimenten bei zugleich geringerem technischen und damit auch finanziellen Aufwand erzeugt.

3.1. Erzeugung polarisationsverschränkter Photonenpaare

Bei der spontanen parametrischen Fluoreszenz werden polarisationsverschränkte Photonenpaare durch die Wechselwirkung eines Laserstrahls mit einem nichtlinearen Kristall erzeugt. Dabei entsteht aus einem einfallenden Photon ein Paar von Photonen.

Da Energie- und Impulserhaltung gelten, haben die erzeugten Photonen jeweils die halbe Energie, bzw. die doppelte Wellenlänge, des einfallenden Photons. Desweiteren werden die Photonenpaare entlang von Kegeloberflächen emittiert (s. Abbildung 1). Dabei werden die beiden Photonen eines Paares immer symmetrisch um den Ursprung emittiert, wird z.B. ein Photon nach rechts oben abgestrahlt, dann wird das Paarphoton nach links

3. Experimente

unten emittiert.

Die Photonen im oberen Kegel sind dabei immer vertikal (außerordentlich) polarisiert, die Photonen im unteren Kegel horizontal (ordentlich). Betrachtet man nun Photonen

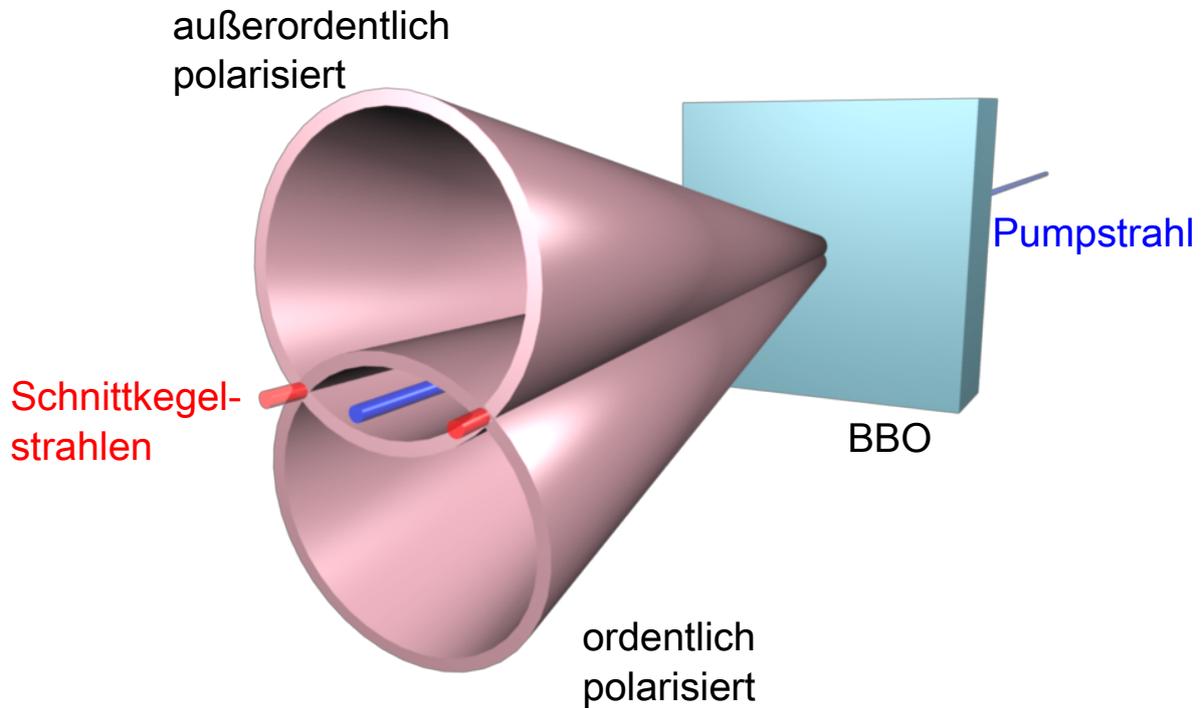


Abbildung 1: Erzeugung polarisationsverschränkter Photonenpaare

aus den Schnittpunkten der beiden Kegel, so lässt sich nicht sagen, zu welchem der beiden Kegel die Photonen gehören. Die beiden Photonen bilden ein polarisationsverschränktes Photonenpaar:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\leftrightarrow\rangle + e^{i\phi}|\leftrightarrow\rangle|\uparrow\rangle), \quad (3.1)$$

wobei mit $|\uparrow\rangle$ bzw. $|\leftrightarrow\rangle$ ein Zustand mit vertikaler bzw. horizontaler Polarisation bezeichnet wird. Durch die im Experiment einstellbare Phase ϕ lassen sich verschiedene Bellzustände erzeugen.

3.2. Experimentelle Realisierung

Im Praktikum Quantenoptik wird eine solche Quelle mit spontaner parametrischer Fluoreszenz realisiert. Dabei werden Photonenpaare, wie in Kapitel 3.1 beschrieben, durch die Wechselwirkung eines Laserstrahls mit einem nichtlinearen Kristall erzeugt. Als Pump Laser dient ein Diodenlaser, der violettes Licht bei einer Wellenlänge von 405 nm emittiert.

3. Experimente

Der Laserstrahl wird auf einen β -Bariumboratkristall (β -BBO) fokussiert. Die dort erzeugten Photonennpaare treten in den Schnittkegelstrahlen unter einem Winkel von 6° aus dem Kristall und werden über zwei Spiegel umgelenkt und räumlich voneinander getrennt.

Eine $\lambda/2$ -Platte und Kompensationskristalle dienen zur Kompensation der Walk-Off-Effekte¹. Mittels letzterer lässt sich außerdem die Phase der Bell-Zustände einstellen.

Langpass- und Bandpassfilter filtern ultraviolettes Streulicht und ermöglichen es, Photonen mit einer schmalen spektralen Breite zu selektieren. Die erzeugten Photonen werden in Singlemode-Fasern eingekoppelt und über diese zu einem Detektionsmodul geleitet, das die einzelnen Photonen zählt und Koinzidenzen angibt.

Ein experimenteller Aufbau zur Erzeugung polarisationsverschränkter Photonennpaare ist schematisch in Abbildung (2) dargestellt, ein Foto eines Aufbaus ist in Abbildung 3 zu sehen.

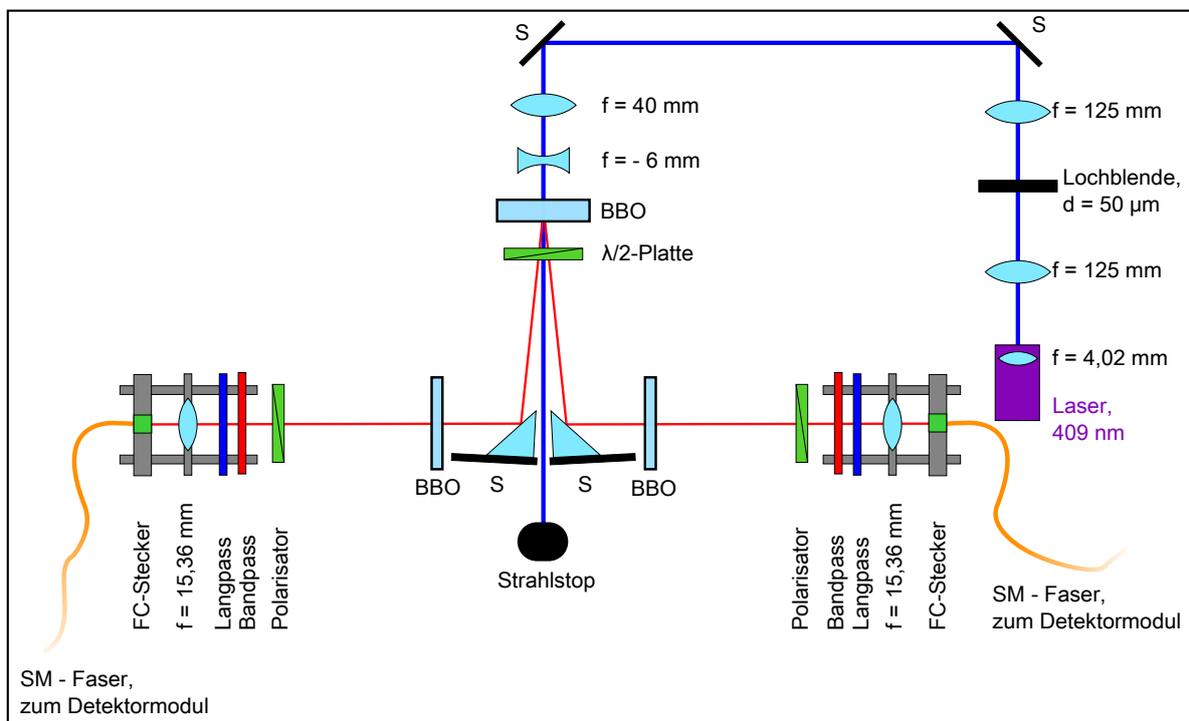


Abbildung 2: Schematische Darstellung eines Experiments zur Erzeugung polarisationsverschränkter Photonennpaare

¹Aufgrund der unterschiedlichen Polarisierungen erfahren die erzeugten Photonen unterschiedliche Brechungsindizes im Kristall. Daher unterscheiden sich einerseits die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Photonen, andererseits werden außerordentlicher und ordentlicher Strahl gegeneinander verschoben. Dadurch wird möglicherweise die Ununterscheidbarkeit der Photonen aufgehoben, so dass eine Kompensation der Effekte erforderlich ist.

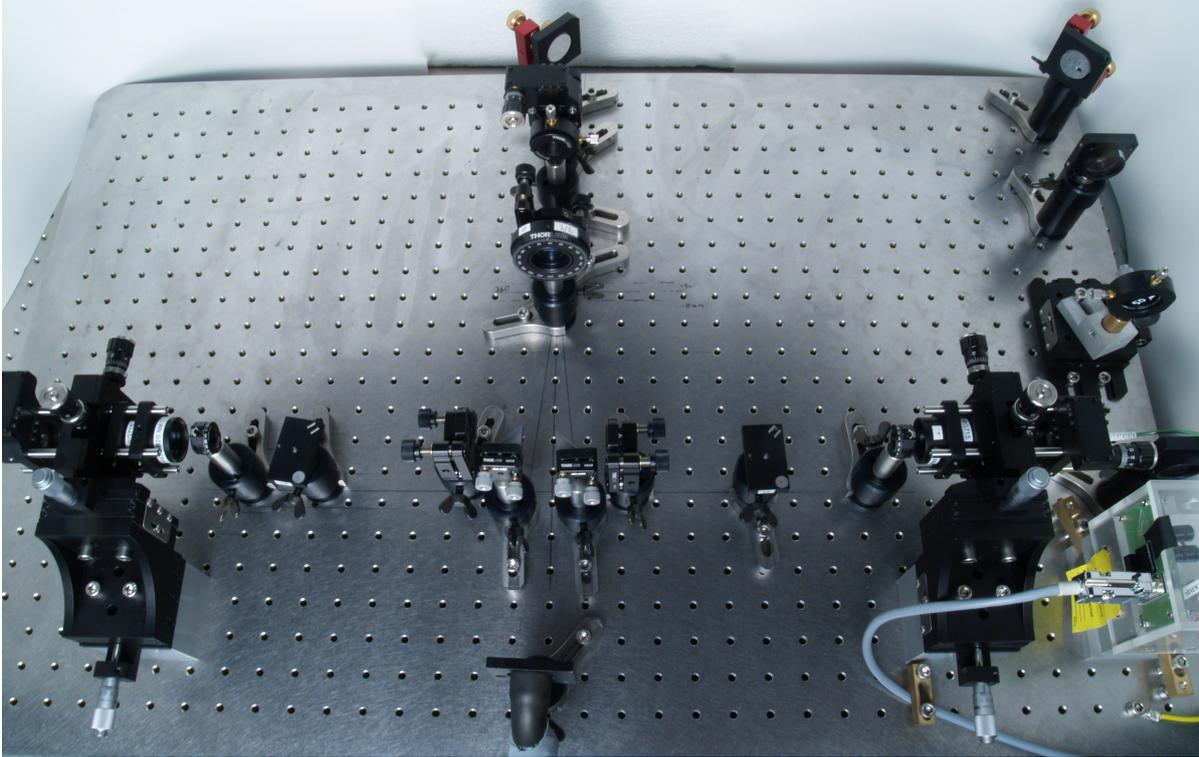


Abbildung 3: Foto eines Aufbaus zur Erzeugung polarisationsverschränkter Photonenpaare

4. Test der Bellschen Ungleichung

Seit der Veröffentlichung von John Bell [3] wurden verschiedene Bellsche Ungleichungen hergeleitet. Für Experimente besonders nützlich sind die CHSH-Ungleichung bzw. die Ungleichung, die von Bell 1971 hergeleitet wurde (vgl. Kapitel A.2), die nun im Experiment überprüft werden soll [4], [5]. Definiere dazu den Bell-Parameter S :

$$S := \left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{b}') \right| + \left| P(\vec{a}', \vec{b}') + P(\vec{a}', \vec{b}) \right| \quad (4.1)$$

Lokale, realistische Theorien sagen nun voraus, dass $S \leq 2$ sein muss.

Um S experimentell zu bestimmen, müssen zunächst die verschiedenen Erwartungswerte P gemessen werden. Die Messung der Spinkomponenten entlang verschiedener Richtungen $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}', \vec{b}')$ entspricht in unserem Fall der Messung von Polarisierungen entlang verschiedener Polarisationsachsen, die durch Drehung von Polarisatoren um die Winkel $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ eingestellt werden. Dabei ist zu beachten, dass alle in den Herleitungen auftretenden Winkel halbiert werden müssen, da nun mit Photonen und nicht mit Spin-1/2-Teilchen gemessen wird.

Der Erwartungswert lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(\alpha, \beta) = \frac{N_k(\alpha, \beta) - N_k(\alpha, \beta^\perp) - N_k(\alpha^\perp, \beta) + N_k(\alpha^\perp, \beta^\perp)}{N_k(\alpha, \beta) + N_k(\alpha, \beta^\perp) + N_k(\alpha^\perp, \beta) + N_k(\alpha^\perp, \beta^\perp)}, \quad (4.2)$$

4. Test der Bellschen Ungleichung

wobei α^\perp und β^\perp , die zu α und β orthogonalen Winkel sind. Um S zu bestimmen sind Messungen mit 16 verschiedenen Winkelstellungen nötig. Die größte Verletzung lässt sich mit den Winkeln $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 22,5^\circ$, $\alpha' = 45^\circ$ und $\beta' = 67,5^\circ$ erreichen, wobei diese hier wieder an die Messung der Polarisation von Photonen mittels Analysatoren angepasst wurden.

	α	α'	α^\perp	α'^\perp
	0	45	90	135
β	22,5			
β'	67,5			
β^\perp	112,5			
β'^\perp	157,5			

Koinzidenzzählrate ((s)⁻¹)

Tabelle 1: Messung von Koinzidenzzählraten bei den die Bellsche Ungleichung maximal verletzenden Winkelstellungen.

Ermittelte Erwartungswerte			Quantentheoretische Vorhersage
P(0°, 22,5°)	=	±	-0,71
P(0°, 67,5°)	=	±	0,71
P(45°, 22,5°)	=	±	-0,71
P(45°, 67,5°)	=	±	-0,71
S	=	±	2,83

Tabelle 2: Berechnung des Bell-Parameters

A. Anhang

A.1. Sicherheitshinweise

Bei dem Experimenten mit Lasern und optischen Elementen sind einige Vorsichtsmaßnahmen erforderlich:

- Der verwendete Laser hat eine Maximalleistung von 90 mW.
Um eine Schädigung der Augen zu verhindern, ist es zwingend notwendig, eine Schutzbrille zu tragen.
Es sollte keinesfalls in den Strahl geblickt werden.
Während des Experimentierens sollte der Kopf sich nicht auf Tischhöhe befinden, es sollte möglichst auch unterlassen werden, sich zum Boden zu bücken (ansonsten: Augen schließen).
Die Laserwarnleuchte muss bei laufendem Laser immer angeschaltet sein.
- Während des Versuchs dürfen keine reflektierenden Kleidungsstücke und Gürtel, sowie keine Accessoires wie Ringe, Ketten, Uhren oder ähnliches getragen werden.
- Die verwendeten optischen Komponenten sind sehr empfindlich. Die Oberflächen der Linsen, Spiegel, Kristalle, Filter usw. dürfen nicht berührt werden.
- Die Justage des Versuchs ist sehr sensibel. Die optischen Komponenten müssen daher immer festgeschraubt werden. Außer den verwendeten Komponenten darf nichts auf dem Breadboard stehen.
Ebenfalls dürfen keine Gegenstände / Skripte auf die Glasfasern gelegt werden.
- Die Glasfasern dürfen nicht von den Einkopplern und dem Detektormodul entfernt werden.
- Der Laserdiode kann durch geringste elektrostatische Entladungen zerstört werden. Daher sollte weder der Laser geöffnet, noch die Kabel, die zum Laser führen, entfernt werden.
- Im Praktikumsraum nicht essen und trinken!

A.2. Eine weitere Ungleichung von Bell

Bell formulierte 1971 in [5] eine weitere Variante einer Ungleichung, bei der er seine ursprüngliche Herleitung so modifizierte, dass die eingehenden Voraussetzungen ebenfalls experimentell zu verwirklichen sind.

Dazu betrachtet er ein System von zwei Spin-1/2-Teilchen, die auseinander fliegen und auf zwei Messinstrumente treffen, die die Spinkomponenten entlang verschiedener Richtungen messen. Aus der Annahme, dass der Zustand des Systems vollständig durch verborgene Variablen λ mit normierter Verteilungsfunktion $\rho(\lambda)$ gegeben sei, leitet er nun ebenfalls eine Ungleichung her, die durch die Quantenmechanik verletzt wird.

Seien \vec{a}, \vec{b} die Einstellungen der verschiedenen Messapparate und $A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1$ und $B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1$ die möglichen Messergebnisse, jeweils abhängig von der Einstellung des Apparates und der verborgenen Variablen λ . Bell nimmt nun an, dass die Messapparate ihrerseits verborgene Variablen enthalten könnten, die die Messergebnisse beeinflussen. Um dies auszuschließen, mittelt er über diese Messapparat-Variablen und betrachtet nun die gemittelten Messergebnisse \bar{A} und \bar{B} .

Bell berücksichtigt außerdem, dass die Messinstrumente möglicherweise auch Teilchen überhaupt nicht registrieren, indem er zusätzlich zulässt, dass die Messwerte A, B außer ± 1 für die Ergebnisse der Spinnmessungen auch den Wert null annehmen können.

Daher gilt nun: $|\bar{A}| \leq 1$ und $|\bar{B}| \leq 1$. Definiert man nun wie zuvor den Erwartungswert:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) := \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) \quad (\text{A.1})$$

Seien nun \vec{a}' und \vec{b}' weitere Messrichtungen. Dann folgt:

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{b}') &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) - \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}', \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda) (1 \pm \bar{A}(\vec{a}', \lambda) \bar{B}(\vec{b}', \lambda))] \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) [\bar{A}(\vec{a}, \lambda) \bar{B}(\vec{b}', \lambda) (1 \pm \bar{A}(\vec{a}', \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda))] \end{aligned}$$

Bildet man nun auf beiden Seiten der Gleichung den Betrag und wendet die Dreiecksungleichung ($|x - y| \leq |x| + |y|$) an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{b}') \right| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) (1 \pm \bar{A}(\vec{a}', \lambda) \bar{B}(\vec{b}', \lambda)) \\ &\quad + \int d\lambda \rho(\lambda) (1 \pm \bar{A}(\vec{a}', \lambda) \bar{B}(\vec{b}, \lambda)) \\ &= 2 \pm P(\vec{a}', \vec{b}') \pm P(\vec{a}', \vec{b}) \\ &= 2 \pm [P(\vec{a}', \vec{b}') + P(\vec{a}', \vec{b})] \end{aligned}$$

Bildet man auf der rechten Seite der Gleichung das Minimum, so folgt:

$$\left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{b}') \right| \leq 2 - \left| P(\vec{a}', \vec{b}') + P(\vec{a}', \vec{b}) \right| \quad (\text{A.2})$$

Wie die ursprüngliche Bellsche Ungleichung wird diese Ungleichung ebenfalls von den Vorhersagen der Quantenmechanik verletzt. Legt man als Messrichtungen Einheitsvektoren fest, die in einer Ebene liegen, so kann man die Messrichtungen durch die Winkel ersetzen, unter denen gemessen wird. Der quantenmechanische Erwartungswert erhält man aus der folgenden Relation von den Messrichtungen eingeschlossenen Winkeln :

$$P(\alpha, \beta) = -\cos(\beta - \alpha) \quad (\text{A.3})$$

Wählt man $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\alpha' = \frac{\pi}{2}$ und $\beta' = \frac{3\pi}{4}$, so erhält man

$$\begin{aligned} & \left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{b}') \right| + \left| P(\vec{a}', \vec{b}') + P(\vec{a}', \vec{b}) \right| \\ = & \left| P(\alpha, \beta) - P(\alpha, \beta') \right| + \left| P(\alpha', \beta') + P(\alpha', \beta) \right| \quad (\text{A.4}) \\ = & \left| -\cos(\beta - \alpha) + \cos(\beta' - \alpha) \right| + \left| -\cos(\beta' - \alpha') - \cos(\beta - \alpha') \right| \\ = & \left| \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Damit ist die durch die Ungleichung (A.2) vorgegebene Grenze für lokale, realistische Theorien von $|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{b}')| + |P(\vec{a}', \vec{b}') + P(\vec{a}', \vec{b})| \leq 2$ verletzt.

Aufgrund der Anpassung an experimentelle Gegebenheiten wurde für das Praktikum diese Ungleichung ausgewählt, um im Experiment die Unvereinbarkeit der Quantenmechanik mit lokalen realistischen Theorien zu bestätigen (vgl. Kapitel 4).

Literatur

- [1] S. Barz: *Eine Quelle polarisationsverschränkter Photonenpaare im physikalischen Praktikum für Fortgeschrittene*. Staatsexamensarbeit, Universität Mainz, 2008.
- [2] A. Einstein, B. Podolski und N. Rosen: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Phys. Rev., 47(10):777–780, 1935.
- [3] J. Bell: *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*. Physics, 1:195–200, 1964.
- [4] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony und R. A. Holt: *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*. Phys. Rev. Lett., 23(15):880–884, 1969.
- [5] J. Bell: *Introduction to the Hidden-Variable Question*. Proceedings of the International School of Physics: Enrico Fermi, 49:171, 2001.
- [6] J. F. Clauser und A. Shimony: *Bell's theorem. Experimental tests and implications*. Reports on Progress in Physics, 41(12):1881–1927, 1978.

Literatur

- [7] A. Aspect, P. Grangier und G. Roger: *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*. Phys. Rev. Lett., 47(7):460–463, 1981.
- [8] A. Aspect, P. Grangier und G. Roger: *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*. Phys. Rev. Lett., 49(2):91–94, 1982.
- [9] Y. H. Shih und C. O. Alley: *New Type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Experiment Using Pairs of Light Quanta Produced by Optical Parametric Down Conversion*. Phys. Rev. Lett., 61(26):2921–2924, 1988.
- [10] Z. Y. Ou und L. Mandel: *Violation of Bell's Inequality and Classical Probability in a Two-Photon Correlation Experiment*. Phys. Rev. Lett., 61(1):50–53, 1988.