Mathematik und Modellbildung in der Naturwissenschaft

gehalten im Rahmen der Ringvorlesung „Facetten naturwissenschaftlichen Denkens“
(und diese im Rahmen des Erweiterungscurriculums „Naturwissenschaftliches Denken: Fallbeispiele, Grundlagen und Einflüsse“, http://ec-nwdenken.univie.ac.at/), SS 2015

Franz Embacher
http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Zur Bedeutung mathematischer Modelle

Oberflächlich betrachtet, kommen mathematische Modelle überall dort zum Einsatz, wo quantitative (also in Zahlen ausdrückbare) und „genaue“ Aussagen gewünscht werden. Dahinter steckt aber meist etwas Wichtigeres: die mathematische Modellierung kann helfen, vermutete Zusammenhänge möglichst klar zu formulieren („Theorien aufzustellen“), ihre Konsequenzen zu verstehen und sie der empirischen Überprüfung auszusetzen (sowie bei der Beurteilung, wie zuverlässig ein Zusammenhang empirisch überprüft wurde). Sie zwingt uns, Begriffe zu schärfen und hilft, zwischen dem *Bild*, das wir uns von einem Sachverhalt machen, und *dem Sachverhalt selbst* (also zwischen der Theorie und „der Wirklichkeit“ oder – soweit die Naturwissenschaft betroffen ist – „der Natur“) zu unterscheiden.

Mathematische Modelle in den Naturwissenschaften beziehen sich einerseits auf „die Natur“ und sind in diesem Sinn mehr oder weniger ernst gemeinte „Behauptungen“, die mit Beobachtungen (Messungen) konfrontiert werden können. Andererseits besitzen sie aber auch ein Eigenleben (eine innere Logik) und stellen in diesem Sinn eine „idealisierte Natur“ dar. Dieser doppelte Charakter kommt besonders deutlich in der Physik zum Ausdruck. Als Einstieg ist es instruktiv, sich ein leicht verständliches Beispiel anzusehen. Wir wählen das **Fallgesetz**, das auf **Galileo Galilei** zurückgeht und in moderner (Formel-)Sprache lautet:

> **Fallgesetz**: Ein Körper, der aus der Ruhe zu fallen beginnt, hat nach der Zeitspanne t die Strecke
>
> $$s = \frac{g}{2}\,t^2$$
>
> durchfallen. Dabei ist $g = 9.81\ \mathrm{m/s}^2$ die Erdbeschleunigung.

Ein Gesetz wie dieses ist ein mathematisches Modell. Es ist mit einer Reihe von idealisierenden Annahmen verbunden und besitzt einen **Gültigkeitsbereich**, innerhalb dessen es gute Dienste leistet, außerhalb dessen es aber zumindest ungenau und unzuverlässig, wenn nicht völlig irrelevant ist. Zu den idealisierenden Annahmen, die im Fallgesetz stecken, und auf denen seine Einfachheit beruht, zählen:

- Es wird vorausgesetzt, dass der Körper *einen* Ort besitzt. Die Betonung liegt auf dem Wort „*einen*“. Der Körper wird als Punkt (im physikalischen Jargon „Punktteilchen“) behandelt. Dieses Konzept entspringt *nicht* der Erfahrung. Ein realer Körper ist ausgedehnt – seine Lage im Raum kann nicht durch eine einzige Zahl ausgedrückt werden. Dennoch ist diese Annahme für *kleine* Körper eine gute Näherung.
- Das Fallgesetz vernachlässigt den Luftauftrieb und den Luftwiderstand.
- Der angegebenen numerische Wert von g ist nur eine Näherung. Tatsächlich schwankt die Erdbeschleunigung auf der Erdoberfläche je nach dem Ort, an dem man sich befindet, um einige Promille. (Das rührt daher, dass die Erde keine exakte Kugel ist.)
- Es berücksichtigt nicht die Tatsache, dass sich während des Fallens der Abstand zum Erdmittelpunkt ändert und daher g genau genommen keine Konstante ist.
- Es vernachlässigt die Erdrotation (die eine kleine Ablenkung der Flugbahn aus der Lotrechten bewirkt).
- Es ignoriert andere Himmelskörper als die Erde und ihre momentane Position.
- Das Fallgesetz (das aus dem 17. Jahrhundert stammt) ignoriert verschiedene moderne Theorien der Natur, wie beispielsweise die Quantentheorie, nach der nicht einmal einem Punktteilchen ein eindeutiger Ort zu geschrieben werden kann.
- Es unterstellt, Orte und Zeiten seien durch reelle Zahlen (jeweils mit einer physikalischen Einheit) gegeben. Nach dem Modell ist die Frage möglich, wo sich der Körper nach $2.2137298402563063567629375942893459229327582358$ Sekunden befindet. Macht diese Frage Sinn? Vielleicht ist der Zeitfluss in Wahrheit nicht kontinuierlich, sondern eine Abfolge diskreter Zeit*punkte*? Eine ähnliche Frage könnten wir für das Konzept des Ortes stellen.
- Das Fallgesetz erweckt den Eindruck, als könnten t und s beliebig große Werte annehmen. Es lässt beispielsweise die Frage zu, wie weit der Körper nach einem Jahr gefallen ist.

All dies beschränkt seinen Gültigkeitsbereich und seine numerische Verlässlichkeit. Aber immerhin: Es beschreibt mit Zehntelsekunden-Genauigkeit, wie lange eine aus dem Fenster geworfene Eisenkugel fällt, bevor sie den Boden erreicht.

Nun der zweite Aspekt: *Unabhängig* von seinem Gültigkeitsbereich besitzt das Fallgesetz auch eine **innere Logik**. Sie führt uns zu interessanten Schlussfolgerungen. So kann beispielsweise auf ihr gefolgert werden, dass die Geschwindigkeit des Fallenden Körpers nach dem Gesetz

$$v = g\,t$$

immer größer wird – und zwar proportional zur verstrichenen Zeit. Dies können wir vergleichen mit der Durchschnittsgeschwindigkeit für den Bewegungsablauf bis zur Zeit t. Sie ist gegeben durch

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{\frac{g}{2}\,t^2}{t} = \frac{g\,t}{2} = \frac{v}{2}.$$

Sie ist also immer genau halb so groß wie die (Momentan-)Geschwindigkeit zur Zeit t. Die Geschwindigkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt ist also immer das Doppelte der (in der Regel leichter zu messende) Durchschnittsgeschwindigkeit des bisherigen Bewegungsverlaufs. Wir können die innere Logik aber auch in viel extremerer Weise ausnutzen: Nichts hindert uns daran, die Geschwindigkeit zu berechnen, die der Körper nach einem Jahr hat! Die Antwort: Er ist dann schneller als das Licht:

$$\begin{aligned} v_{\text{nach einem Jahr}} &= g\,t = 9.81\ \text{m/s}^2 \times 1\ \text{Jahr} = \\ &= 9.81 \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60\ \text{m/s} = \\ &= 3.096 \times 10^8\ \text{m/s} \approx 310\,000\ \text{km/s}\,. \end{aligned}$$

Das ist natürlich in der Praxis völlig irrelevant, aber dennoch mit einer Erkenntnis verbunden: Das Fallgesetzt steht im *Widerspruch zur Relativitätstheorie*, die Überlichtgeschwindigkeit „verbietet"! Es ist ein nichtrelativistisches Gesetz. (Ganz so abwegig ist eine solche Überlegung aber auch aus einem anderen Grund nicht: Wird das Fallgesetz auf einen Neutronenstern angewandt – wobei anstelle der Erdbeschleunigung die um einen Faktor 10^{11} größere „Neutronensternbeschleunigung" zu setzen ist –, so stellt sich durch eine analoge Rechnung heraus, dass ein fallender Körper bereits nach weniger als einer tausendstel Sekunde die Lichtgeschwindigkeit überschritten hätte!) Ein mit der Relativitätstheorie verträgliches Fallgesetz müsste also eine ganz andere Form haben. Diesen Schluss konnten wir nur ziehen, indem wir seinen Gültigkeitsbereich ohne Hemmungen überschritten haben und seiner inneren Logik gefolgt sind. Das Studium dieser inneren Logik ist ebenso eine Aufgabe der Physik wie seine Anwendung innerhalb des Bereichs, in dem wir es als „gute Näherung" bezeichnen können.

Das Fallgesetz ist ein „kleines" und leicht überblickbares mathematisches Modell, und es handelt nur von Größen, die recht „anschaulich" sind. Moderne physikalische Theorien sind umfassender, und komplexer, in der Regel auch „unanschaulicher", weisen aber im Kern die gleichen Grundeigenschaften wie dieses einfache Beispiel auf.

Wie es von Galileo Galileis Fallgesetz über Johannes Keplers Gesetze der Planetenbewegungen bis zu Isaac Newtons „Vereinheitlichung" der Gesetze, die die Bewegung fallender Körper und die Bewegung von Himmelskörpern beschreiben, kam, lesen Sie bitte in der Präsentation zur Vorlesung, die Sie unter http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/MathematikNawi/ finden!

Die Struktur physikalischer Theorien

Die Physik versucht, die Vielfalt der beobachtbaren Phänomene auf der Basis möglichst weniger Grundannahmen („physikalischer Gesetze") zu verstehen. Seit der Neuzeit wurde es immer selbstverständlicher, solche Grundannahmen mathematisch zu formulieren. Dass das überhaupt möglich ist, war mit der Vorstellung verknüpft, Gott habe der Welt bei ihrer Erschaffung auch die „Naturgesetze" mitgegeben, und zwar in der idealsten und reinsten aller Sprachen – der Sprache der Mathematik. Noch Albert Einstein war diese Vorstellung das Bonmot wert, „dem Alten über die Schulter zu schauen".

Die Vereinheitlichung vieler Phänomene unter wenige Prinzipien gelang zunächst nur für Gruppen von Phänomenen, die irgendwie zusammengehören, wie etwa die Bewegungen von Körpern unter dem Einfluss der Schwerkraft oder die elektrischen und magnetischen Phänomene.

Im Laufe der Zeit wuchs die Zahl der physikalischen Phänomene, die wir beobachten können, und so dehnten sich diese Gruppen von Phänomenen aus, überschnitten einander und konnten zu größeren Gruppen zusammengefasst werden, die auf noch allgemeineren, weitreichendere Prinzipien beruhten. Ein Beispiel ist Elektrodynamik, die elektrische und magnetische Erscheinungen unter einem gemeinsamen Blickwinkel zusammenfasst.

Dieser Prozess der fortschreitenden Vereinheitlichung ist bis heute nicht abgeschlossen. Gegenwärtig sind wir bei der Auffassung angelangt,

- **dass es (je nach Zählung) drei oder vier fundamentale Wechselwirkungen in der Natur gibt** (die elektromagnetische, die schwache – letztere als „elektroschwache" vereinheitlicht –, die starke und die Gravitation),
- **die zwischen einem bestimmten Spektrum von Elementarteilchen wirken** (Leptonen – darunter das Elektron und die Neutrinos –, Quarks – die die Protonen und Neutronen aufbauen – und Austauschteilchen – zu denen das Photon zählt, das Teilchen, aus dem das Licht besteht)
- **und dabei einer Reihe weiterer Prinzipien** (Relativitätstheorie, Quantentheorie) **genügen** (wobei ein großes verbleibendes Problem darin besteht, dass die Gravitationstheorie und die Quantentheorie – beide in ihrer heutigen Form – nicht recht zusammenzupassen scheinen).

Weitergehende Spekulationen, wie eine zukünftige, alles umfassende *theory of everything* (die auch das Problem der Quantengravitation löst) aussehen könnte, gehören mittlerweile zum Forschungsalltag.

Grundsätzlich herrscht die Meinung vor, fast alle gegenwärtigen beobachtbaren physikalischen Phänomene könnten auf diese wenigen grundlegenden Theorien zurückgeführt (also „vorhergesagt") werden. In der Praxis funktioniert das aber nicht in dieser umfassenden Weise. Die Theorie der Quarks (die noch mit einigen mathematischen Problemen belastet ist) kann die Existenz von Protonen und Neutronen vorhersagen und klärt die Kräfte auf, die Atomkerne zusammenhalten. Bereits die Erklärung der Eigenschaften von Atomen und ihren Bindungskräften greift nicht mehr auf das Quarkmodell zurück, sondern benutzt die berühmte Schrödingergleichung, in die bereits einige Vereinfachungen eingehen. Wird schließlich in die makroskopische Welt vorgestoßen (etwa um Materialeigenschaften zu verstehen), so ist die Schrödingergleichung nur in sehr idealisierten Situationen tatsächlich lösbar, so dass weitere Vereinfachungen nötig sind. Je komplexer das Zusammenspiel der atomaren Bestandteile der Materie ist, umso eher ist man auf Beobachtungen und systematisch gewonnene Messdaten angewiesen (die im besten Fall nachträglich von eigenen Spezialisten mit viel Aufwand aus fundamentaleren Annahmen erklärt werden können). So verstehen wir beispielsweise Prozesse wie das Schmelzen und Gefrieren von Materialien grundsätzlich aus ihrer atomaren Struktur heraus, aber im Detail sind die durch systematisches Experimentieren gewonnenen Daten in der Regel zuverlässiger als theoretische Herleitungen – wenngleich Herleitungen dieser Art (also die „Erklärung" der Welt der Erscheinungen aus „ersten Prinzipien") immer erfolgreicher werden. Aber trotz dieser Erfolge arbeiten viele Disziplinen mit Begriffen, die nicht direkt der atomaren Welt entstammen. So kann beispielsweise einem einzelnen

Atom weder eine Temperatur noch ein elektrischer Widerstand zugeschrieben werden. Es sind dies Begriffe, die sich auf unsere Beobachtungs- und Handlungsmöglichkeiten beziehen, und die in den Modellen, mit denen etwa die Materialwissenschaften arbeiten, formalisiert werden.

Auf diese Weise führt der Fortschritt in der Vereinheitlichung physikalischer Grundgesetze nicht zu *weniger*, sondern zu *mehr* physikalischen Teildisziplinen, die jeweils ihre eigenen Konzepte und Begriffe besitzen, ihre eigenen (theoretischen und experimentellen) Methoden entwickeln, untereinander die unterschiedlichsten logischen Verbindungen besitzen und auf vielfältige Weise zusammenspielen und voneinander Erkenntnisse beziehen. Trotz dieser Vielfalt weisen viele dieser Gebiete aber eine ähnliche Grundstruktur auf: Soweit sie eher der theoretischen Seite zugeordnet werden können, basieren sie typischerweise auf einem Satz von **Grundannahmen** (in denen die vorgenommenen Idealisierungen und die zentralen Konzepte festgelegt sind) und wenigen **Grundgleichungen** (oder zumindest einem allgemeinen **theoretischen Rahmen**). Von diesen Grundlagen ausgehend, wird eine Vielzahl von Fragestellungen bearbeitet, wobei Theorie und Experiment oft eng zusammenspielen. Eine logische Struktur dieser Art ist aber nicht ein für alle Mal festgeschrieben, sondern kann sich von Zeit zu Zeit durch neue Erkenntnisse und Brückenschläge ändern, wodurch wiederum neue Teilgebiete entstehen.

Ein sehr schönes Beispiel für diese Struktur ist die so genannte **klassische Elektrodynamik**. Im Jahr 1865 gelang es James Clerk Maxwell, die bis dahin bekannten elektrischen und magnetischen Phänomene unter einem einheitlichen Gesichtspunkt mathematisch zu beschreiben. Die vier **Maxwell-Gleichungen** zählen zu den folgenreichsten wissenschaftlichen Errungenschaften überhaupt. Sie beruhen auf einigen Idealisierungen, von denen aus heutiger Sicht die wichtigste darin bestehen, die Materie und die in ihr enthaltenen elektrischen Ladungen als Kontinuum (oder, in Einzelfällen, als Punktteilchen) zu betrachten und die Quantentheorie zu nicht zu berücksichtigen. Ihre mathematische Formulierung sieht so aus:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\
&\operatorname{div} \vec{B} = 0 \\
&\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0\, \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Sie besagen, stark vereinfacht (der Reihe nach),

- dass das elektrische Feld von positiven elektrischen Ladungen ausgeht und von negativen elektrischen Ladungen verschluckt wird,
- dass es keine magnetischen Ladungen gibt (das Magnetfeld als weder von bestimmten Orten ausgeht noch an anderen Orten verschluckt wird),
- dass eine zeitliche Veränderung des Magnetfelds ein „im Kreis laufendes“ elektrisches Feld hervorbringt (das „Induktionsgesetz“, das Sie vielleicht aus dem Physikunterricht kennen), und
- dass sowohl der elektrische Strom als auch eine zeitliche Veränderung des elektrischen Feldes ein „im Kreis laufendes“ Magnetfeld hervorbringen.

Eine kleine Zusatzgleichung gibt an, wie diese beiden Felder auf Ladungen wirken, d.h. wie sie sich in der Welt bemerkbar machen. **Beeindruckend** ist**, was die Maxwell-Gleichungen alles beschreiben können** (sofern einige Tatsachen, die sie aufgrund der getroffenen Idealisierungen nicht aus sich heraus erklären können, vor allem Materialeigenschaften, von außen hineingefüttert werden): elektrische und magnetische Phänomene vom Gewitter bis zu kompliziertesten elektrischen Geräten, die Prozesse, die uns letztlich die Energie aus der Steckdose liefern, den gesamten Bereich der elektromagnetischen Wellen, von denen das sichtbare Licht nur ein Spezialfall ist, und daher auch die Grundlagen der Optik. Wird noch ein bisschen Quantentheorie dazugegeben, so beschreiben sie die Phänomene, auf denen die moderne Elektronik bis hin zum Smartphone beruht, und mit noch ein bisschen mehr Quantentheorie erklären sie, warum es überhaupt Atome, Moleküle und die Vielfalt der chemischen Elemente sowie Flüssigkeiten und Festkörper gibt!

Eine physikalische Theorie aufzustellen, besteht also *nicht* darin, ein einzelnes Phänomen zu postulieren, über dessen tatsächliche Existenz dann sogleich (oder sobald die dafür nötige Technik zur Verfügung steht) in einem Experiment befunden werden kann. Solche Fälle gibt es, aber sie werden besser „Hypothesen" genannt als „Theorie". Physikalische Theorien sind auf einer grundsätzlichen Ebene angesiedelt – auch ihre Formulierung als „mathematische Modelle" findet zunächst auf dieser Ebene statt –, und sie sind für die Beschreibung und Erklärung einer großen Zahl von Phänomenen zuständig.

Eine Besonderheit physikalischer Theorien besteht darin, dass es oft **sehr schwierig** ist, **ihre Konsequenzen** (mit den Mitteln der Mathematik) **herauszuarbeiten**. Ein schönes Beispiel dafür ist **Allgemeine Relativitätstheorie** (die moderne Theorie der Gravitation). Im Jahr 1915 veröffentlichte Albert Einstein ihre Grundlagen in Form eines neuen Raumzeitkonzepts und einem System sehr komplizierter Differentialgleichungen für die Größen, die die Raumzeit gemäß diesem neuen Konzept beschreiben. (Das populäre Kürzel für diese Gleichungen lautet: „Materie krümmt die Raumzeit".) *Was* diese Theorie aber *tatsächlich vorhersagt*, wurde erst im Laufe der Zeit klar. Einige Vorhersagen waren von Anfang an klar (wie etwa die Lichtablenkung durch Massen, die bei einer Sonnenfinsternis im Jahr 1919 bestätigt wurde und der Theorie auf triumphale Weise zum Durchbruch verhalf), aber es dauerte ein halbes Jahrhundert, bis die Dynamik kollabierender Sterne (die zu „Schwarzen Löchern" werden) im Prinzip verstanden wurde. An den Einzelheiten (beispielsweise um zu klären, welche Sterne dieses Schicksal erleiden und welche ihm gerade noch entgehen) arbeiten wir heute noch!

In der **Quantenchromodynamik** – der Theorie der Quarks – sind die Probleme sogar noch größer: Deren Grundprinzipien sind zwar dargelegt, aber an einer mathematische Formulierung, die es erlaubt, eindeutige und überprüfbare Vorhersagen zu treffen, wird noch gearbeitet.

Mathematische Modellierung und der Blick hinter die Phänomene

Mit dem Beginn des 20. Jahrhunderts kam der Mathematik in der Physik eine weitere Rolle zu, der wir uns jetzt zuwenden. Bis zum Beginn des 20. Jahrhundert waren die physikalischen Begriffe und Konzepte der Vorstellung mehr oder weniger leicht zugänglich. Natürlich gab es Konzepte, die nicht unmittelbar auf der Basis unserer Alltagserfahrungen einsichtig waren. So postulierte Galileo Galilei, dass sich ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, auf ewige Zeit mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer geraden Linie fortbewegt (das ist der so genannte Trägheitssatz), und Isaac Newton verallgemeinerte dies, indem er die *Kraft* (die zuvor als *Ursache der Bewegung* angesehen wurde) als *Ursache der Bewegungsänderung* bestimmte. Das war nicht leicht zu akzeptieren in einer Welt, in der sich eine Kutsche, die nicht mehr von Pferden gezogen wurde, auch nicht mehr fortbewegte. (Heute führen uns Filmaufnahmen aus Raumstationen den Trägheitssatz recht direkt vor Augen – wir nennen ihn in diesem Zusammenhang „Schwerelosigkeit".) Aber der ungemeine Erfolg dieser neuen Betrachtungsweise war eine starke Motivation, sie in die physikalische Vorstellungswelt zu integrieren. (Hilfreich ist es auch, zu bedenken, dass ein Körper, nachdem die Hand, die ihn wirft, losgelassen hat, nicht auf der Stelle stehen bleibt.) Auch an *Felder* kann man sich ohne allzu große Schwierigkeiten gewöhnen: Zwar ist das elektromagnetische Feld „unsichtbar" (einmal davon abgesehen, dass das Licht selbst so ein Feld ist), aber immerhin zeigt es sich durch seine Wirkung auf Ladungen, so wie sich das Gravitationsfeld durch seine Wirkungen auf Massen zeigt. Man kann sich derartige Felder zumindest *vorstellen*. Sie drängen sich zwar nicht in unseren Alltagsanschauungen auf, *widersprechen* ihnen aber *nicht* oder nur *wenig* – im Vergleich dazu, was nachher kam.

Mit dem *Vorstellen* der grundlegenden physikalischen Gesetze war spätestens nach der Veröffentlichung **der Speziellen Relativitätstheorie** im Jahr 1905 Schluss. Es war dies die erste Theorie, die grundlegende Fundamente unserer Anschauungen – wie wir uns Raum und Zeit vorstellen – in Frage stellte.

> „Das Licht bewegt sich für jeden Beobachter gleich schnell. Der Zeitfluss hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab. Ein bewegtes Objekt ist kürzer als in seinem Ruhsystem."

Die **Allgemeine Relativitätstheorie** (und die auf ihr aufbauende Kosmologie) radikalisierte die Unverträglichkeit mit unseren Anschauungen weiter.

> „Raum und Zeit sind im Urknall entstanden. Das Universum expandiert, aber es expandiert nicht ‚irgendwohin' – dennoch werden die Entfernungen zwischen Galaxien immer größer. Ein Schwarzes Loch enthält eine Singularität, die für jeden Beobachter in der Zukunft liegt. Sie besteht darin, dass die Raumzeit schlicht und einfach endet. In ein Gefäß, das äußerlich wie ein Würfel mit Kantenlänge 10 cm aussieht, können – sofern der Raum gekrümmt ist – durchaus 2 Liter Flüssigkeit passen. Und übrigens: Die Antwort auf die Frage, wo der Urknall stattfand, lautet: überall!"

Die **Quantentheorie** schließlich – alle drei Theorien sind mit dem Namen Albert Einstein verbunden! – relativierte sogar das Konzept der Realität als solches:

> „Manche Messgrößen sind unbestimmt, also nicht lediglich unbekannt, sondern objektiv unbestimmt. Erst durch eine Messung erhalten sie einen scharfen Wert. Die ‚Unschärferelation' sollte in diesem Sinn eher ‚Unbestimmtheitsrelation' genannt werden. Ein Elektron in einem Atom hat keinen Ort, sondern verhält sich eher als ‚Wolke'. Es ist in gewisser Weise an vielen Orten gleichzeitig."

Wir wollen hier nicht fragen, wie man auf die Idee kommt, derartige Theorien aufzustellen. Sie bewähren sich glänzend, widerspiegeln also offenbar etwas, das tatsächlich in der Natur liegt – das mag als Rechtfertigung genügen. Was uns aber interessiert, ist die Frage, *wie Menschen mit ihnen umgehen können*! Wie ist es möglich, Theorien zu handhaben, deren Grundlagen so weit von unseren Alltagsanschauungen entfernt liegen? Die Antwort lautet: mit Hilfe der Mathematik. Sie hilft uns, unanschauliche physikalische Konzepte und Gesetze in den Griff zu bekommen und ihnen eine präzise Form zu geben. Richtig angewandt, bewahrt sie uns vor Irrtümern, die aus unseren (offenbar falschen) Anschauungen erwachsen und hilft uns, *Ersatzvorstellungen* zu entwickeln.

Besonders einfach, was die verwendete Mathematik betrifft, ist die Formulierung der Grundsätze der Speziellen Relativitätstheorie und die Herausarbeitung ihrer Folgerungen für die **Begriffe Raum und Zeit** (http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/SRT/).

Als weiteres Beispiel mag das **Konzept des gekrümmten Raumes** dienen, das in der Allgemeinen Relativitätstheorie Anwendung findet. Hermann Weyls Geschichte von der „Wanze auf der heißen Ofenplatte" (http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/EinsteinRechnet/Kruemmung.html) illustriert auf wunderschöne Weise, dass sich ein gekrümmter Raum nicht „in" einem höherdimensionalen Etwas krümmen muss. Ein anderes Beispiel ist das quantentheoretische Konzept der **Unbestimmtheit physikalischer Messgrößen**, die anhand des einfachen (und nicht einmal so falschen) Modells der „Quanten-Gickse" (http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Quantentheorie/gicks/) verdeutlicht werden kann.

Die Mathematik erlaubt uns also einen Blick hinter die Phänomene, auf physikalische Gesetze, die unsere Anschauungen nicht oder nur unvollständig erfassen. Anstatt aber die in der Physik verwendete Mathematik so einfach wie möglich zu halten, war die einmal losgetretene Lawine nicht mehr aufzuhalten. Es stellte sich heraus, dass physikalische Konzepte von einem „höheren" mathematischen Standpunkt aus betrachtet oft *einfacher* und *stimmiger* (also *ästhetischer* oder *natürlicher*) erscheinen. Ein berühmtes Beispiel ist Hermann Minkowskis 1908 vorgestelltes Konzept der Vereinigung von Raum und Zeit zu einem **vierdimensionalen Raumzeit-Kontinuum**, das von einem geometrischen Standpunkt aus gedeutet werden kann. Einstein meinte – nicht ganz im Ernst –, dass er nun seine eigene Theorie nicht mehr verstehe, aber er erkannte die Vorteile einer geometrischen Sichtweise sehr schnell und baute auf ihr seine Allgemeine Relativitätstheorie auf, in der das Raumzeit-Kontinuum gekrümmt ist. Auch die moderne Elementarteilchenphysik hat sich eine geometrische Sichtweise zu Eigen gemacht, wobei der „Raum", in dem diese Geometrie lebt (die Menge der Konfigurationen gewisser Felder), ein weitaus abstrakterer ist als jener der beiden Relativitätstheorien.

Zusammenfassend betrachtet, erfüllt die Mathematik in der Physik mehrere Funktionen. Sie hilft uns, vermutete Zusammenhänge klar zu formulieren, überprüfbare Vorhersagen zu machen, in unserem Verlangen nach Verstehen die innere Logik von Modellen zu erforschen, weitreichende physikalische Gesetze zu formulieren und deren Konsequenzen herauszuarbeiten. Sofern diese Gesetze unseren Anschauungen widersprechen, hilft sie uns, mit ihnen zu operieren, ohne Fehler zu begehen, und sie erlaubt uns, einen „höheren" Blickwinkel einzunehmen, von dem aus die Dinge wieder einfacher erscheinen.

Vereinfachungen mathematischer Modelle

Für der Verständnis, aber auch im Zuge der Kommunikation mit anderen Wissenschaften, der Darstellung moderner Wissenschaft im Schulunterricht und der Vermittlung von Forschungsergebnissen in der Öffentlichkeit ist es nützlich, mathematische Modelle zu vereinfachen oder vereinfacht herzuleiten. Manchmal können mit Hilfe einer vereinfachten (also eigentlich „falschen“) Argumentationsweise „richtige“ Erkenntnisse erzielt werden.

Ein Beispiel dafür ist eine Argumentation, die zur Erkenntnis führt, dass das Universum (sofern angenommen wird, dass es aus normaler Materie besteht) entweder kontrahieren oder expandieren muss, nicht aber statisch sein kann. Die „richtige“ Herleitung des Bewegungsgesetzes des Universums (die so genannten Friedmann-Gleichungen) aus der Allgemeinen Relativitätstheorie erfordert einigen mathematischen Aufwand, aber es gibt ein „Newtonsches“ Argument, das im Kern die gleichen mathematischen Ergebnisse liefert, ohne dass dafür eine einzige Formel aufgeschrieben werden müsste:

- Gemäß dem „kosmologischen Prinzip“ wird die Materieverteilung im Großen als homogen und isotrop angenommen. Wir können sie uns als unendlich ausgedehnte gleichmäßige Verteilung von Punkten vorstellen, die Galaxien repräsentieren.
- Nun wählen wir zwei solcher Punkte (Galaxien) aus und nenne sie A und B. Wie ändert sich deren Abstand?
- Wir wählen einer der beiden Galaxien (A) als Referenzzentrum aus und stellen uns eine Kugel vor, deren Mittelpunkt A ist, und die bis zu B reicht.
- Nun bedienen wir uns eines Tricks: Aus der Newtonschen Gravitationstheorie ist bekannt, dass die Schwerkraft innerhalb einer Hohlkugel verschwindet. In diesem Sin fassen wir den Raum außerhalb der Kugel als unendliche Abfolge von „Zwiebelschalen“ auf – in Summe heben sich die Gravitationskräfte all dieser Galaxien auf B auf! Die Kraft auf B rührt daher nur von den Galaxien innerhalb der Kugel. Sie stellen eine bestimmte Gesamtmasse dar, die sich nicht ändert, wenn das Universum kontrahiert oder expandiert.
- Die Gravitationskraft, die von einer homogenen Kugel auf eine außerhalb von ihr liegende Masse ausgeübt wird, ändert sich nicht, wenn wir die Masse der Kugel in ihren Mittelpunkt konzentrieren. Daraus folgt: Galaxie B bewegt sich relativ zu A wie eine Probemasse im Gravitationsfeld einer Punktmasse (also bildlich gesprochen: wie ein kleiner Körper im Feld der auf einen Punkt zusammengeschrumpften Erde).
- Diese Bewegungsform ist aber wohlbekannt und – mit Abstrichen – aus dem Alltag bekannt: Ein Körper kann hinunterfallen oder „hinauf-fallen“. Im zweiten Fall ist er entweder schnell genug, der Zentralmasse zu entkommen, oder seine Höhe erreicht irgendwann ein Maximum, und danach fällt er wieder herunter. Andere Möglichkeit gibt es keine!
- Auf das Universum übertragen, impliziert das: Es kann nicht statisch sein! Diese Eigenschaft hat Albert Einstein veranlasst, eine zusätzliche abstoßende Kraft zu postulieren (die „kosmologische Konstante“), um ein statisches Universum zu erhalten. Nachdem die Expansion des Universums empirisch gefunden worden ist, hat er sie allerdings als „größte Eselei meines Lebens“ wieder zurückgezogen. In jüngster Vergangenheit ist sie als „Dunkle Energie“ wieder zu Ehren gekommen (Nobelpreis 2012 für die Entdeckung der beschleunigten Expansion des Universums)!
- Die mathematischen Gleichungen, die diese Bewegungsform beschreiben, sind – unter der Annahme normaler Materie – die gleichen, die aus der Allgemeinen Relativitätstheorie folgen, nur werden einige der Größen, die sie beschreiben, anders interpretiert.

Andere Beispiele vereinfachter Argumentationen, die auf die gleichen Ergebnisse führen wie mathematisch anspruchsvollere Theorien, sind die Berechnung des Schwarzschild-Radius einer gegebenen Masse (als jener Radius, den die Masse haben müsste, damit die Entweichgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit wäre) und die Herleitung der quantenmechanischen Nullpunktsenergie eines schwingenden Systems mit Hilfe der Heisenbergschen Unbestimmtsheitsrelation.

Ein mathematisches Modell aus der Biologie

Wir haben bisher von der Rolle der Mathematik in der Physik gesprochen. Mathematische Modellbildung spielt aber auch in anderen Naturwissenschaften eine wichtige Rolle. Als Beispiel wollen wir uns einen verblüffenden Sachverhalt aus der – vermeintlich „weicheren" – Wissenschaft der Evolutionsbiologie ansehen und anhand eines einfachen mathematischen Modells durchargumentieren.

In der Natur gibt es „**altruistisches**" (d.h. aufopferndes) **Verhalten**. Nicht nur Mütter vieler Arten beschützen ihre Jungen – wenn es sein muss, unter Einsatz ihres Lebens –, sondern auch weitläufigere Verwandte und sogar nichtverwandte Individuen stehen einander bei und verhalten sich kooperativ. Neben den vielzitierten Ameisen und Bienen, die ihr gesamtes Verhalten dem Gemeinwohl ihres Staates unterordnen, führen wir als weiteres Beispiel Vampir-Fledermäuse an, die einen Teil ihres in der Nacht ersaugten Mageninhalts an weniger erfolgreiche Artgenossen weitergeben. Wir wollen hier nur einen speziellen Typus von Altruismus betrachten: den zwischen Verwandten. Unsere zentrale Frage lautet:

> Wie können sich Gene (genauer: Allele), die ihren Träger zu altruistischem Verhalten gegenüber Verwandten veranlassen, in einer Population durchsetzen?

Schließlich könnte man ja argumentieren, dass die Evolution nur die Egoisten begünstigt! Was nützt es einem Individuum, wenn es anderen hilft (vielleicht sogar zu Tode kommt) und dabei die eigene Reproduktion (Fortpflanzung) vernachlässigt? Wenn es weniger Nachkommen hat als jene Individuen, denen es geholfen hat – müsste dann die Veranlagung zu einem solchen Verhalten in der nächsten Generation nicht *weniger* vertreten sein?

Um diese Frage anhand eines einfachen mathematischen Modells zu diskutieren, machen wir ein paar idealtypische Annahmen, die sich zwar so in der Natur nicht finden, die es uns aber erlauben werden, eine *prinzipielle Antwort* auf unsere Frage zu finden:

- Wir betrachten irgendeine biologische Art, für die die **Mendelschen Vererbungsregeln** zutreffen. Details dazu können Sie auf der Seite „Mendel und die Mathematik der Vererbung" unter http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/aussermathAnw/Vererbung.html nachlesen. Ganz kurz zusammengefasst: Jedes Individuum hat zwei Varianten von jedem Gen (zwei Allele) geerbt – eines von der Mutter und eines vom Vater.
- Nun betrachten wir **Geschwister** dieser Art. Wir nehmen an, dass Gruppen von Geschwistern manchmal (nicht zu oft, aber doch ab und zu – sagen wir durchschnittlich einmal in ihrem Leben) in arge Bedrängnis kommen, die schlimm ausgehen kann.
- Eines dieser Individuen – wir nennen es X – soll nun ein (durch zufällige Mutation entstandenes und bereits in der Keimbahn eines Elternteils vorhandenes) Allel tragen, das es zu einem außergewöhnlichen Verhalten veranlasst: Im Moment der höchsten Gefahr **opfert**

es sich für seine Geschwister **und stirbt**! Die einzige Alternative wäre, zu überleben und dafür alle seine Geschwister zu verlieren. Dieses Modell für extremen Altruismus ist in Richard Dawkins Buch „Das egoistische Gen“ nachzulesen. Dawkins nennt das betreffende Allel „**Selbstmörder-Gen**“, eine schöne Bezeichnung, die wir im Folgenden auch verwenden wollen.
- Die Frage lautet nun, ob ein solches Selbstmörder-Gen eine Chance hat, sich in der Population auszubreiten.

Noch ist das kein *mathematisches* Modell, und noch kann es uns nicht besonders helfen. Der entscheidende Schritt besteht nun darin, zu berücksichtigen, dass sich das Selbstmörder-Gen auf die **Rettung von Geschwistern** bezieht. Aufgrund der Mendelschen Vererbungsregeln, deren Gültigkeit wir ja voraussetzen, vererbt jeder Elternteil (wir nehmen an, dass alle unsere Geschwister beide Eltern gemeinsam haben) jedes konkrete Allel mit der Wahrscheinlichkeit ½ an jedes der gemeinsamen Kinder. Wenn also ein Elternteil das durch Mutation in der Keimbahn entstandene Selbstmörder-Gen weitergeben kann, so bedeutet das, dass jedes Geschwister von X es mit einer Wahrscheinlichkeit von ½ ebenfalls in sich trägt! Damit sieht die Sache schon anders aus: Vom Standpunkt der Evolution ist es gleichgültig, *auf welchem Weg* das Selbstmörder-Gen in die nächste Generation kommt. Entscheidend ist nur, wie viele Individuen es erben und damit in die übernächste Generation weitergeben können, und so fort.

Nach unserem Modell lautet die Alternative also: entweder X stirbt und alle seine Geschwister überleben, oder X überlebt und alle seine Geschwister sterben. Da X das Selbstmörder-Gen besitzt, wählt er (oder sie) die erste Möglichkeit. Um berechnen zu können, was das für die Ausbreitungschancen des Selbstmörder-Gens bedeutet, müssen wir die **Zahl der geretteten Geschwister** als Parameter in unser Modell aufnehmen. Wir nennen es n. Damit wird unser Szenario zu einem wahrhaftigen mathematischen Modell: Wenn X ein Allel besitzt, das es zur „Rettung von n Geschwistern“ veranlasst – wie viele Kopien dieses Allels werden dann durch das Verhalten von X gerettet und wie viele gehen unter?

Das Modell läuft auf eine einfache Wahrscheinlichkeitsaufgabe hinaus. Wir können es noch einfacher gestalten, indem wir es statistisch interpretieren und annehmen, dass mehrere derartige Situationen (mit verschiedenen Gruppen von Geschwistern) vorkommen.

Diskutieren wir die Sache für die ersten Werte des Parameters n durch:

- Fall $n = 1$ („Allel zur Rettung eines Geschwisters“):
  Das Geschwister von X wird das betreffende Allel mit der Wahrscheinlichkeit ½ ebenfalls besitzen. Das bedeutet, dass nach der Aufopferung von X „durchschnittlich“ nur eine halbe Kopie überleben wird. Passiert eine solche Situation (mit verschiedenen Gruppen von Geschwistern) 10 mal, so werden geschätzte 5 Kopien des Allels gerettet, während 10 Kopien mit ihren Trägern (X_1 bis X_{10}) untergehen. Ein solches Allel wird sich nicht ausbreiten!
- Fall $n = 2$ („Allel zur Rettung von zwei Geschwistern“):
  Jedes Geschwister von X wird das betreffende Allel mit der Wahrscheinlichkeit ½ ebenfalls besitzen. Das bedeutet, dass in 10 solchen (unterschiedlichen) Geschwistergruppen ungefähr die Hälfte aller Geschwister unserer X_1 bis X_{10} das Allel besitzen, also insgesamt 20/2 = 10. Es sind dann genauso viele Kopien in X_1 bis X_{10} wie in ihren Geschwistern. Wenn nun alle X_1 bis

X_{10}, anstelle ihrer Geschwister sterben, spielt das für die Zahl der in die nächste Generation geretteten Kopien des Allels keine Rolle.

- Fall $n = 3$ („Allel zur Rettung von drei Geschwistern“):
  Nun wendet sich das Blatt: In 10 (unterschiedlichen) Geschwistergruppen werden wieder ungefähr die Hälfte aller Geschwister der Protagonisten X_1 bis X_{10} das Allel besitzen – das sind aber jetzt 30/2 = 15. Wenn sich X_1 bis X_{10} nun für ihre Geschwister aufopfern, so werden 10 Selbstmörder-Gene untergehen und dafür 15 gerettet! Das sind ideale Bedingungen für das Allel, sich in der Population auszubreiten.

Wir halten also fest:

Allel zur Rettung von	**durchschnittliche Anzahl der pro Aufopferung geretteten Kopien des Allels**	**Erfolg in der Population**
1 Geschwister	1/2	schlecht
2 Geschwister	1	neutral
3 Geschwister	3/2	gut

Ein „Allel zur Rettung von drei Geschwistern“ wird (unter den Bedingungen des Modells) einen großartigen evolutionären Erfolg erzielen.

Das Modell ist zugegebenermaßen nicht sehr realistisch, aber dennoch hilfreich: Einerseits zeigt es einen *Mechanismus* auf, der auch in der biologischen Wirklichkeit vorkommt: Wird in die Reproduktion von verwandten Individuen investiert anstatt in die eigene, so wird damit *auch* für den Erfolg von Allelen, die man selbst besitzt, gearbeitet, da identische Allele bei Verwandten öfter vorkommen als bei Nichtverwandten. Andererseits weist das Modell den Weg, realistischere Situationen zu modellieren, sofern bekannt ist (oder sinnvoll abgeschätzt werden kann) in welchem Ausmaß das zu erklärende Verhalten *indirekt* in Allele investiert, die es selbst hervorrufen. Ein solcher Ansatz vereinfacht natürlich Vieles, da Verhaltensunterschiede wohl nur selten von einem einzelnen Allel abhängen, sondern eher von ganzen Gruppen von Allelen, aber auch dies lässt sich im Prinzip modellieren.

Eine interessante Modifikation ergibt sich, wenn Arten betrachtet werden, für die **andere Vererbungsregeln** gelten als die Mendelschen. Hautflügler (zu denen Bienen, Wespen und Ameisen zählen) besitzen eine vererbungsmäßige Besonderheit, die für uns Menschen ein bisschen gewöhnungsbedürftig wäre: Da die Männchen bei diesen Arten nur einen einzigen Chromosomensatz besitzen, der direkt von der Mutter kommt, besitzt eine männliche Biene zwar keinen Vater, dafür aber einen Großvater mütterlicherseits. (Details auf der Seite „Verwandtschaft 1“ unter der Überschrift „Bienen, Wespen und Ameisen“, http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/aussermathAnw/Verwandtschaft1.html#Bienen). Die in einem Staat lebenden weiblichen Individuen dieser Arten (deren gemeinsame Mutter die Königin ist) sind untereinander näher verwandt als menschliche Schwestern, und konsequenterweise ist ihr Altruismus stärker ausgeprägt. (In erster Linie besteht er darin, auf die eigene Fortpflanzung zu verzichten).

Die Mathematik unseres Modells lässt sich übrigens auf die (etwas kompliziertere) Frage adaptieren, wie Tiere einer Art, die nur mehr durch wenige Exemplare vertreten sind, miteinander gekreuzt werden müssen, um die schädlichen Wirkungen von Inzest (Vererbung identischer Allele von beiden Elternteilen und damit größere Wahrscheinlichkeit von Erbkrankheiten) zu minimieren.

Vieles zur Rolle der Mathematik in der Biologie blieb aus Zeitgründen ungesagt, aber zumindest ein ganz zu Beginn genannter Aspekt der mathematischen Modellierung sollte auch für diesen Fall klar geworden sein: Zusammen mit entsprechenden idealisierenden Annahmen hilft sie uns, Zusammenhänge möglichst klar zu formulieren und – indem wir solche Modelle ernst nehmen und ihrer Logik folgen – Erkenntnisse über unsere Welt zu gewinnen. .

Der Logarithmus in der Geologie

Über diesen kleinen Abstecher in die Seismologie, ein Teilgebiet der Geologie, lesen Sie in der Präsentation zur Vorlesung, die Sie unter http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/MathematikNawi/ finden! Sie illustriert zum Ausklang anhand der Frage, wie die „Stärke" eines Erdbebens sinnvollerweise angegeben werden soll, die Nützlichkeit des Logarithmus, der ja heute fixer Bestandteil des Mathematik-Oberstufenstoffs ist.

Dieses Skriptum und die Präsentation zur Vorlesung (die Sie bitte zur Ergänzung ebenfalls konsultieren) finden Sie am Web unter http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/MathematikNawi/.

Prüfungsfragen

- Welche Rolle spielt die Mathematik in den Naturwissenschaften, im Speziellen in der Physik? Wobei hilft die mathematische Formulierung?
- Wie lautet Galileo Galileis Fallgesetz?
- Auf welchen idealisierenden Annahmen und Vereinfachungen beruht Galileo Galileis Fallgesetz? Nennen Sie einige!
- Hat die Frage, nach welcher Zeit ein fallender Körper sich nach dem Fallgesetz mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, einen vernünftigen Sinn? Können wir aus der Antwort etwas lernen?
- Ist die Physik in der Lage, aus den heute bekannten „fundamentalen physikalischen Gesetzen" (Elementarteilchenspektrum + 4 fundamentale Wechselwirkungen) *alle* beobachtbaren Phänomene mathematisch vorherzusagen?
- Was ist mit dem Begriff „Vereinheitlichung von Theorien" in der Physik gemeint?
- Führt der Fortschritt in der „Vereinheitlichung physikalischer Theorien" zu mehr oder zu weniger physikalischen Disziplinen?
- Erläutern sie die typische logische Grundstruktur einer physikalischen Theorie!
- Nennen Sie ein Beispiel für eine physikalische Theorie, in der es schwierig ist, herauszufinden, was sie eigentlich besagt.
- Geben Sie Beispiele für „unanschauliche" physikalische Konzepte!
- Geben Sie ein Beispiel für eine physikalische Theorie, die von einem „höheren" mathematischen Standpunkt aus betrachtet einfacher und natürlicher aussieht!
- Nennen Sie ein Beispiel für eine vereinfachte Argumentation, die mathematische Ergebnisse einer anspruchsvolleren Theorie reproduziert!
- Skizzieren Sie die Mendelschen Vererbungsregeln!
- Was ist ein Allel?
- Wie kann mit einem einfachen mathematischen Modell begründet werden, dass sich Allele, die ihre Träger zu altruistischem Verhalten veranlassen, in einer Population ausbreiten können?
- Warum gibt die Seismologie die „Stärke" eines Erdbebens in einer Skala an, die logarithmisch mit der freigesetzten Energie geht (und nicht durch diese Energie selbst)?