MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Ein Vorschlag für einen Ausblick auf die Nonstandard-Analysis innerhalb einer einführenden Analysis-Vorlesung

verfasst von | submitted by

Patrick Heyderer BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 511 520 02
Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach Geschichte und Politische Bildung Unterrichtsfach Mathematik
Betreut von | Supervisor:	Dr. Franz Embacher Privatdoz.

Abstract

This master's thesis provides a proposal for two complementary non-standard units in the course of an introductory calculus lecture for students of mathematics. The hyperreal numbers are introduced and constructed from scratch. For the construction, a didactic concept for the path to the ultrafilter is developed in the thesis. An introduction to non-standard analysis is presented, including the concepts of continuity and differentiability. Illustrations using concrete examples are shown throughout the entire work. The concluding remarks contain a brief outline of nonstandard analysis in (university) teaching.

für Alexandra

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Hyperreelle Zahlen **5**
2.1 Didaktische Vorbemerkungen 5
2.2 Konstruktion der hyperreellen Zahlen 8
2.3 Eigenschaften und das Rechnen in $^*\mathbb{R}$ 20

3 Nonstandard Analysis – Ein Ausblick **33**
3.1 Praktische Rechenregeln im Umgang mit hyperreellen Zahlen 33
3.2 Die hyperreelle Fortsetzung einer reellen Funktion 34
3.3 Stetigkeit 37
3.4 Differenzierbarkeit 41
3.5 Ausblick auf das mächtige Transferprinzip und die Nichtstandard-Welt . . 48

4 Schlussbemerkungen **51**

5 Zusammenfassung **53**

Literaturverzeichnis **53**

Abbildungsverzeichnis **55**

1 Einleitung

Die Analysis als Teilgebiet der Mathematik nimmt gleichermaßen im Schulunterricht und innerhalb der universitären Mathematik eine zentrale Stellung ein. Sie blickt dabei auf eine historisch lange Entwicklung zurück. Ihre modernen Wurzeln reichen bis ins 17. Jahrhundert zu Gottfried Wilhelm Leibniz und Sir Isaac Newton zurück. Je nach Sichtweise des Autors, lassen sich ihre Wurzeln noch viel weiter zurückverfolgen [Sonar 2016]. „Die von Leibniz und Newton erfundene Differentialrechnung entstand aus abenteuerlichen Rechnungen, die voll von Fehlern waren. Die beiden genialen Erfinder, die völlig unabhängig voneinander zu den gleichen Resultaten gelangten, waren überzeugt, dass ihre nachgerade sündhaften Verstöße gegen die Rechenregeln deshalb begangen werden müssen, weil die menschliche Erkenntnis nicht kraftvoll genug ist, in die Bereiche des „Unendlich-Kleinen“ zu schauen.“ [Taschner 2014, 226]

Die vorliegende Arbeit wird jedoch zeigen, dass sich die Mathematik mittlerweile so weit entwickelt hat, um mit unendlich kleinen Größen formal gewissenhaft umgehen zu können. Die heutzutage an Schulen und Universitäten gängige und daher in dieser Arbeit als „klassisch“ bezeichnete Analysis, hat sich von ihren Wurzeln weitgehend distanziert, indem sie sich schlichtweg exaktifiziert hat. Ausschlaggebend dafür waren die strengeren Formulierungen von Augustin-Louis Cauchy und Karl Weierstraß. „Das Fehlen einer sicheren mathematischen Grundlage führte jedoch schließlich zur Abkehr von der Benutzung infinitesimaler Größen und mündete in die von Weierstraß (1815-1897) entwickelten ε, δ-Methoden („Epsilontik“) zur Behandlung von Grenzprozessen. Die Physiker konnten sich jedoch nie von den intuitiven und nützlichen infinitesimalen Größen trennen, und auch die Sehnsucht der Mathematiker nach einer Theorie des Infinitesimalen blieb ungebrochen.“ [Landers 1994, 1]

Die Entwicklung der Nichtstandard-Analysis in den 1960er Jahren machte es schließlich möglich, die von Leibniz und Newton geprägten Vorstellungen von infinitesimalen Größen in ein mathematisch-gesichertes Fundament zu gießen. Durch sie, so lässt es sich jedenfalls salopp formulieren, können wir heute wie damals rechnen, nur eben mathematisch völlig korrekt nach klaren Regeln. Doch wie ist das plötzlich möglich? Nun, genau diese Frage zu beantworten und für Bachelor-Studierende der Mathematik der ersten beiden Semester aufzubereiten, ist das zentrale Ziel dieser Arbeit. Die Nonstandard-Analysis ist als alternativer Zugang neben der klassischen Analysis anzusehen und bleibt – zumindest vorerst – ein Nischenfach. Kurt Gödel, einer der prägendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, sehnte die Entwicklung einer Nonstandard-Analysis herbei. „Rather there are good reasons to believe that non-standard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future. ... I think, in coming centuries it will be considered a great oddity in the history of mathematics that the first exact theory of infinitesimals was developed 300 years after the invention of the differential calculus.“ [Robinson 1996, xvi]

Beim Studium der Mathematik innerhalb des Bachelorstudiums an der Universität Wien wird ausschließlich auf der klassischen Analysis, also mit dem Grenzwertbegriff im Zentrum, aufgebaut. Es wird also im gesamten Bachelorstudium sogenannte Standard-Mathematik betrieben. Um ein umfassendes Bild der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin zu schaffen, nebst den vielen darin offerierten Disziplinen und wählbaren Spezialisierungen, böte sich ein kompakt gefasster Exkurs über die Nichtstandard-Analysis an.

Das Ziel dieser hochschuldidaktischen Arbeit ist es also, einen Vorschlag für zwei ergänzende Vorlesungseinheiten zur Nonstandard-Analysis, im Rahmen einer einführenden Analysisvorlesung, zu geben. Ausgehend von der *Konstruktion der hyperreellen Zahlen* mittels Ultrafilter und den daraus resultierenden Eigenschaften, werden dann zentrale Begriffe der Nonstandard-Analysis, wie *Stetigkeit* und *Differenzierbarkeit*, besprochen. Das Herzstück der Arbeit ist der für dieses Vorhaben entwickelte didaktische Vorschlag zur Aufbereitung der Konstruktion der hyperreellen Zahlen mittels Äquivalenzklassen reeller Folgen und Ultrafilter. Aufgrund der hohen mathematischen Komplexität der Konstruktion, insbesondere für Studienanfänger*innen, wird diesem Vorhaben dementsprechend viel Platz eingeräumt. Der Modus als nahtlose Ergänzung der klassischen Vorlesung hat einerseits den Vorteil, dass die Nichtstandard-Begriffe mit jenen der klassischen Analysis direkt verglichen und letztere unterdessen sogleich vertieft werden können. Andererseits bin ich der festen Überzeugung, dass die vereinfachte Herangehensweise bei der Nichtstandard-Differentialrechnung für das grundlegende Verständnis eine Bereicherung sein kann. In [Bedürftig et. al 2022] wird das bestätigt und überdies sogar ein Vorschlag für ein Unterrichtskonzept für die Sekundarstufe vorgelegt, in diesem Fall natürlich nur anhand eines axiomatischen Zugangs, ohne Konstruktion. Außerdem soll die in der Nichtstandard-Analysis vielerorts vielfach einfachere Beweisführung anhand ein paar exemplarisch ausgewählter Sätze verdeutlicht werden. Kurt Gödel selbst hebte die in der Nichtstandard-Analysis einfacheren Beweisführungen als signifikanten Vorteil hervor. Schließlich soll mit dem für die Nichtstandard-Mathematik mächtigen Transferprinzip ein für Erstsemester zugänglicher Ausblick auf die Nichtstandard-Welt und ihren modelltheoretischen Zugängen ermöglicht werden.

Sämtliche Studierende von MINT[1]-Fächern betreten die Räume der österreichischen Universitäten mit mehr oder minder ausgeprägten Präkonzepten und intuitiven Begriffsvorstellungen der Analysis. In der Schule zieht man sich bekanntlich zumeist auf einen propädeutischen Grenzwertbegriff zurück. Der formale Tiefgang endet in der Schulpraxis dann oft bereits auf seichter Ebene, mit einem zumindest intuitiven Begriffsverständnis des Limes – wenn überhaupt. Der ausbleibende formale Tiefgang ist aus meiner Sicht, durch die Brille der täglichen Schulpraxis, völlig nachvollziehbar. Denn führt man sich

[1] MINT steht für Mathematik, Informatik, Technik

sämtliche Kompetenzkataloge der SRDP[2] (Stand: November 2023) für AHS und BHS vor Augen, so wird stets lediglich ein intuitives Begriffsverständnis dessen gefordert. Es ist also eine realistische Annahme, das Schüler*innen mit dementsprechenden Präkonzepten in die Universitäten eintreten. Vielleicht ist in einzelnen Fällen stattdessen oder gar zusätzlich als alternative Erklärung ein auf Infinitesimalien beruhendes Begriffsverständnis vorhanden. Jedenfalls bietet der hier vorgeschlagene Nichtstandard-Zugang zur Differentialrechnung eine zusätzliche Chance, die aus der Schule vorhandenen Präkonzepte (ergänzend zum klassischen Zugang) aufzugreifen und weiterzuentwickeln.

Eine für mich persönlich wichtige Quintessenz der Arbeit ist, Studienanfänger*innen damit auch implizit zu zeigen, dass Physiker*innen mit gutem Wissen und Gewissen mit Differentialen jonglieren können und ihre situationselastische Saloppheit sozusagen durch die Mathematik abgesichert ist.

Die Schlussbemerkungen sollen die didaktischen Überlegungen nochmals aufgreifen und abrunden.

[2] Standardisierte Reife- und Diplomprüfung

2 Hyperreelle Zahlen

2.1 Didaktische Vorbemerkungen

So wie sich die reellen Zahlen auf unterschiedliche Arten konstruieren lassen, gibt es auch unterschiedliche Zugänge bei der Konstruktion der hyperreellen Zahlen. Abraham Robinson erschaffte in den 1960er Jahren mit seinem streng modelltheoretischen Zugang die Grundlage für den Einzug der hyperrellen Zahlen in die moderne Mathematik. Die sogenannten Nicht-Standardmethoden breiteten sich auf zahlreiche Teilgebiete der Mathematik aus, Beispiele hierfür finden sich in Robinsons Klassiker [Robinson 1996]. Die Anwendungen sind nicht nur innermathematischer Natur, sondern breiten sich auf zahlreiche Gebiete der angewandten Mathematik aus.

Zu Beginn während meines eigenen Studiums schätzte ich den unkomplizierten axiomatischen Zugang in der einführenden Analysis-Vorlesung (*Analysis 1 für technische Mathematik und Lehramt*[1]), da dieser meines Erachtens für Erstsemester einen sanften Einstieg ermöglichte. H. Jerome Keisler hatte in den 1970er Jahren aus ebendiesen didaktischen Überlegungen eine axiomatische Einführung in die hyperreellen Zahlen für Studierende der ersten Semester entwickelt, siehe dazu [Keisler, Elem.Calc. 2022] und [Keisler, Foundations 2022], wobei letzteres Werk von ihm eher als vertiefende Literatur für Dozent*innen oder für weiterführende Seminare gedacht ist. Seine Intention mit den beiden Werken war, Robinsons Werk für Studienanfänger*innen zugänglich zu machen. „The simple set of axioms for the hyperreal number system given here (and in Elementary Calculus) make it possible to present infinitesimal calculus at the college freshman level, avoiding concepts from mathematical logic.“ [Keisler, Foundations 2022, ix]
Aber nicht nur das, er hat damit einen völlig alternativen Weg zum Einstieg in die Hochschulmathematik (bzw. Hochschul-Analysis) geschaffen, den er selbst im Laufe der Jahre auch quantitativ an seinem Institut erforscht hat.

Der sogar persönlich erlittene Nachteil der rein axiomatischen Einführung war, dass ich mich erstmals in meinem Lehramts-Masterstudium mit der Konstruktion der reellen Zahlen – und das dann auf rein freiwilliger Basis außerhalb der obligatorischen Seminare – befasste. Ich habe das Zustandekommen der reellen Zahlen, das muss ich traurigerweise eingestehen, bis dato weder wirklich hinterfragt, noch hat es mich jemand gelehrt, das zu tun. Sie waren für mich so vorhanden, wie der Mond in der Nacht und der blaue Himmel am Tag. Ich verfolge mit dieser Arbeit grundsätzlich dieselbe Absicht wie Keisler, nämlich die Nonstandard-Analysis für Studierende der ersten Semester zugäng-

[1] an der JKU Linz im Wintersemester 2015 bei Univ.-Prof. Aicke Hinrichs

lich zu machen. Jedoch verfolge ich in dieser Arbeit insbesondere auch das Ziel, die Konstruktion der hyperreellen Zahlen didaktisch umfassend aufzubereiten. Ausgegangen wird dabei von der Menge der reellen Folgen, in Analogie zu den rationalen Folgen bei der Konstruktion von $\mathbb{R}$ mittels Cauchy-Folgen. Bis zu den sich aus der Identifikation von Folgen mittels geeigneter Äquivalenzrelation ergebenden Äquivalenzklassen und bis zum Ultrafilter, ist es ein langer und steiniger Weg. Dieser Weg wird in einschlägigen Lehrbüchern meines Erachtens oft zu rasch durchlaufen. Das in dieser Arbeit entwickelte didaktische Konzept greift genau dort an. Es beinhaltet neun umfassend formulierte **Wünsche (W1–W9)** bezogen darauf, wann zwei reelle Folgen äquivalent sein sollen. Die sukzessive anhand von Beispielen motivierte Wunschliste führt dann schließlich zur Notwendigkeit eines sogenannten Ultrafilters, der im didaktischen Konzept als **Menge der wesentlichen Indexmengen $\mathcal{W}$** ausgewiesen ist. Ebenso führt die Wunschliste auf natürliche Weise auf die Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen.

Das didaktische Konzept dieser Arbeit setzt tendenziell eine Konstruktion der reellen Zahlen innerhalb der klassischen, einführenden Analysis-Vorlesung voraus. Andernfalls würde sich ja erst recht die Frage nach der Notwendigkeit der Konstruktion stellen, wenn man das Ganze ja auch problemlos axiomatisch einführen kann. Didaktisch am geeignetsten fände ich es, die Konstruktion der hyperreellen Zahlen an die Konstruktion von $\mathbb{R}$ mittels Cauchyfolgen anzuschließen, da sich die beiden Methoden ja am meisten ähneln.

So spielt die zu einem frühen Zeitpunkt der mathematischen Ausbildung auftretende hohe Komplexität der Konstruktion der reellen Zahlen wohl fast in einer jeden einführenden Analysis-Vorlesung eine tragende Rolle, sofern man $\mathbb{R}$ nicht nur axiomatisch einführt. Sie kann für Studienanfänger*innen demnach einen schwierigen Abschnitt beim Lernen darstellen. Die reellen Zahlen lassen sich auf unterschiedliche Arten aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruieren. An dieser Stelle möchte ich insbesondere die Konstruktion anhand von *dedekindscher Schnitte*, *Intervallschachtelungen* und *Cauchyfolgen* erwähnen. Ungeachtet dessen, welche Konstruktionen in der Vorlesung behandelt werden, werden die reellen Zahlen jedenfalls auch axiomatisch eingeführt, in dem Sinn, dass man von ihnen die Körperaxiome fordert. Das heißt, es werden ihnen Struktureigenschaften zugeschrieben, durch welche sich der Bereich der reellen Zahlen eindeutig charakterisieren lässt. Diese Liste von Eigenschaften lässt sich in drei Überschriften gliedern: die Grundrechnungsarten, die Ordnung und die Vollständigkeit. Das durch eine solche Herangehensweise entwickelte Vorwissen wird für das Konzept der vorliegenden Arbeit ebenso vorausgesetzt.

Die Studierenden, die schließlich die beiden ergänzenden Einheiten zu den hyperreellen Zahlen bzw. zur Nonstandard-Analysis am Ende des Vorlesungszyklus hören, sollten also folgende Eigenschaft ausführlich erklären können, da ein sicherer Umgang mit diesen Begriffen unabdingbar für das Verständnis von allem Weiteren erscheint:

Die reellen Zahlen bilden einen vollständig angeordneten Körper.

Theoretisch könnten Studierende auch ohne der Konstruktion ein ziemlich umfassendes Verständnis über das Konzept, die daraus folgenden Begriffe, Eigenschaften und Rechenoperationen der Nichtstandard-Analysis erlangen – zumindest heuristisch gesehen, so wie das Keisler in seiner stark vereinfachten axiomatischen Einführung [Keisler, Elem.Calc. 2022] vorschlägt. Das ist ja bei den reellen Zahlen genauso der Fall, wenn man an den Schulunterricht der Oberstufe (Sekundarstufe II) denkt. Man muss demnach die Konstruktion der reellen Zahlen nicht gehört oder verstanden haben, um die Grundkonzepte der klassischen eindimensionalen Analysis zu verstehen, sofern man die reellen Zahlen auf der Zahlengeraden als gegeben annimmt. Es genügt dafür also ein sicheres Verständnis ihrer Eigenschaften und ihrer Axiome.

Jetzt bietet sich natürlich folgender Einwand an: Warum nicht die ausführliche, modelltheoretische Konstruktion der hyperreellen Zahlen zur Gänze überspringen? Nun, es handelt sich um Bachelor-Studierende der Mathematik, dementsprechend ist von einem überdurchschnittlichen Interesse und Neugier an der Thematik auszugehen. Somit darf man auch erwarten, dass der Anspruch, die Konstruktion in ihren Grundzügen zu verstehen, von Seiten der Studierenden gegeben ist.

Im didaktischen Konzept schlägt sich die Komplexität der Konstruktion so nieder, dass etwas mehr als die Hälfte der zur Verfügung stehenden Vorlesungszeit für die Konstruktion der hyperreellen Zahlen, ihren Eigenschaften und die ihnen gemäße Sprechweise reserviert ist:

Erste Vorlesung:

- *Konstruktion von* $^*\mathbb{R}$
- *Eigenschaften*

Zweite Vorlesung:

- *Sprechweise*
- *Rechenregeln*
- *Anwendung in Nonstandard-Analysis zur Definition von Stetigkeit und Differenzierbarkeit*
- *Ausgewählte Sätze inklusive Beweise*
- *Grober Ausblick auf das Transferprinzip und die damit einhergehenden modelltheoretischen Begriffe*

2.2 Konstruktion der hyperreellen Zahlen

Bei der Erweiterung der reellen Zahlen zu den hyperreellen Zahlen halte ich mich primär an [Landers 1994]. Ergänzend verwende ich auch, vor allem aber im Bereich der Filtertheorie, [Di Nasso et.al. 2019] und [Laures 2009]. Jener Zugang zur Nonstandard-Analysis beruht auf der Filter- bzw. Ultrafiltertheorie und dem Lemma von Zorn. Bei manchen der folgenden Aussagen werde ich auf einen Beweis verzichten. Sämtliche Beweise und modelltheoretische Hintergründe können beispielsweise in [Landers 1994] nachgelesen werden.

Das Ziel des folgenden Abschnittes ist es, die reellen Zahlen um „unendlich große" und „unendliche kleine Zahlen" zu erweitern und diese in ein mathematisch gesichertes Fundament zu gießen. Dies passiert mit der Absicht, mit diesen neuen Zahlen später den Grenzwertbegriff zu ersetzen. Die Quintessenz ist die, dass hingegen nun – anders als beim klassischen Grenzwertprozess am Beispiel Limes für $x \to 0$ – an einem unendlich kleinen Abstand vor 0 halt gemacht wird. Das ist quasi sehr nahe auf den Spuren der ursprünglichen Vorstellungen von Leibniz und Newton. Mit Hilfe solcher „unendlich großen" und „unendlich kleinen" Zahlen, nachdem sie zur Verfügung stehen, ihre Eigenschaften bekannt sind und Klarheit darüber herrscht, wie mit ihnen zu Rechnen ist, werden schließlich die zentralen Begriffe der Nonstandard-Analysis erarbeitet.

Die hyperreellen Zahlen sollen einen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ darstellen, der von nun an wie üblich mit $^*\mathbb{R}$ bezeichnet wird. Doch wie sieht dieser nun genau aus und auf welchem Weg erhalten wir ihn? Welche „Kunstgriffe" sind dafür nötig? Die zündende Idee muss jedoch nicht vollkommen neu entwickelt werden, es kann vielmehr auf bereits Bekanntes aus der Konstruktion von $\mathbb{R}$ zurückgegriffen werden. Bei der Konstruktion der reellen Zahlen anhand von Cauchy-Folgen werden die reellen Zahlen als Folgen von rationalen Zahlen aufgefasst. Dabei erhält man schließlich $\mathbb{R}$ als die Menge aller Äquivalenzklassen rationaler Cauchy-Folgen, wobei die rationalen Zahlen mit den konstanten Folgen identifiziert werden. Ferner definiert man die Addition und Multiplikation dieser Folgen punktweise und rechnet folglich mit den Repräsentanten der jeweiligen Äquivalenzklasse. Zwei Folgen sind dann gemäß der eingeführten Äquivalenzrelation Cauchy-äquivalent, falls deren Differenzfolge gegen Null konvergiert. Hieraus folgt dann schließlich die bekannte Äquivalenz von $0,\dot{9} = 1$, was aber eben nur innerhalb $\mathbb{R}$ gilt und nicht innerhalb $^*\mathbb{R}$, wie wir später noch feststellen werden.
Hyperreelle Zahlen sollen nun durch reelle Folgen beschrieben werden. Wir gehen also nun einen Schritt weiter und möchten die hyperreellen Zahlen mithilfe reeller Folgen konstruieren. Die beiden Konstruktionen ähneln sich demnach in vielen Punkten, vor allem aber auch in der Annahme der rationalen Zahlen bzw. reellen Zahlen als gesichertes Fundament.

Die innerhalb der Konstruktion benötigten Bedingungen, Eigenschaften und Objekte sollen nun Schritt für Schritt motiviert werden. Hyperreelle Zahlen sollen also durch unendliche Folgen beschrieben werden, so viel steht einmal fest. Demnach benötigen wir für die Konstruktion zuallererst die Menge der reellen Folgen, kurz mit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Definition 1. Die Menge aller Abbildungen $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wird als die Menge aller reellwertiger Folgen bezeichnet, kurzum mit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Bemerkung. (1) Wir bezeichnen die Elemente aus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ im Folgenden mit kleinen griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma \ldots$.
(2) Das n-te Folgenglied von α wird mit α_n bezeichnet.

Ähnlich wie mit den rationalen Zahlen bei der Konstruktion der reellen Zahlen mittels Cauchy-Folgen, verfahren wir fortan mit den reellen Zahlen und identifizieren sie mit den konstanten Folgen. Die daraus resultierenden Vorteile werden noch im Laufe der Konstruktion sichtbar werden.

Beispiel 1. Der reellen Zahl 42 wird demnach die konstante Folge (Abbildung)

$$\alpha = (42; 42; 42; 42; \ldots) = 42$$

zugeordnet.

Andererseits enthält die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ auch Folgen, dessen Glieder irgendwann Werte annehmen, die größer bzw. kleiner als jede reelle Zahl sind. Zugegebenermaßen ist diese Vorstellung schwieriger einzusehen, als die Idee, mit solchen Folgen „unendlich kleine“ bzw. „unendlich große“ Zahlen festlegen zu wollen.

Beispiel 2. Die Überlegung ist die, dass die Folge β, mit

$$\beta = (4,2; 42; 420; 4200; 42000; \ldots),$$

irgendwann größer als jede reelle Zahl werden wird. Die Folge γ, mit

$$\gamma = (1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \ldots),$$

wird hingegen irgendwann kleiner als jede positive reelle Zahl werden, aber stets größer Null bleiben.

In unserem Fall möchten wir natürlich auch rechnen können, daher führen wir auf der Menge der reellwertigen Folgen die punktweise Addition und Multiplikation ein. Werden also zwei Folgen addiert, so ergibt sich die Summenfolge durch gliedweise Addition der Folgenglieder. Das Ergebnis selbst ist dann wieder eine reelle Folge (d.h. eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$). Die Abgeschlossenheit der Menge aller reellen Folgen bezüglich dieser beiden Rechenoperationen ist also direkt ersichtlich.

Beispiel 3. Wir addieren zuerst zwei reelle Zahlen, präziser formuliert, zwei konstante Abbildungen. Es seien $\alpha = (42; 42; 42; 42; \ldots)$ und $\beta = (1; 1; 1; 1; \ldots)$, dann ist

$$\alpha + \beta = (42 + 1; 42 + 1; 42 + 1; 42 + 1; \ldots) = (43; 43; 43; 43; \ldots).$$

Nun addieren wir zur Folge α die Folge $\gamma = (1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots)$

$$\alpha + \gamma = (42 + 1; 42 + 0,1; 42 + 0,01; 42 + 0,001; \dots) = (43; 42,1; 42,01; 42,001; \dots)$$

Spannender als die Rechnung selbst ist in diesem Fall die Interpretation des Ergebnisses. Denn die Summenfolge soll hier für eine Zahl stehen, die einerseits größer als die reelle Zahl 42 ist, aber andererseits näher bei ihr liegt als jede andere denkbare reelle Zahl.

Analog führen wir nun folgende punktweise Multiplikation durch.

Beispiel 4. Sei nun $\alpha = (2; 20; 200; 2000; \dots)$ und $\beta = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \dots)$, dann ist

$$\alpha \cdot \beta = \left(2 \cdot \frac{1}{2}; 20 \cdot \frac{1}{2}; 200 \cdot \frac{1}{2}; 2000 \cdot \frac{1}{2}; \dots\right) = (1; 10; 100; 1000; \dots)$$

Das ist jetzt vielleicht wohl wenig überraschend. Betrachten wir aber nun folgendes Beispiel.

Beispiel 5. Es sei $\alpha = (0; 20; 0; 2000; 20000; \dots)$ und $\beta = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \dots)$, dann ist deren Produkt gegeben durch

$$\alpha \cdot \beta = (0; 10; 0; 1000; 10000; \dots).$$

Es sei nun $\alpha' = (2; 0; 200; 2000; 20000; \dots)$, dann ist

$$\alpha' \cdot \beta = (1; 0; 100; 1000; 10000; \dots)$$

eine Folge, die sich nur an endlich vielen (genauer gesagt an drei) Stellen von der Folge $\alpha \cdot \beta$ unterscheidet.

Sieht man also genauer hin, erkennt man, dass sich die beiden Produktfolgen „im Unendlichen“ gleich verhalten, die beiden Produkte sind demnach im Wesentlichen dieselben. Das heißt, sie stimmen also in fast allen Folgengliedern, bis auf endlich viele, überein. Wie behandeln wir nun Folgen, die an fast allen Stellen übereinstimmen, also im Wesentlichen ident sind? Intuitiv offenbart sich der Wunsch, solche Folgen miteinander zu identifizieren, zu sagen, zwei Folgen sollen äquivalent sein, wenn sie an den wesentlichen Indizes übereinstimmen. Sie sollen sich also „im Unendlichen“ gleich verhalten. Doch wann ist nun eine Indexmenge wesentlich und welche Eigenschaften werden von ihr verlangt?

Ohne zu wissen wie sie aussieht und welche Eigenschaften gelten müssen, sei $\mathcal{W}$ die Menge aller wesentlichen Indexmengen. Unter den wesentlichen Indexmengen $\mathcal{W}$ verstehen wir die Menge aller wesentlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Von vornherein ist lediglich klar, dass $\mathcal{W} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N})$ sein muss, wobei $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist.

Formal kurzgefasst, soll für zwei Folgen γ und γ' gelten:

$$\gamma \text{ ist äquivalent zu } \gamma' \iff \{n \in \mathbb{N} : \gamma_n = \gamma'_n\} \in \mathcal{W}.$$

Mathematisch etwas präziser ausgedruckt, sollen zwei Folgen zueinander genau dann in

Relation stehen, falls die Menge der Indizes, auf der sie übereinstimmen, wesentlich ist.

$$\gamma \sim \gamma' \Longleftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : \gamma_n = \gamma'_n\} \in \mathcal{W}.$$

Stimmen zwei Folgen in allen Folgengliedern überein, so sollen sie ja erst recht zueinander äquivalent sein. Das führt uns zu unserer ersten Forderung in der nun folgenden **Wunschliste an $\mathcal{W}$ und $\sim$.**

Jede Folge soll zu sich selbst äquivalent sein, ihre wesentliche Indexmenge wäre dann $\mathbb{N}$.

W1: Es muss $\mathbb{N} \in \mathcal{W}$ sein.

Daraus ergibt sich sofort der nachfolgende Wunsch.

W2: Die Relation $\sim$ muss reflexiv sein.

Ist es genau umgekehrt, unterscheiden sich zwei Folgen an allen Stellen, so sollen sie (logischerweise) nicht äquivalent sein. Bereits aus den obigen Beispielen und der Grundidee, ergibt sich, dass $\mathcal{W}$ nicht leer sein darf und die leere Menge nicht wesentlich sein kann.

W3: Es muss $\emptyset \notin \mathcal{W}$ und $\mathcal{W} \neq \emptyset$ sein.

Der Wunsch nach Symmetrie liegt ebenso auf der Hand, denn wenn $\alpha \sim \gamma$ gilt, soll das gleichbedeutend zu $\gamma \sim \alpha$ sein, da die (wesentliche) Indexmenge dadurch unverändert bleibt.

W4: Die Relation $\sim$ muss symmetrisch sein.

Beispiel 6. Es sei $\alpha = (2; 20; 200; 2000; \dots), \alpha' = (2; 0; 200; 2000; 20000; \dots)$ und $\alpha'' = (2; 0; 0; 2000; 20000; \dots)$. Die Menge an Indizes A, an denen die Folgen α und α'' übereinstimmen sei eine wesentliche, da sich die beiden Folgen „im Unendlichen“ gleich verhalten und sich an nur zwei Stellen unterscheiden. Ebenso sei die Menge an Indizes B, an denen die Folgen α und α' übereinstimmen eine wesentliche. Wir können hier die beiden wesentlichen Indexmengen $A = \mathbb{N} \setminus \{2; 3\}$ und $B = \mathbb{N} \setminus \{2\}$ sogar explizit angeben und darüber hinaus feststellen, dass $A \subseteq B$ gilt.

In Anbetracht dessen wäre es hier sinnvoll zu fordern, dass eine wesentliche Menge durch Hinzunahme von Elementen eine wesentliche Menge bleibt.

W5: Ist A wesentlich und $A \subseteq B$, so soll auch B wesentlich sein.

Klar ist bereits unser Anspruch, dass wenn sich zwei Folgen an nur endlich vielen Stellen unterscheiden (d.h. auch an unendlich vielen Stellen übereinstimmen), wir diese als äquivalent betrachten. Dann ist die Indexmenge, worin die beiden Folgen übereinstimmen, jedenfalls wesentlich. Grundsätzlich kommen ja nur die unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ in Frage, wenn sich zwei Folgen „im Unendlichen“ bzw. an unendlich vielen Stellen gleich verhalten sollen. Ist das Komplement einer Menge endlich, so muss diese eine wesentliche Menge sein.

W6: Sei A eine Indexmenge. Ist A selbst endlich, so kann sie nicht wesentlich sein. Falls aber $\mathbb{N} \setminus A$ endlich ist, so muss $A \in \mathcal{W}$ gelten.

Auf Basis unserer Überlegungen bisher, müssen wesentliche Mengen (abzählbar) unendlich sein. Eine wesentliche Menge, der man endlich viele Elemente wegnimmt, soll stets wesentlich bleiben. Nun ein etwas ausführlicheres Beispiel.

Beispiel 7. Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, mit

$$\alpha = \left(\frac{1}{n+1}\right)_n = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}, \ldots\right)$$

und

$$\beta = \left(42; 42; 42; 42; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \ldots\right), \text{ also explizit } \beta = \begin{cases} 42, \text{falls } n \leq 4 \\ \left(\frac{1}{n+1}\right)_n, \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann ist α äquivalent zu β, denn die Menge A=$\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \beta_n\} = \mathbb{N} \setminus \{1; 2; 3; 4\}$ muss ja wesentlich sein, da $\{1; 2; 3; 4\}$ endlich ist – das haben wir oben so gefordert. Die beiden Folgen stimmen also an fast allen Folgenindizes überein und unterscheiden sich demnach nur an endlich vielen (konkret an vier) Stellen.
Nun sei aber

$$\gamma = \left(42; 42; \ldots; \frac{1}{112}; \frac{1}{113}; \ldots\right), \text{ also explizit } \gamma = \begin{cases} 42, \text{falls } n \leq 111 \\ \left(\frac{1}{n+1}\right)_n, \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann ist α auch äquivalent zu γ, denn die Menge B=$\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \beta_n\}$
$= \mathbb{N} \setminus \{1; 2; \ldots; 111\}$ muss ja wesentlich sein, da $\{1; 2; \ldots; 111\}$ endlich ist.

Es folgt sofort, dass hier die Menge $A \cap B$ auch wesentlich sein muss, daher unterscheidet sich A von B nur durch 107 Elemente, an unendlich vielen Stellen sind sie hingegen ident.

Die Idee ist, wenn sich zwei wesentliche Mengen anhand von nur endlich vielen Elementen unterscheiden, dann muss die Durchschnittsmenge stets wesentlich sein. Im Sonderfall $A = B$ ist dies ohnehin trivial.

W7: Sind zwei Mengen A und B wesentlich, so soll auch ihr Durchschnitt wesentlich sein.

Für die zum obigen Beispiel gehörigen Folgen heißt das darüber hinaus, dass dadurch auch die Äquivalenz von β und γ folgen muss. Denn unter Beachtung der bereits geforderten Symmetrieeigenschaft der Relation und „W5“, muss für obige Folgen die Transitivität gelten.

$$\beta \sim \alpha \ \wedge \ \alpha \sim \gamma \Longrightarrow \beta \sim \gamma.$$

Dies fordern wir nachvollziehbarerweise für sämtliche zueinander äquivalente Folgen.

W8: Die Relation $\sim$ muss transitiv sein.

Betrachten wir unsere Anforderungen „**W2, W4, W8**“ , steht sofort fest, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation sein muss.

Die anderen Anforderungen führen uns direkt auf einen Filter. Die Anforderungen „**W3, W5, W7**“ entsprechen den Filteraxiomen und „**W1 und W6**“ folgen direkt daraus.

Definition 2. (Filter)
Es sei A eine nicht-leere Menge. Ein Filter $\mathscr{F}$ auf A ist eine Teilmenge der Potenzmenge von A ($\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(A)$), mit folgenden Eigenschaften:

i) $\mathscr{F} \neq \emptyset$

ii) $\emptyset \notin \mathscr{F}$

iii) $F_1 \in \mathscr{F}, F_1 \subseteq F_2 \subseteq A \Rightarrow F_2 \in \mathscr{F}$

iv) $F_1, F_2 \in \mathscr{F} \Rightarrow (F_1 \cap F_2) \in \mathscr{F}$

Bemerkung. (1) Wir verstehen unter der Potenzmenge der Menge A die Menge

$$\mathscr{P}(A) := \{M : M \subseteq A\}$$

(2) In unserem konkreten Bedarfsfall ist $A = \mathbb{N}$, man spricht dann von einem Filter auf $\mathbb{N}$.
(3) In einem Filter können nie gleichzeitig F und $A \setminus F = \bar{F}$ enthalten sein. Dies folgt direkt aus Punkt iv) der Definition, da nämlich $F \cap \bar{F} = \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathscr{F}$ laut Punkt ii).

Wenn man so will, bleiben die großen Elemente (Teilmengen von $\mathscr{P}(\mathbb{N})$) bildlich gesprochen im Filter hängen. „We think of elements of F as „big“ sets (because that is what filters do, they catch the big objects).“ [Di Nasso et.al 2019, 3]

Satz 1. *Sei $\mathscr{F}$ ein Filter auf $\mathbb{N}$, dann sind folgende Aussagen zueinander tautologisch äquivalent.*

1. *Falls $M \in \mathscr{F}$, dann ist M nicht endlich.*

2. *Falls M endlich ist, dann ist $M \notin \mathscr{F}$.*

Beweis. Sei M eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Da $\mathbb{N}$ abzählbar-unendlich ist, existiert mindestens eine im Filter $\mathscr{F}$ liegende (abzählbar-unendliche) Menge $N \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ mit $N \setminus M = N$. Somit ist $M \cap N = \emptyset$ und folglich laut Filterdefinition $M \notin \mathscr{F}$. $\square$

Fest steht, $\mathcal{W}$ muss ein Filter sein. Doch wie sieht dieser aus? Lässt sich $\mathcal{W}$ explizit angeben?

Ein explizit angebbarer Filter, der schließlich auch noch „W6“ erfüllt, wäre der Frechet-Filter auf $\mathbb{N}$, welcher oft auch als Filter der koendlichen Mengen bezeichnet wird.

Definition 3. (Filter von koendlichen Mengen)

Es sei A nun eine unendliche Menge. Wir nennen dann folgenden Filter auf A,

$$\mathscr{F} = \{F \subseteq A : A \setminus F \text{ ist endlich}\}$$

den Filter der koendlichen Mengen von A.

Bemerkung. Unter einem koendlichen Filter, verstehen wir einen Filter, der die unendlichen Mengen herausfiltert, bildlich gesprochen bleiben sie im Filter hängen, während die endlichen Mengen durchfliegen. In anderen Worten besteht er aus all' jenen Teilmengen von A, die fast alle Elemente von A enthalten. Genau dies bedeutet auch der Begriff *koendlich* in diesem Kontext.

Nun haben wir einen **ersten Vorschlag für unsere wesentliche Menge** $\mathcal{W}$ erarbeitet, nämlich als Filter der koendlichen Mengen auf $\mathbb{N}$.

$$\mathcal{W} \stackrel{?}{=} \{K \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus K \text{ ist endlich}\}$$

Auf den ersten Blick macht dies vielleicht – vorweg gesagt trügerischerweise – Sinn. Das folgende Beispiel wird uns jedoch dazu veranlassen, unseren ersten Vorschlag wieder zu verwerfen.

Beispiel 8. Es sei $\varepsilon = (1;0;1;0;1;0;1\dots)$ und $\delta = (0;1;0;1;0;1;0\dots)$, exakter formuliert sei

$$\varepsilon := \begin{cases} 1, \text{wenn } n \in A = \mathbb{N}_g \\ 0, \text{ wenn } n \in \bar{A} = \mathbb{N}_u \end{cases}$$

und

$$\delta := \begin{cases} 0, \text{wenn } n \in A = \mathbb{N}_g \\ 1, \text{ wenn } n \in \bar{A} = \mathbb{N}_u \end{cases}$$

dann ist ihr Produkt

$$\varepsilon \cdot \delta = (0;0;0;0;0;\dots) = 0,$$

obwohl ε und δ beide $\neq 0$. Als Summe der beiden Folgen erhalten wir

$$\varepsilon + \delta = (1;1;1;1;1;\dots) = 1$$

Bemerkung. Das Symbol $\mathbb{N}_g$ bzw. $\mathbb{N}_u$ steht für die Menge der natürlichen geraden bzw. ungeraden Zahlen.

Das ist vordergründig ein Problem. Da wir mit ${}^*\mathbb{R}$ einen (Erweiterungs-)Körper konstruieren wollen, darf es nur eine (eindeutige) Null geben. Hier haben wir jedoch einen sogenannten Nullteiler gefunden. Um einen Körper zu erhalten muss entweder

$$\varepsilon = 1 \text{ und } \delta = 0$$

oder

$$\varepsilon = 0 \text{ und } \delta = 1$$

zutreffen. In anderen Worten bedeutet das, dass entweder A oder $\bar{A}$ wesentlich sein muss. Für den Fall dass A wesentlich ist, identifizieren wir ε mit 1 und schreiben $\varepsilon \sim 1$, wobei dann $\delta \sim 0$ ist. Im anderen Fall wo $\bar{A}$ wesentlich ist, ist es dann genau umgekehrt. **Der oben offerierte Vorschlag für $\mathcal{W}$ als Filter der koendlichen Mengen ist demnach nachweislich unzureichend**, denn A und $\bar{A}$ sind beide unendlich und besitzen beide jeweils ein unendliches Komplement, aber eine von beiden Mengen muss ja immerhin wesentlich sein.

Doch wie lässt sich diese neue Erkenntnis formal sauber realisieren und wie wird entschieden, welche von beiden (unendlichen) Mengen wesentlich ist?

Es gibt außerdem beliebig viele Möglichkeiten, die natürlichen Zahlen in zwei unendliche Mengen aufzuteilen, sodass A und $\bar{A}$ unendlich viele Elemente besitzen. Eine weitere Möglichkeit dafür soll im folgenden Beispiel besprochen werden.

Beispiel 9. Es sei $\alpha = (4; 4; 4; 4; 4; 4; 4 \dots)$ und

$$\beta := \begin{cases} 0, \text{wenn } n \in A = \{x \in \mathbb{N} |\ 3|x\} \\ 1, \ \text{wenn } n \in \bar{A} \end{cases}$$

dann ist ihre Summe

$$\alpha + \beta = (4; 4; 4; 4; 4; 4; 4 \dots) + (1; 1; 0; 1; 1; 0; 1; \dots) = 5$$

oder etwa

$$\alpha + \beta = (4; 4; 4; 4; 4; 4; 4 \dots) + (1; 1; 0; 1; 1; 0; 1; \dots) = 4 \ ?$$

Nun das hängt hier ganz davon ab, ob entweder A oder $\bar{A}$ wesentlich ist, also ob $\beta \sim 0$ oder $\beta \sim 1$ gilt.

Somit stellen wir folgende zusätzliche Forderung an die Menge der wesentlichen Indexmengen $\mathcal{W}$, dass für **jedes** $A \subseteq \mathbb{N}$ **entweder** $A \in \mathcal{W}$ und $\bar{A} \notin \mathcal{W}$ **oder** $A \notin \mathcal{W}$ und $\bar{A} \in \mathcal{W}$ gelten muss.

W9: Für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ muss entweder $A \in \mathcal{W}$ oder $\bar{A} \in \mathcal{W}$ sein.

Der Sonderfall $A = \mathbb{N}$ wird durch W1 abgedeckt, denn es muss $\mathbb{N} \in \mathcal{W}$ sein. Ist A endlich, dann kann A selbst nicht wesentlich sein, dann ist ihr Komplement $\bar{A}$ wesentlich–das haben wir bereits in W6 gefordert.

Unter Berücksichtigung der letzten Forderung **W9**, führt uns das auf einen **Ultrafilter**, der **all' unsere Wünsche zu erfüllen vermag**.

Definition 4. (Ultrafilter)
Es sei $\mathscr{F}$ ein Filter auf der Menge A, dann heißt $\mathscr{F}$ Ultrafilter, falls folgende zueinander äquivalente Aussagen zutreffen:

i) Sei $\mathcal{U}$ ein Filter und $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathscr{F}$

ii) Für jede beliebige Teilmenge $S \subseteq A$ gilt, dass entweder $S \in \mathscr{F}$ oder $A \setminus S \in \mathscr{F}$.

Bemerkung. (1) In unserem Bedarfsfall ist natürlich wieder $A = \mathbb{N}$.
(2) Die Aussage in i) bedeutet nichts anderes, als dass $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter auf A ist, wenn jeder Filter auf A, der $\mathscr{F}$ enthält, mit $\mathscr{F}$ übereinstimmt.
(3) Die Aussage in ii) gewährleistet also insbesondere auch die Nullteilerfreiheit und löst ferner auch das Problem in Beispiel 9.
(4) Für den für uns eben nicht relevanten Fall wenn A endlich ist, spricht man von einem „principal Ultrafilter“ oder „Punktfilter“. Alle Ultrafilter auf endlichen Mengen sind Punktfilter und nur solche Ultrafilter lassen sich explizit angeben, da sie aus allen Teilmengen bestehen, die ein gewisses Element von A enthalten. Andernfalls spricht man von einem „freien Ultrafilter“ , so wie in dem uns vorliegenden Fall. Wir werden jedoch im Folgenden diesen Zusatz weglassen, wie oftmals üblich. „A free ultrafilter is an ultrafilter U such that no finite set belongs to U.“ [Keisler, Foundations, 24].

Satz 2. *(Existenz von Ultrafiltern)*
Für jede unendliche Menge A existiert ein (freier) Ultrafilter über A.

Bemerkung. (1) Dieser für die Filtertheorie und Nonstandard-Analysis gewichtige Existenzsatz kann mithilfe des *Zornschen Lemmas* bewiesen werden.
(2) Sei $\mathscr{F}$ ein Filter auf $\mathbb{N}$, der kein Ultrafilter ist. Dann lässt sich zeigen, dass es unendlich viele den Filter $\mathscr{F}$ umfassende Ultrafilter gibt.

Wir wählen nun laut Satz 2 einen solchen (freien) Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Zwar gibt es unendlich viele solcher Ultrafilter über $\mathbb{N}$, jedoch lässt sich kein einziger explizit angeben. Die Konstruktion der hyperreellen Zahlen lebt also von der reinen Existenz eines Ultrafilters, von dem wir nicht wissen wie er aussieht.

Wenn wir nun nochmals das Beispiel 9 betrachten, dann ist das Probelm mithilfe des Ultrafilters gelöst, aber ob die Summe nun 5 oder 4 ist, wissen wir nicht. Jedenfalls nimmt sie genau einen der beiden Werte an. Das mag zwar paradox klingen, ist es aber nicht. Es kommt einfach auf den im konkreten Fall fest gewählten Ultrafilter an. Für den praktischen Fall einer konkreten Rechnung heißt das, dass man sich aussuchen darf, ob die Folge β aus Beispiel 9 entweder äquivalent zu 0 oder 1 ist. Ebenso gilt dies für das Beispiel 8, hier hängt es gleichfalls von der Wahl des Ultrafilters ab, ob die geraden natürlichen Zahlen wesentlich sind, oder ob die ungeraden natürlichen Zahlen wesentlich sind. Deshalb wählen wir im Folgenden einen festen Ultrafilter. Die Vorgehensweise mit einem fest gewählten Ultrafilter lässt sich beispielsweise auch bei [Landers 1994] nachlesen. Daher können wir festlegen:

Die Menge der wesentlichen Indexmengen $\mathcal{W}$ ist im Folgenden ein fest gewählter (freier) Ultrafilter auf $\mathbb{N}$.

Anschaulich gesprochen, werden die „einfachen Fälle" bereits durch die koendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, also durch den Filter der koendlichen Mengen geregelt. Wie wir wissen, wird dieser vom fest gewählten Ultrafilter umfasst, welcher dann letztlich auch alle weiteren „komplizierteren Fälle" (siehe Beispiel 8 oder 9) wesentlicher Mengen eindeutig löst.

Der Weg zum Ultrafilter $\mathcal{W}$ auf $\mathbb{N}$ kann demnach als Herzstück innerhalb der Konstruktion angesehen werden.

Nachdem wir nun jetzt klargestellt haben, was wir unter der Menge der wesentlichen Indizes $\mathcal{W}$ verstehen, ist es nun an der Zeit, die von uns geforderte Äquivalenzrelation sauber zu definieren. Die Menge aller daraus resultierender Äquivalenzklassen werden dann ${}^*\mathbb{R}$ ergeben. Mithilfe des fest gewählten Ultrafilters können wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bilden, woraus wir ein System von Äquivalenzklassen erhalten, das schließlich den gewünschten Erweiterungskörper ${}^*\mathbb{R}$ liefern wird.

Definition 5. Für zwei Folgen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$\alpha \sim \beta \iff \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \beta_n\} \in \mathcal{W}$$

Beispiel 10. Betrachten wir nun nochmals das einfache Beispiel 5, dann ist

$$\alpha = (0; 20; 0; 2000; 20000; \dots) \sim \alpha' = (2; 0; 200; 2000; 20000; \dots),$$

weil $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \alpha'_n\} = \mathbb{N} \setminus \{1; 2; 3\} \in \mathcal{W}$, da $\{1; 2; 3\}$ endlich ist.

Satz 3. *Es handelt sich bei der obigen Relation $\sim$ um eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Die Reflexivität und Symmetrie sind trivial und folgen direkt aus der Definition der Relation. Deshalb zeigen wir jetzt nur die Transitivität. Wir nehmern an $\alpha \sim \beta$ und $\beta \sim \gamma$. Es seien nun folgende Indexmengen gegeben

$$A = \{n : \alpha_n = \beta_n\},\ B = \{n : \beta_n = \gamma_n\},\ C = \{n : \alpha_n = \gamma_n\},$$

wobei A und B laut Voraussetzung wesentlich sein müssen, was bedeutet dass $A, B \in \mathcal{W}$ ist. Folglich muss auch $A \cap B \in \mathcal{W}$ sein. Nun folgt aus der Annahme, dass $A \cap B \subseteq C$ sein muss, somit muss auch $C \in \mathcal{W}$ und daher $\alpha \sim \gamma$ sein. $\square$

Als nächstes legen wir noch die Identifikation von reellen Zahlen mit konstanten Folgen formal fest.

Definition 6. (Konstante Folge)
Es sei $r \in \mathbb{R}$ und $(r_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die zugehörige konstante Folge (Abbildung), dann setzen wir:

$$(r_n) := r, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nun möchten wir die sich daraus ergebenden Äquivalenzklassen definieren.
Für alle Folgen $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, die eine konstante Abbildung darstellen und demnach mit den reellen Zahlen identifiziert werden, wird die Äquivalenzklasse mit der zugehörigen Konstante aus $\mathbb{R}$ identifiziert.

Definition 7. Für ein $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wollen wir nun folgende Festlegung vornehmen

$$\overline{\alpha} := \begin{cases} r, \text{falls } \alpha \sim (r_n) \text{ für ein } r \in \mathbb{R} \\ \{\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \beta \sim \alpha\}, \text{ sonst} \end{cases}$$

Bemerkung. (1) Die Fallunterscheidung sorgt für eine saubere Unterscheidung zwischen reellen Zahlen und „rein hyperreellen Zahlen“ (damit sind Zahlen gemeint, die hyperreell sind aber nicht reell). Denn jede reelle Zahl ist auch eine hyperreelle Zahl. Aber nicht jede hyperreelle Zahl ist eine reelle Zahl.

Die hyperreellen Zahlen ergeben sich dann als Menge aller Äquivalenzklassen. An dieser Stelle ist die Konstruktion mit der nun folgenden Definition beendet.

Definition 8. (Hyperreelle Zahlen)

$$^*\mathbb{R} = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$$

Bemerkung. (1) Den Aufbau der hyperreellen Zahlen kann man sich also auch so vorstellen – ähnlich wie bei den komplexen Zahlen: Sie bestehen einerseits aus reellen Zahlen und den „rein hyperreellen Zahlen“. Zusammen ergeben sie also $^*\mathbb{R}$. Natürlich ist in diesem Sinne jede reelle Zahl auch eine hyperreelle Zahl.
Kurz und bündig formuliert: Die hyperreellen Zahlen bestehen aus Äquivalenzklassen von Folgen.

Schließlich lässt sich dadurch die Idee der Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $^*\mathbb{R}$ schön erkennen, was sich sogleich in folgender Teilmengenbeziehung widerspiegelt.

Satz 4. *Die reellen Zahlen sind eine echte Teilmenge der hyperreellen Zahlen,*
$\mathbb{R} \subsetneq {}^*\mathbb{R}$.

Korollar 5. *Die Äquivalenzklasse einer konstanten Folge ist die sie beschreibende reelle Zahl:*

$$\overline{(r_n)} = r \textit{ für alle } r \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung. In seltenen Fällen, um den Schreibaufwand innerhalb von Beweisen möglichst kompakt zu halten, wird für eine konstante Folge $\alpha = (5; 5; 5; \dots)$ kurzum (5_n) geschrieben, ohne eigene Bezeichnung.

Beispiel 11. Es sei $\alpha = (5; 5; 5; 5; \dots)$ eine konstante Folge und $\beta = (5, 4; 5; 3; 5; 5; 5; \dots)$ sowie $\gamma = (1; 2; 3; 4; 5; 5; 5; \dots)$ zwei weitere Folgen. Es ist dann $\alpha \sim \beta$ und $\beta \sim \gamma$. Aufgrund der Transitivität folgt sofort $\alpha \sim \gamma$. Die jeweiligen Äquivalenzklassen der drei Folgen sind somit ident: $\overline{\alpha} = \overline{\beta} = \overline{\gamma} = 5$.

Korollar 6. *Für α, β aus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, gilt:*

$$\overline{\alpha} = \overline{\beta} \Longleftrightarrow \alpha \sim \beta.$$

Bemerkung. Dies ist ein, insbesondere für die praktische Handhabung, wichtiges Korollar. Es sei bereits an dieser Stelle, vor der Einführung der klassischen Rechenoperationen, vorweggenommen, dass wir beim praktischen Rechnen mit einem beliebigen Repräsentanten der jeweiligen Äquivalenzklasse rechnen. Auf das letzte Beispiel bezogen heißt das, wenn $\alpha \sim \beta$ steht, dass es egal ist, ob man mit α oder β rechnet, man rechnet letztlich mit derselben hyperreellen Zahl $\overline{\alpha}$.

Beweis. Zuerst zeigen wir die Hinrichtung
$\Rightarrow$: Sei $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$ und $\alpha \sim (r_n)$ für $r \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist $\overline{\alpha} = r$ laut Definition. Folglich gilt nun auch $\overline{\beta} = r$, also muss $\beta \sim (r_n)$ und folglich auch $\alpha \sim \beta$.
Gilt aber für kein $r \in \mathbb{R}$, dass $\alpha \sim (r_n)$, so ist $\overline{\alpha}$ eine Äquivalenzklasse gemäß definierter Fallunterscheidung. Somit liegt α in $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, was $\alpha \sim \beta$ zur Folge hat.
Nun zeigen wir die Rückrichtung der Äquivalenz
$\Leftarrow$: Sei $\alpha \sim \beta$ und $\alpha \sim (r_n)$ für $r \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist folglich auch $\beta \sim (r_n)$. Für die Äquivalenzklassen gilt dann $r = \overline{\alpha} = \overline{\beta}$.
Gilt aber für kein $r \in \mathbb{R}$, dass $\alpha \sim (r_n)$, so ist auch nicht $\beta \sim (r_n)$. So müssen folglich $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ Äquivalenzklassen sein, da aber laut Annahme $\alpha \sim \beta$ ist, folgt $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$. □

Korollar 7. *Zwei verschiedene reelle Zahlen besitzen unterschiedliche Äquivalenzklassen.*

Beweis. Seien $r, s \in \mathbb{R}$ und $r \neq s$. Dann ist $A = \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\}$ die Indexmenge der Übereinstimmung unter Berücksichtigung von $r = (r_n)$ und $s = (s_n)$. Wegen der Annahme ist $A = \emptyset \notin \mathcal{W}$ und folglich gilt nicht $(r_n) \sim (s_n)$. Für die Äquivalenzklassen gilt dann $\overline{(r_n)} \neq \overline{(s_n)}$. □

2.3 Eigenschaften und das Rechnen in ${}^*\mathbb{R}$

Nun möchten wir endlich die klassischen Operationen der Addition und Multiplikation einführen und dies mit einer Ordnungsrelation auf ${}^*\mathbb{R}$ komplettieren. Wir werden dafür die uns von den reellen Zahlen geläufigen Symbole verwenden. Wie eingangs motiviert, werden wir die Rechenoperationen als punktweise Verknüpfung auf der Menge der reellen Folgen definieren. Wichtig ist dabei, dass die additive und multiplikative punktweise Verknüpfung von Folgen abgeschlossen ist, also das Ergebnis wieder eine reelle Folge ist. Das ist glücklicherweise der Fall.

Definition 9. (Rechenoperationen und Ordnungsrelation auf ${}^*\mathbb{R}$)
Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dann gelten in ${}^*\mathbb{R}$ folgende Rechenoperationen:

i) **Addition**: $\overline{\alpha} + \overline{\beta} := \overline{\alpha + \beta}$

ii) **Multiplikation**: $\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} := \overline{\alpha \cdot \beta}$

iii) **Ordnung:** $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$, falls $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq \beta_n\} \in \mathcal{W}$

Bemerkung. Nun muss aber noch gezeigt werden, dass obige Operationen wohldefiniert sind. Dies geht aus dem folgenden Satz 8 hervor.

Satz 8 (ohne Beweis)**.** *Für die Operationen i) bis iii) aus der oberen Definition 9 gilt, dass deren Gültigkeit nicht von der Wahl des Repräsentanten von $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ abhängt.*

Satz 9. *Die für die hyperreellen Zahlen definierten Operationen i) bis iii) aus Definition 9 stimmen mit den für die reellen Zahlen üblichen Operationen überein.*

Dazu möchten wir gleich das Beispiel 4 aus der Einführung wieder aufgreifen.

Beispiel 12. Sei $\alpha = (2; 20; 200; 2000; \dots)$ und $\beta = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \dots)$. Dann ist

$$\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = \overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\left(2 \cdot \frac{1}{2}; 20 \cdot \frac{1}{2}; 200 \cdot \frac{1}{2}; 2000 \cdot \frac{1}{2}; \dots\right)} = \overline{(1; 10; 100; 1000; \dots)}$$

Bemerkung. Wir erkennen, dass sich hinsichtlich der Rechnung in der Motivation die Notation etwas geändert hat. Aus gutem Grund, denn die hyperreellen Zahlen sind ja selbst Äquivalenzklassen. Der praktische Rechenvorgang mit den Repräsentanten (der Äquivalenzklassen) an sich bleibt natürlich unverändert und entspricht jenem aus Beispiel 4.

Vorerst möchten wir noch ein Beispiel zum neutralen Element bezüglich der Addition anführen.

Beispiel 13. Seien $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, mit

$$\alpha = (64; 64; 64; 64 \dots) = (64_n) \text{ und } \gamma = (0; 0; 0; 0 \dots) = (0_n),$$

dann gilt für deren additive Verknüpfung $\overline{\alpha} + \overline{\gamma} = \overline{64_n} + \overline{0_n}$:

$$\overline{64_n} + \overline{0_n} = \overline{(64;64;64;64\dots)} + \overline{(0;0;0;0\dots)} = \overline{(64+0;64+0;64+0;64+0;\dots)} = \overline{(64_n)} = 64.$$

Laut Korollar 5 können wir jedoch gleich in aller Kürze, mit jenen den Äquivalenzklassen zugeordneten reellen Zahlen rechnen

$$\overline{(64_n)} + \overline{(0_n)} = 64 + 0 = 64.$$

Das heißt, dass wir innerhalb ${}^*\mathbb{R}$ mit reellen Zahlen so rechnen können, wie wir es gewöhnt sind. Genau das ist der Vorteil und die Intention der Identifikation von konstanten Folgen mit den zugehörigen reellen Zahlen.

Dies führt uns zu der naheliegenden Erkenntnis, dass ${}^*\mathbb{R}$ dasselbe neutrale Element bezüglich der Addition besitzt wie $\mathbb{R}$. Laut Definition 7 könnten wir in obiger Rechnung alternativ mit einem beliebigen weiteren Repräsentanten $\kappa = (1;0;0;0;\dots)$ rechnen, da offensichtlich $\kappa \sim (0_n)$ und folglich $\overline{(0_n)} = 0$ gilt.

Eine weitere unausweichliche Entdeckung, das neutrale Element bezüglich der Multiplikation, wird im vorliegenden Beispiel vorgestellt.

Beispiel 14. Sei $\alpha = (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots)$ und $\beta = (1;1;1;\dots) = (1_n)$. Dann ist

$$\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = \overline{(1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\dots)\cdot(1;1;1;\dots)} = \overline{(1\cdot 1;\frac{1}{2}\cdot 1;\frac{1}{4}\cdot 1;\frac{1}{8}\cdot 1;\dots)} = \overline{\alpha}$$

Satz 10. *Die hyperreellen Zahlen* $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot)$ *bilden einen Körper mit denselben neutralen Elementen bezüglich der Addition und Multiplikation wie* $\mathbb{R}$*.*

Bemerkung. (1) Wir bezeichnen das inverse Element von $\overline{\alpha}$ bezüglich der Addition mit $-\overline{\alpha}$.
(2) Das inverse Element von $\overline{\alpha}$ bezüglich der Multiplikation bezeichnen wir mit $\overline{\alpha}^{-1}$.

Beweis. Um diesen Satz beweisen zu können, müssen alle Körperaxiome einzeln nacheinander gezeigt werden. Die Kommutativität und Assoziativität bezüglich der Addition und Multiplikation sind trivial zu zeigen und folgen direkt aus den Definitionen. Exemplarisch für die genannten trivialen Beispiele soll zuerst die Kommutativität bezüglich der Multiplikation gezeigt werden.

i) Wir zeigen also: Für zwei beliebige $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$ gilt: $\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = \overline{\beta} \cdot \overline{\alpha}$.

Seien $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$, dann ist

$$\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = \overline{\alpha \cdot \beta} \overset{*}{=} \overline{\beta \cdot \alpha} = \overline{\beta} \cdot \overline{\alpha}.$$

Wobei bei $*$ die Kommutativität der Elemente innerhalb der punktweisen Verknüpfung von Folgen verwendet wurde. Das war es auch schon.

ii) Das neutrale Element bezüglich der Addition ist $0 = \overline{0_n}$.

Sei nun $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ beliebig.

$$\overline{\alpha} + 0 = \overline{\alpha} + \overline{(0_n)} = \overline{\alpha + (0_n)} = \overline{\alpha}.$$

Die Äquivalenzen folgen also direkt aus Definition 9 und Korollar 5.
Der Beweis für das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist analog zu führen.

iii) Das additiv inverse Element von $\overline{\alpha}$ ist $\overline{-\alpha}$.

Sei nun $\overline{\alpha} \in^* \mathbb{R}$ beliebig.

$$\overline{\alpha} + \overline{-\alpha} = \overline{\alpha + (-\alpha)} = \overline{(0_n)} = 0$$

Hierbei wurde ebenso nur die Definition 9 und Korollar 5 verwendet.

iv) Zu jedem $\overline{\alpha} \neq 0$ gibt es ein $\overline{\alpha}^{-1}$, sodass $\overline{\alpha} \cdot \overline{\alpha}^{-1} = 1$ ist.

Sei $\overline{\alpha} \neq 0$ beliebig, dann ist $\{n \in \mathbb{N} | \alpha_n \neq 0\} \in \mathcal{W}$. Wäre das nicht so, dann müsste $\{n \in \mathbb{N} | \alpha_n = 0\} \in \mathcal{W}$ sein und folglich $\overline{\alpha} = 0$, was aber im Widerspruch zur Annahme steht. Nun nehmen wir eine weitere Folge α^{-1} zur Hand, mit $\alpha^{-1} := \begin{cases} \frac{1}{\alpha_n}, \text{wenn } \alpha_n \neq 0 \\ 0, \text{ wenn } \alpha_n = 0 \end{cases}$.

Nun gilt für die Produktfolge $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \begin{cases} 1, \text{wenn } \alpha_n \neq 0 \\ 0, \text{ wenn } \alpha_n = 0 \end{cases}$.
Dann muss $\{n \in \mathbb{N} |\ \alpha_n \cdot \alpha_n^{-1} = (1_n) = 1\} = \{n \in \mathbb{N} | \alpha_n \neq 0\} \in \mathcal{W}$ sein, da laut Annahme $\overline{\alpha} \neq 0$ ist.
Daraus folgt direkt $\overline{\alpha} \cdot \overline{\alpha}^{-1} = \overline{\alpha \cdot \alpha^{-1}} = \overline{(1_n)} = 1$. Somit ist auch das gezeigt.

v) Es gilt das Distributivgesetz.

Seien nun $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma} \in {}^*\mathbb{R}$ beliebig.

$$(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) \cdot \overline{\gamma} = \overline{\alpha + \beta} \cdot \overline{\gamma} = \overline{(\alpha + \beta) \cdot \gamma} = \overline{\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma} = \overline{\alpha \cdot \gamma} + \overline{\beta \cdot \gamma}$$

Dies folgt direkt aus Definition 9 und aus den auf der Menge der reellen Folgen gültigen Rechengesetzen. Aufgrund der bereits gezeigten Kommutativität lässt sich das Distributivgesetz selbstverständlich auch andersrum mit $\overline{\gamma} \cdot (\overline{\alpha} + \overline{\beta})$ anschreiben.

□

Bemerkung. Wir möchten nun kurz näher im Sinne einer Beweisskizze darauf eingehen, warum für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gilt, dass $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$. Wir wissen bereits, dass sich $\alpha + \beta$ aufgrund der punktweisen Addition von Folgen als $(\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2; \dots)$ schreiben lässt. Die Multiplikation von $(\alpha + \beta) \cdot \gamma$ lässt sich somit als die bisher bekannte punktweise

Multiplikation von Folgen schreiben, nämlich als $((\alpha_1+\beta_1)\cdot\gamma_1; (\alpha_2+\beta_2)\cdot\gamma_2; \dots)$. Da die Folgenglieder selbst wiederum reelle Zahlen sind, ist für sie die Distributivität natürlich gegeben, somit können wir das Ganze auch so anschreiben
$(\alpha_1\cdot\gamma_1+\beta_1\cdot\gamma_1;\ \alpha_2\cdot\gamma_2+\beta_2\cdot\gamma_2;\ \dots)$. Letzterer Ausdruck beschreibt schließlich nichts anderes als $\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$, also ausgeschrieben $(\alpha_1\cdot\gamma_1; \alpha_2\cdot\gamma_2; \dots)+(\beta_1\cdot\gamma_1; \beta_2\cdot\gamma_2; \dots)$.

Betrachten wir die in Definition 9 angeführte Ordnungsrelation, so muss diese eine Ordnung auf $^*\mathbb{R}$ festlegen, um ein sinnvolles Operieren zu gewährleisten. Für unsere Zwecke müssen stets zwei beliebige Objekte aus $^*\mathbb{R}$ miteinander vergleichbar sein.

Satz 11. *Es handelt sich bei* $(^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *um einen angeordneten Körper.*

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass $^*\mathbb{R}$ ein Körper ist. Schließlich müssen wir nur noch zeigen, dass folgende Eigenschaften gelten, mit $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma} \in {}^*\mathbb{R}$ beliebig:

1. Relflexivität: $\overline{\alpha} \leq \overline{\alpha}$
2. Antisymmetrie: $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta} \wedge \overline{\beta} \geq \overline{\alpha} \Longrightarrow \overline{\alpha} = \overline{\beta}$
3. Transitivität: $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta} \wedge \overline{\beta} \leq \overline{\gamma} \Longrightarrow \overline{\alpha} \leq \overline{\gamma}$
4. Totalität: $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta} \vee \overline{\beta} \leq \overline{\alpha}$
5. Anordnungsaxiom-I: $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta} \Longrightarrow \overline{\alpha} + \overline{\gamma} \leq \overline{\beta} + \overline{\gamma}$
6. Anordnungsaxiom-II: $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta} \wedge \overline{\gamma} \geq 0 \Longrightarrow \overline{\alpha} \cdot \overline{\gamma} \leq \overline{\beta} \cdot \overline{\gamma}$

Ad 1: Die Reflexivität ist trivialerweise erfüllt.

Ad 2: Es sei $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$ und $\overline{\beta} \geq \overline{\alpha}$, dann muss laut Definition $A = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq \beta_n\} \in \mathcal{W}$ und $B = \{n \in \mathbb{N} : \beta_n \leq \alpha_n\} \in \mathcal{W}$ sein. Somit muss auch $A \cap B \in \mathcal{W}$ sein, woraus schließlich $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$ folgt.

Ad 3: Es sei $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$ und $\overline{\beta} \leq \overline{\gamma}$, dann muss laut Definition $A = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq \beta_n\} \in \mathcal{W}$ und $B = \{n \in \mathbb{N} : \beta_n \leq \gamma_n\} \in \mathcal{W}$ sein. Folglich muss auch $A \cap B \in \mathcal{W}$ gelten und ferner folgt aus $A \cap B \subseteq C = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq \gamma_n\}$ dass auch $C \in \mathcal{W}$ sein muss, laut Definition des Ultrafilters. So folgt direkt, dass auch $\overline{\alpha} \leq \overline{\gamma}$ sein muss.

Ad 4: Wir betrachten die zugehörigen Indexmengen für die beiden Fälle, wobei
$A = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq \beta_n\} \in \mathcal{W}$ und $B = \{n \in \mathbb{N} : \beta_n \leq \alpha_n\} \in \mathcal{W}$. Fest steht, dass $A \cup B = \mathbb{N}$ sein muss und demnach in $\mathcal{W}$ liegt. Daraus folgt dass mindesten eine von beiden Mengen A oder B in W liegen muss, somit gilt $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta} \vee \overline{\beta} \leq \overline{\alpha}$.

Ad 5: Es sei $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$, dann ist $A = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq \beta_n\} \in \mathcal{W}$. Somit ist
$\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n + \gamma_n \leq \beta_n + \gamma_n\} = A$, also dieselbe Indexmenge und daher immer noch wesentlich. Schließlich folgt $\overline{\alpha} + \overline{\gamma} = \overline{\alpha + \gamma} \leq \overline{\beta + \gamma} = \overline{\beta} + \overline{\gamma}$.

Ad 6: Es sei $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$ und $\overline{\gamma} \geq 0$, dann ist $A = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq \beta_n\} \in \mathcal{W}$ und $B = \{n \in \mathbb{N} : \gamma_n \geq 0\} \in \mathcal{W}$. Dann ist $A \cap B \subseteq C = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \cdot \gamma_n \leq \beta_n \cdot \gamma_n\}$. Daraus folgt, weil schon $A \cap B \in \mathcal{W}$ ist, dass auch $C \in \mathcal{W}$ sein muss. Hieraus folgt dann direkt $\overline{\alpha} \cdot \overline{\gamma} = \overline{\alpha \cdot \gamma} \leq \overline{\beta \cdot \gamma} = \overline{\beta} \cdot \overline{\gamma}$.
Somit ist alles gezeigt.

$\square$

Beispiel 15. Es sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, mit

$$\alpha = (25; 1; 2; 3; 4; \dots) \text{ und } \beta = (5; 10; 15; 20; 25; \dots),$$

dann gilt laut Definition 9

$$\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}, \text{ da } \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq \beta_n\} = \mathbb{N} \setminus \{1\} \in \mathcal{W}.$$

Nun möchten wir noch ein kompliziertes Beispiel besprechen.

Beispiel 16. Gegeben sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, mit

$$\alpha = (1; 2; 3; 4; \dots) \text{ und } \beta := \begin{cases} 2^n, & \text{für } n \in \mathbb{N}_u \\ -2, & \text{für } n \in \mathbb{N}_g \end{cases}.$$

Wir wissen, dass $\alpha \leq \beta \vee \alpha \geq \beta$ gelten muss. Es hängt also von der Wahl des Ultrafilters ab, welcher der beiden Fälle in diesem Fall eintritt (beides, also die Äquivalenz, kann bei diesem Beispiel ja offensichtlich nicht eintreten). Da wir einen Ultrafilter als fest gewählt betrachten, können wir uns beispielsweise o.B.d.A. für $\mathbb{N}_u \in \mathcal{W}$ entschieden, woraus $\mathbb{N}_g \notin \mathcal{W}$ folgt.

Somit haben wir auch alle Werkzeuge beisammen, um festzusetzen, was wir unter dem Betrag einer hyperreellen Zahl verstehen:

Definition 10. Sei $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$, dann gilt für ihren Betrag

$$|\overline{\alpha}| := \overline{\alpha}, \text{ falls } \overline{\alpha} \geq 0$$

und

$$|\overline{\alpha}| := \overline{-\alpha}, \text{ falls } \overline{\alpha} \leq 0$$

Bemerkung. (1) Für eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ erhalten wir aufgrund von Korollar 5 den uns bekannten Betrag in $\mathbb{R}$.
(2)Wegen der Definition von $|\overline{\alpha}|$ gilt für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon \geq 0$:

$$|\overline{\alpha}| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leq \overline{\alpha} \leq \varepsilon.$$

An dieser Stelle wollen wir nun eine der Intuition entsprechende Sprechweise für den bald folgenden praktischen Umgang in der Nichtstandard-Analysis geben. Damit können wir schließlich auch bisher Bekanntes etwas kompakter notieren.

Definition 11. (Bedeutung von *fast überall*)
Es sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dann bezeichnen wir

$$\alpha_n = \beta_n \text{ fast überall (kurz: f.ü.), falls } \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \beta_n\} \in \mathcal{W}$$

und

$$\alpha_n \leq \beta_n \text{ f.ü., falls } \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq \beta_n\} \in \mathcal{W}$$

beziehungsweise

$$\alpha_n \geq \beta_n \text{ f.ü., falls } \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \geq \beta_n\} \in \mathcal{W}$$

Bemerkung. (1) Die Bezeichnung *fast überall* bzw. *f.ü.* ist demnach eine Kurzform für *auf einer wesentlichen Indexmenge.*
(2) Für den Sonderfall $\beta_n = r$ mit $r \in \mathbb{R}$, schreiben wir zum Beispiel
$\alpha_n \geq r$ f.ü.

Der praktische Umgang wird nun durch folgenden Satz maßgeblich erleichtert. Damit können wir unter anderem aufgrund von Definition 5 und Korollar 6 folgende Aussagen tätigen.

Satz 12. *Es gelten folgende Aussagen, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $r, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$:*

i) $\overline{\alpha} = \overline{\beta} \Longleftrightarrow \alpha_n = \beta_n$ *f.ü.*

ii) $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta} \Longleftrightarrow \alpha_n \leq \beta_n$ *f.ü.*
bzw.
$\overline{\alpha} \geq \overline{\beta} \Longleftrightarrow \alpha_n \geq \beta_n$ *f.ü.*

iii) $|\overline{\alpha} - \overline{\beta}| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow |\alpha_n - \beta_n| \leq \varepsilon$ *f.ü.*
bzw.
$|\overline{\alpha} - \overline{\beta}| \geq \varepsilon \Longleftrightarrow |\alpha_n - \beta_n| \geq \varepsilon$ *f.ü.*

iv) $|\overline{\alpha} - r| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow |\alpha_n - r| \leq \varepsilon$ *f.ü.*
bzw.
$|\overline{\alpha} - r| \geq \varepsilon \Longleftrightarrow |\alpha_n - r| \geq \varepsilon$ *f.ü.*

Bemerkung. Bei iv) handelt es sich um einen Sonderfall von iii), unter Berücksichtigung von Korollar 5.

Schließlich stehen wir vor der großen Aufgabe, die für die Nonstandard-Analysis charakteristischen Begriffe der unendlich kleinen bzw. unendlich großen Elemente zu definieren. Davor benötigen wir aber noch den folgenden Satz.

Satz 13. *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dann gilt (ohne Beweis):*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = r$, *mit* $r \in \mathbb{R} \Longrightarrow |\overline{\alpha} - r| \leq \frac{1}{m}$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty \Longrightarrow \overline{\alpha} \geq m$, *für alle* $m \in \mathbb{N}$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = -\infty \Longrightarrow \overline{\alpha} \leq -m$, *für alle* $m \in \mathbb{N}$

Bemerkung. (1) Etwas anders formuliert, unter Berücksichtigung von Satz 12, lautet Punkt i):

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = r \text{ , mit } r \in \mathbb{R} \Longrightarrow |\alpha_n - r_n| \leq \frac{1}{m} \text{ f.ü., für alle } m \in \mathbb{N}.$$

(2) Bei den in i)-iii) gegebenen Aussagen kommt in der Prämisse der aus der klassischen Analysis bekannte (uneigentliche) Grenzwert konvergenter bzw. bestimmt divergenter Folgen vor.
(3) Die Umkehrung der Aussagen des Satzes ist i.A. nicht korrekt.
(4) Der Satz lässt sich alternativ auch wie folgt formulieren, hier am Beipispiel für *i)*:

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = r, \text{ mit } r \in \mathbb{R} \Longrightarrow |\overline{\alpha} - r| \leq m \text{ für alle } m \in \mathbb{R}, m > 0$$

Definition 12. (Infinitesimal, unendlich und endlich)
Seien nun $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$, dann nennen wir

i) $\overline{\alpha}$ endlich, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|\overline{\alpha}| \leq m$.

ii) $\overline{\alpha}$ unendlich, wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt, dass $|\overline{\alpha}| \geq m$.

iii) $\overline{\alpha}$ infinitesimal, wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt, dass $|\overline{\alpha}| \leq \frac{1}{m}$.

Bemerkung. (1) Statt „endlich“ findet man mancherorts die Bezeichnung „finit“, sowie man für „unendlich“ die Bezeichnung „infinit“ findet.
(2) Wir haben somit infinitesimale Elemente erschaffen, deren Betrag kleiner als jede positive reelle Zahl ist. Genauso ist der Betrag von unendlichen Elementen größer als jede positive reelle Zahl. Ebendiese Elemente zählen zu den zentralen Werkzeugen in der Nonstandard-Analysis.
(3) Gemäß dieser Definition ist die 0 ein infinitesimales Element. Dies ist direkt aus Satz 13 Punkt i) ersichtlich, wenn man $\overline{\alpha} = r = 0$ setzt. Aus der Definition folgt dann, weil $|0| \leq \frac{1}{m}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, dass 0 infinitesimal ist.
(4) Aus dieser Definition folgt ebenso direkt, dass es kein anderes infinitesimales Element in den reellen Zahlen gibt, außer der Null.
(5) Es gibt also kein unendliches Element in den reellen Zahlen.
(6) Wie bei Satz 13 bereits angemerkt, könnte man obigen Punkt iii) auch alternativ formulieren als

$$\overline{\alpha} \text{ heißt infinitesimal, wenn für jedes positive } m \in \mathbb{R} \text{ gilt, dass } |\overline{\alpha}| \leq m.$$

In manchen einschlägigen Werken ist dies auch so üblich, insbesondere auch unter Verwendung von $<$ anstatt von $\leq$.
(7) Der Vorteil der verwendeten Definition besteht darin, dass daraus sofort einzusehen ist, dass das archimedische Axiom nicht erfüllt werden kann (siehe Satz 18 unten).

Beispiel 17. Ein Beispiel für eine endliche hyperreelle Zahl wäre $\overline{\alpha}$, mit

$$\alpha_n = 2 + 2^{1-n} \text{ bzw. } \alpha = (3; 2,5; 2,25; 2,125; \dots).$$

Wir wollen auf den leicht hineinzufallenden Trugschluss hinweisen, dass eine endliche hyperreelle Zahl automatisch reell ist. Das stimmt nicht. Es gibt rein hyperreelle endliche Zahlen. Ein Beispiel dafür ist $\overline{\alpha}$, das näher bei 2 liegt als jede reelle Zahl $\neq 2$. In Definition 13 werden wir dafür sogleich eine eigene Bezeichnung einführen.

Ein Beispiel für eine unendliche Zahl wäre $\overline{\beta}$, mit

$$\beta_n = 3^n \text{ bzw. } \beta = (3; 9; 27; 81; 243; \dots).$$

Dabei ist $\overline{\beta}$ größer als jede reelle Zahl. Die Zahl $-\overline{\beta}$ mit $-\beta = (-3; -9; -27; 81; -243; \dots)$ ist dann natürlich kleiner als jede reelle Zahl.

Ein Beispiel für eine infinitesimale Zahl wäre $\overline{\gamma}$, mit

$$\gamma_n = 2^{1-n} \text{ bzw. } \gamma = (1; 0,5; 0,25; 0,125; \dots).$$

Dabei ist $\overline{\gamma}$ kleiner als jede positive reelle Zahl.

Die Beispiele verdeutlichen die Erkenntnis, dass der Betrag einer unendlichen hyperreellen Zahl größer als jede reelle Zahl ist und der Betrag einer infinitesimalen Zahl kleiner als jede reelle Zahl ist. Das sind auch schon zwei Arten von besonderen Objekten in ${}^*\mathbb{R}$ und somit auch zwei Hauptgründe, weswegen sich die mathematisch aufwendige Konstruktion gelohnt hat.

Dabei ist vor allem auch auf die endlichen, rein hyperreellen, Zahlen hinzuweisen. So finden wir beispielsweise rein hyperreelle Zahlen, welche näher bei einer rein reellen Zahl liegen, als jede denkbare andere reelle Zahl. Demnach ist es nun an der Zeit festzulegen, wie wir formal festhalten, wenn zwei hyperreelle Zahlen unendlich nahe beinander liegen.

Definition 13. (Infinitesimal benachbart)
Es sei $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$. Wir nennen $\overline{\alpha}$ infinitesimal benachbart zu $\overline{\beta}$, falls deren Differenz $\overline{\alpha} - \overline{\beta}$ infinitesimal ist und schreiben dafür

$$\overline{\alpha} \approx \overline{\beta}.$$

Aus den letzten beiden Definitionen können wir nun den folgenden Satz ableiten.

Satz 14. *Sei $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$, dann ist*

$$\overline{\alpha} \approx \overline{\beta} \Longleftrightarrow |\overline{\alpha} - \overline{\beta}| \leq \frac{1}{m} \ \forall m \in \mathbb{N}$$

Schließlich führt uns das zu einer weiteren wichtigen Feststellung:

Satz 15. *Sei $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$, dann ist $\overline{\alpha}$ genau dann infinitesimal, wenn $\overline{\alpha} \approx 0$ ist.*

Beispiel 18. Gegeben sind $\alpha = (0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; \dots)$ und $\beta = (1_n) = (1; 1; 1; 1; \dots)$. Dann ist $\alpha \approx \beta$, weil

$$|\overline{\alpha} - \overline{\beta}| \leq \frac{1}{m} \ \forall m \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow |\alpha_n - \beta_n| \leq \frac{1}{m} \text{ f.ü. } \forall m \in \mathbb{N},$$

wobei

$$\alpha_n - \beta_n = (0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots) \approx 0 \text{ ist.}$$

Somit folgt, dass $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta}$ ist, anders notiert mit $\overline{\alpha} \approx 1$, weil ja $\overline{\beta} = 1$ gilt.

Bemerkung. Innerhalb von $\mathbb{R}$ unterscheiden wir hingegen nicht zwischen $0,\dot{9}$ und 1. Die Äquivalenz $0,\dot{9} = 1$ hat zwar in $\mathbb{R}$ ihre Gültigkeit, jedoch nicht in ${}^*\mathbb{R}$.

Damit haben wir am Beispiel 18 unterstrichen, dass in ${}^*\mathbb{R}$ insbesondere auch von Null verschiedene infinitesimale Elemente leben. Außerdem halten wir fest:

Satz 16. *(Ohne Beweis)*
Es existiert zu jedem endlichen $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ genau ein $r \in \mathbb{R}$ mit: $\overline{\alpha} \approx r$.

Bemerkung. (1) Bei Beispiel 18 wäre $r = 1 \in \mathbb{R}$ das zu $\overline{\alpha}$ gehörige reelle Element.
(2)Wichtig ist, dass wir der potentiellen Fehlvorstellung, endliche hyperreelle Elemente seien (stets) reelle Zahlen, zuvorkommen. Jedoch gibt es in ${}^*\mathbb{R}$ natürlich endliche Elemente, die reelle Zahlen sind, ist doch bekanntlich $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$.

Korollar 17. *Gegeben seien zwei reelle Zahlen $r_1, r_2 \in {}^*\mathbb{R}$. Wenn $r_1 \approx r_2$ gilt, dann folgt sofort $r_1 = r_2$.*

Bemerkung. Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass die Null das einzige infinitesimale Element innerhalb der reellen Zahlen ist.

Da ${}^*\mathbb{R}$ eben auch unendliche große bzw. unendlich kleine Elemente enthält, müssen wir festellen:

Satz 18. *Die hyperreellen Zahlen sind nicht archimedisch.*

Bemerkung. Das bedeutet, dass das archimedische Axiom nicht erfüllt werden kann. Schuld daran ist die Tatsache, dass es in ${}^*\mathbb{R}$ unendliche Elemente gibt, die größer als jede reelle bzw. natürliche Zahl sind. Also ist ${}^*\mathbb{R}$ ein nicht-archimedisch angeordneter Körper.

Im Gegensatz zu den reellen Zahlen, fehlt den hyperreellen Zahlen auch folgende Eigenschaft:

Satz 19. *Die hyperreellen Zahlen sind nicht ordnungsvollständig.*

Bemerkung. Die sogenannte Supremumseigenschaft kann nicht erfüllt werden. Diese besagt, dass jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzen muss. Genau das wird im folgenden Beweis verwendet.

Beweis. Gegeben ist $\mathbb{N}$ und ein unendliches Element $\overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$. Es ist dann $\overline{\beta}$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Nun möchten wir zeigen, dass $\mathbb{N}$ kein Supremum in ${}^*\mathbb{R}$ besitzt. Dafür zeigen wir:

$$\overline{\delta} \text{ obere Schranke von } \mathbb{N} \Rightarrow \overline{\delta} - 1 \text{ obere Schranke von } \mathbb{N}$$

Wir nehmen an, δ ist eine solche obere Schranke von $\mathbb{N}$. Dann gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \leq \overline{\delta} \Rightarrow n \leq \overline{\delta} - 1.$$

Somit haben wir eine weitere, kleinere, obere Schranke zu einer gegebenen beliebigen oberen Schranke gefunden. Damit ist alles gezeigt. □

Nun kommen wir noch zu ein paar praktischen Eigenschaften von *infinitesimal benachbart*, die uns in der Anwendung noch dienlich sein werden.

Satz 20. *Es handelt sich bei $\approx$ um eine Äquivalenzrelation auf ${}^*\mathbb{R}$.*

Unter diesem Gesichtspunkt formulieren wir nun folgende praktische Rechenregeln:

Satz 21. *(Rechenregeln für den Umgang mit $\approx$, ohne Beweis)*

i) $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta} \Longleftrightarrow |\alpha_n - \beta_n| \leq \frac{1}{m}$ *f.ü.* $\forall m \in \mathbb{N}$

ii) $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta} \Longrightarrow -\overline{\alpha} \approx -\overline{\beta}$

iii) $\overline{\alpha}_1 \approx \overline{\beta}_1$ *und* $\overline{\alpha}_2 \approx \overline{\beta}_2 \Longrightarrow \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 \approx \overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2$

iv) $\overline{\alpha}_1 \approx \overline{\beta}_1$ *und* $\overline{\alpha}_2 \approx \overline{\beta}_2 \Longrightarrow \overline{\alpha}_1 \cdot \overline{\alpha}_2 \approx \overline{\beta}_1 \cdot \overline{\beta}_2$, *mit* $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2$ *beide endlich.*

Wir stellen uns nun die aus der Schule bekannte Zahlengerade vor. Wählen wir nun eine beliebige reelle Zahl darauf aus und zoomen, bildlich gesprochen, mit einer *Unendlichkeitslupe* unendlich nah an ihre Umgebung heran. In *unendlichfacher Vergrößerung durch die Lupe* sehen wir dann all' jene Zahlen, die zu der gewählten reellen Zahl infinitesimal benachbart sind. Plakativ ließe sich an dieser Stelle sagen, dass die unserer Intuition bekannte Zahlengerade noch dichter als gedacht ist, denn jede reelle Zahl wird von einem *Büschel* infinitesimal benachbarter hyperreeller Zahlen umgeben.
Formal kann man das für eine beliebige reelle Zahl r durch eine hyperreelle Umgebung ausdrücken. Solche Mengen („*Büschel*“) werden als *Monaden* bezeichnet.

Definition 14. (Monade)
Eine Monade um $r \in \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge aus den hyperreellen Zahlen:

$$m(r) := \{r + \varepsilon : \varepsilon \approx 0\}.$$

Bemerkung. (1) Innerhalb einer jeden Monade gibt es kein kleinstes und auch kein größtes Element.

Beispiel 19. Betrachten wir nun als folgendes Beispiel die Abbildung 2.1.
Hierin liegt $0,\dot{9}$ und $1 + \alpha$, mit $\alpha \approx 0$, in der Monade um Eins:

$$m(1) := \{1 + \varepsilon : \varepsilon \approx 0\}.$$

Dass $0,\dot{9} \approx 1$ gilt, wissen wir ja bereits.
So liegen auch ω und $-\omega$ aus Abbildung 2.1 in der Monade um Null:

$$m(0) := \{0 + \varepsilon : \varepsilon \approx 0\}.$$

Schließlich lässt sich die Menge der hyperreellen Zahlen in drei disjunkte Bereiche aufteilen. Nämlich in den mit den negativ unendlichen Elementen, in den mit den positiv unendlichen Elementen und in den mit den endlichen Elementen. Der mittige Bereich der endlichen hyperreellen Elemente zerfällt sogar in unendlich viele disjunkte Teilbereiche, nämlich in unendlich viele disjunkte Monaden („*Büschel*“). Dies folgt direkt aus Satz 16 und der Tatsache, dass zwei reelle Zahlen niemals infinitesimal benachbart sein können.

In Analogie zur bereits aus der Schule bekannten Darstellung von $\mathbb{R}$ anhand der Zahlengerade, können wir nun auch $^*\mathbb{R}$ geometrisch mit einer etwas adaptierten Zahlengerade veranschaulichen. Die kleinen Pünktchen aus Abbildung 2.1 deuten die großen drei disjunkten Teilbereiche an, wobei die äußeren Pünktchen jeweils die Unendlichkeit andeuten sollen. In der Mitte sieht man zwei *Unendlichkeitslupen* kreisförmig dargestellt.

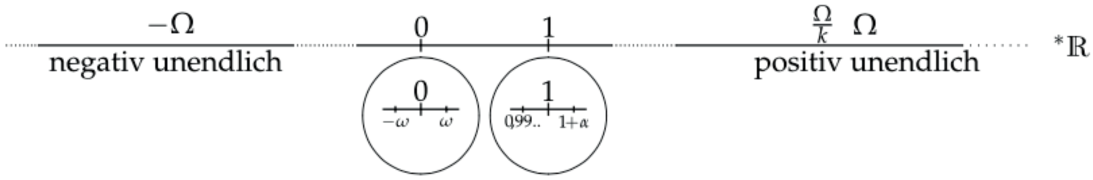

Abbildung 2.1: Geometrische Darstellung der hyperreellen Zahlen [Bedürftig et.al 2022, 13]

Ebenso wie die reellen Zahlen, lassen sich also auch die hyperreellen Zahlen auf einer Zahlengeraden veranschaulichen. Wenn auch die Darstellung im hyperreellen Fall wohl etwas komplexer erscheint, ist beides letzten Endes ein didaktisches Modell.

Zusammengefasst leben in $^*\mathbb{R}$ also unendlich große, unendlich kleine, infinitesimale und endliche Zahlen–insbesondere also auch alle reellen Zahlen (als Spezialfall von den endlichen Zahlen).Wir möchten dabei anmerken, dass wir hier und auch im Folgenden die Elemente von $^*\mathbb{R}$, wie gewöhnlich auch in $\mathbb{R}$ üblich, als Zahlen bezeichnen werden.

3 Nonstandard Analysis – Ein Ausblick

Es ist nun so weit, wir können mit dem bisher Erarbeiteten endlich hyperreelle Analysis betreiben. Wir verwenden dabei die hyperreellen Zahlen als Werkzeug, um mit ihnen die klassischen Begriffe der Analysis für reelle Funktionen zu definieren. Der in der klassischen Analysis zentrale Grenzwertbegriff wird dadurch obsolet. Dies zeigt anschaulich, dass ebenso wie die hyperreellen Zahlen, auch der Grenzwertbegriff (Limes) „nur“ ein Werkzeug ist.

Die Nonstandard-Analysis beschäftigt sich also mit denselben analytischen Zielen und Objekten wie die klassische reelle Analysis, mit dem Unterschied, dass sie für deren Konstruktion die hyperreellen Zahlen verwendet. Im Folgenden möchten wir ein paar der zentralen Begriffe einer einführenden Vorlesung zur reellen Analysis aus der Sicht der Nonstandard-Analysis erläutern. Im Zentrum dieses ergänzenden hyperreellen Ausblicks sollen die Begriffe *Stetigkeit* und *Differenzierbarkeit* stehen. Es soll mit einer für Erstsemester zugänglichen Art und Weise Interesse an alternativen Methoden geweckt werden.
Demnach handelt es sich um einen Ausblick, der den Studienanfänger*innen der Mathematik bereits am Beginn ihres Studiums ermöglicht werden soll. Einerseits soll also dadurch Interesse an alternative Herangehensweisen geweckt und die Faszination an der Mathematik bestärkt werden. Dies erscheint mir vor allem durch die Konstruktion und Verwendung der hyperreellen Zahlen realistisch.

Andererseits sehe ich einen weiteren Vorteil in der Erweiterung der eigenen Konzepte anhand intuitiver Definitionen mithilfe hyperreeller Methoden. Bevor wir die hyperreelle Fortsetzung einer reellen Funktion einführen, werden wir noch ein paar praktische Rechenregeln im Umgang mit hyperreellen Zahlen besprechen.

3.1 Praktische Rechenregeln im Umgang mit hyperreellen Zahlen

Im Folgenden wird auf die Beweise der einzelnen Rechenregeln verzichtet. Beweise dazu lassen sich beispielsweise in [Keisler, Foundations 2022] nachlesen.

Satz 22. *Es seien ε, δ infinitesimal, α, β endlich und nicht infinitesimal und Ω, H infinit (unendlich) $\in {}^*\mathbb{R}$. Es gelten folgende Rechenregeln:*

i) $\varepsilon \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}$ *ist infinit.*

ii) $\frac{1}{\Omega}$ *ist infinitesimal*

iii) $\varepsilon + \delta$ *ist infinitesimal*

iv) $\Omega + \varepsilon$ *als auch* $\Omega + \alpha$ *sind infinit*

v) $\varepsilon + \alpha$ *ist finit (aber nicht infinitesimal)*

vi) $\alpha + \beta$ *ist finit (und fallweise infinitesimal, z.B. falls* $\beta = -\alpha$*)*

vii) $\varepsilon \cdot \delta$ *als auch* $\varepsilon \cdot \alpha$ *sind infinitesimal*

viii) $\alpha \cdot \beta$ *ist finit (aber nicht infinitesimal)*

ix) $\Omega \cdot H$ *als auch* $\Omega \cdot \alpha$ *sind infinit*

x) $\frac{\varepsilon}{\alpha}, \frac{\varepsilon}{\Omega}$ *und* $\frac{\alpha}{\Omega}$ *sind infinitesimal*

xi) $\frac{\alpha}{\beta}$ *ist finit (aber nicht infinitesimal)*

xii) $\frac{\Omega}{\alpha}$ *ist infinit. Falls* $\varepsilon \neq 0$*, dann sind auch* $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ *und* $\frac{\Omega}{\varepsilon}$ *infinit*

xiii) Falls $\varepsilon \geq 0$*, dann ist* $\sqrt[n]{\varepsilon}$ *infinitesimal, mit* $n \in \mathbb{N}$

xiv) Falls $\alpha > 0$*, dann ist* $\sqrt[n]{\alpha}$ *endlich (aber nicht infinitesimal), mit* $n \in \mathbb{N}$

xiv) Falls $\Omega > 0$*, dann ist* $\sqrt[n]{\Omega}$ *infinit, mit* $n \in \mathbb{N}$

Wichtig: Folgende Ausdrücke sind in $^*\mathbb{R}$ nicht eindeutig definiert, d.h. wir haben keine Rechenregel dafür. Alle dieser Formen können infinitesimal, endlich und zugleich nicht infinitesimal oder unendlich sein.

- $\frac{\varepsilon}{\delta}$
- $\frac{\Omega}{H}$
- $\Omega \cdot \varepsilon$
- $\Omega + H$

3.2 Die hyperreelle Fortsetzung einer reellen Funktion

Es wird nun jeder reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine hyperreelle Funktion $^*f : {^*\mathbb{R}} \to {^*\mathbb{R}}$ zugeordnet, welche die vorgegebene Funktion f fortsetzt. Wir werden im Laufe des Kapitels sehen, dass sich die bereits bekannten Begriffe *Stetigkeit und Differenzierbarkeit* auf natürliche Weise aus den Erkenntnissen des letzten Kapitels ergeben werden.

Definition 15. Es sei f eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir definieren nun für ein $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$:

$$^*f(\overline{\alpha}) = \overline{\beta}, \text{ mit } \beta_n = f(\alpha_n) \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Satz 23. *Die Funktion $^*f$ als Fortsetzung von f ist nicht von der speziellen Darstellung von $\overline{\alpha}$ abhängig, somit ist $^*f$ eine Funktion und es gilt außerdem:*

i) $^*f(r) = f(r) \quad \forall\, r \in \mathbb{R}$

ii) $^*f(\overline{\alpha}) = \overline{f \circ \alpha} \quad \forall\, \overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$

Bemerkung. Die Notation $f \circ \alpha$ meint die Verkettung zweier Funktionen $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, somit ist

$$f \circ \alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Das heißt $(f \circ \alpha)(n) = f(\alpha_n)$, mit $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es sei $\overline{\alpha}, \overline{\alpha}' \in {}^*\mathbb{R}$ und $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}'$. Somit folgt sofort, dass $\alpha_n = \alpha'_n$ fast überall. Folglich ist dann auch $f(\alpha_n) = f(\alpha'_n)$ fast überall. Daraus folgt, dass $^*f(\overline{\alpha})$ nicht von der speziellen Darstellung von $\overline{\alpha}$ abhängt.

Ad ii): Laut Definition gilt $^*f(\overline{\alpha}) = \overline{\beta}$, wobei $\beta_n = f(\alpha_n) = (f \circ \alpha)(n)$. Somit ist nun $\overline{\beta} = \overline{f \circ \alpha}$ und schließlich gilt $^*f(\overline{\alpha}) = \overline{f \circ \alpha}$.

Ad i): Es gilt $f \circ r_n = f(r_n)$ und deshalb folgt:

$$^*f(r) = {}^*f(\overline{r_n}) = \overline{f \circ r_n} = f(r)$$

□

Im Folgenden werden wir zu den aus der klassischen Analysis gewohnten Buchstaben für Argumente und Funktionswerte wechseln. Fortan sind x, y automatisch, falls nicht anders angegeben, aus $^*\mathbb{R}$.

Beispiel 20. Betrachten wir nun die *identische Abbildung.*

$$id : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$$

Der zugehörige Funktionsgraph, die erste Mediane, besteht aus allen Punkten, bei denen die beiden reellen Koordinaten übereinstimmen. Das heißt, die Definitionsmenge entspricht der Wertemenge ($W = f(D)$), also $D = W = \mathbb{R}$. Anhand dieses Beispiels wird auch die hyperreelle Fortsetzung $^*f$ intuitiv klar, denn $^*f$ bildet dann schließlich alle hyperreellen Zahlen auf sich selbst ab, mit dem einzigen Unterschied, dass $D = W = {}^*\mathbb{R}$.

$$^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R},\ x \mapsto x.$$

Der folgende Satz liefert uns noch weitere Eigenschaften was die Fortsetzung von f zu ${}^*f$ anbelangt.

Satz 24. *Sind f, g reelle Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$, dann gelten folgende Aussagen:*

i) ${}^*(f \pm g) \;=\; {}^*f \;\pm\; {}^*g$

ii) ${}^*(f \cdot g) \;=\; {}^*f \;\cdot\; {}^*g$

iii) ${}^*(g \circ f) \;=\; {}^*g \;\circ\; {}^*f$

iv) *Wenn* $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, *dann* ${}^*f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot {}^*g(x)$ $\forall x \in {}^*\mathbb{R}$.

3.3 Stetigkeit

Wir haben nun alle Werkzeuge beisammen, um die Stetigkeit mittels einem Nonstandard-Kriterium zu definieren.

Ich bin der festen Überzeugung, dass die Nonstandard-Definition mehr die Intuition der Lernenden widerspiegelt und im Vergleich zur $\varepsilon - \delta-$Definition den propädeutischen Grenzwertbegriff aus der Schule besser aufgreift. Das stellt meines Erachtens einen großen Vorteil für Lernende dar und begründet die Sinnhaftigkeit eines hyperreellen Ausblicks innerhalb einer einführenden Analysisvorlesung.

Mithilfe der hyperreellen Fortsetzung ${}^*f$ der reellen Funktion f, werden wir nun auf elegante Art und Weise die Stetigkeit erhalten. Wenn nicht anders erwähnt, sind die Definitionsbereiche im Folgenden als $D = \mathbb{R}$ gewählt.

Definition 16. Sei f eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, dann heißt f stetig in a, falls:

$$x \in {}^*\mathbb{R} \text{ beliebig und } x \approx a \implies {}^*f(x) \approx f(a).$$

Ist f in allen Stellen ihres Definitionsbereichs stetig, dann nennen wir sie (global) stetig.

Bemerkung. (1) Wir wollen damit ausdrücken, dass immer wenn x infinitesimal nahe bei a liegt, folglich auch die beiden Funktionswerte ${}^*f(x)$ und $f(a)$ infinitesimal benachbart sein müssen.
(2) Eine infinitesimale Änderung beim Argument, darf also nur zu einer infinitesimalen Änderung beim Funktionswert führen. Diese Vorstellung steht im direkten Zusammenhang mit der Definition und lässt sich auch problemlos auf die klassische $\varepsilon-\delta-$Definition übertragen.
(3) Denkt man an den zugehörigen Funktionsgraphen von f, dann darf f innerhalb der Monade von a ausschließlich infinitesimale Sprünge machen. Das bedeutet, dass eine minimale Änderung beim Argument keinen „unerwartet großen Sprung“ beim Funktionswert hervorrufen darf – *Natura non facit saltus* wäre ein in der Geschichte der Naturwissenschaften bekannter Ausspruch, der die Stetigkeit als eine aus der Natur erwachsene Eigenschaft erscheinen lässt.

Obige infinitesimale Definition der Stetigkeit ist äquivalent zur $\varepsilon - \delta-$Definition. Für eine eingehendere Erläuterung inklusive Beweis, siehe [Landers 1994, 178f].

Die Definition lässt sich didaktisch gut anhand eines konkreten Funktionsgraphen veranschaulichen. Wenn also f eine stetige reelle Funktion ist und wir eine beliebige Stelle c des Definitionsbereichs betrachten, dann sieht man mit der auf den Punkt $(c, f(c))$ gerichteten *Unendlichkeitslupe* den gesamten Bereich der Funktion, für den $x \approx c$ gilt. Dies ist exemplarisch in folgender Abbildung 3.1 veranschaulicht.

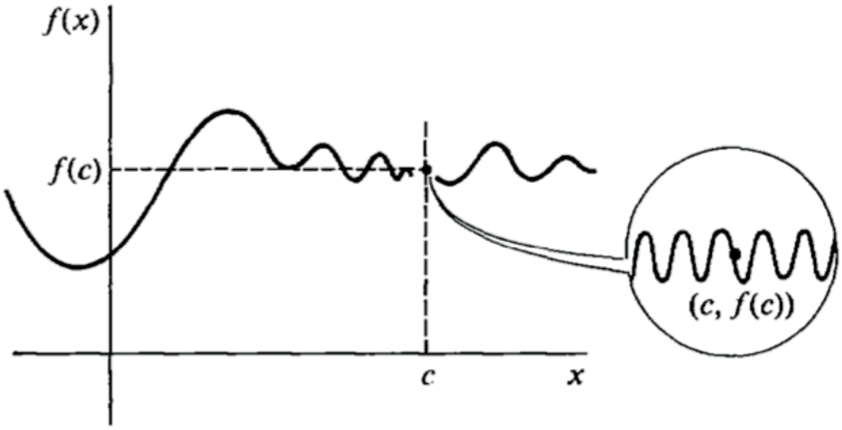

Abbildung 3.1: Graphik zur Stetigkeit [Keisler, Foundations 2022, 125]

Die *Unendlichkeitslupe*, als didaktisches Hilfsmittel, soll insbesondere demonstrieren, dass nur infinitesimale Änderungen/Sprünge von f, bei infinitesimalen Änderungen im Argument, erlaubt sind.

Hat eine infinitesimale Änderung im Argument eine nicht-infinitesimale Änderung der Funktionswerte zur Folge, dann ist f an einer solchen Stelle unstetig. Die nächste Abbildung 3.2 soll demnach die Unstetigkeit an einer Stelle c veranschaulichen.

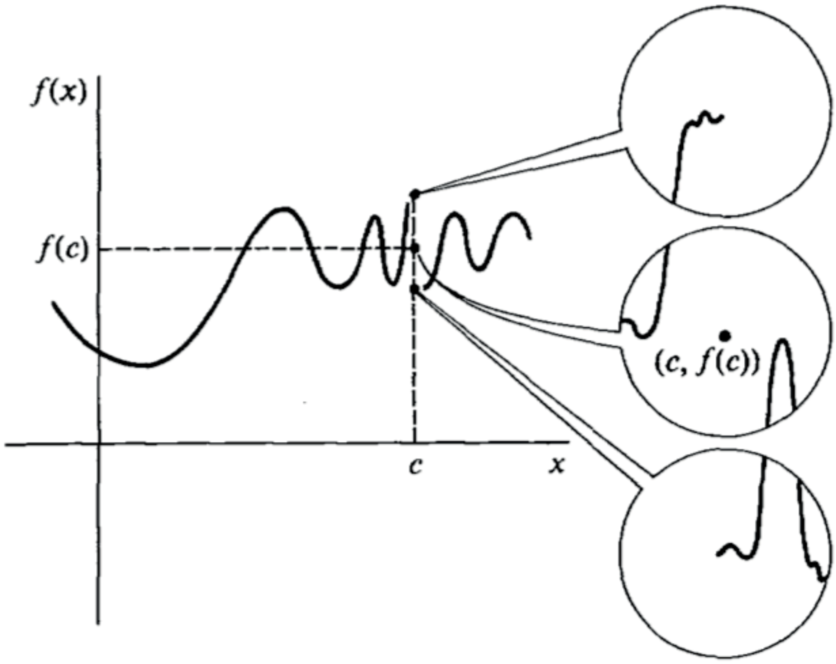

Abbildung 3.2: Graphik zur Unstetigkeit [Keisler, Foundations 2022, 125]

Bei einem mehr als infinitesimalen Sprung der Funktionswerte erfasst die *Unendlichkeitslupe* nicht mehr den gesamten Bereich der Funktion, wo $x \approx c$ ist. Ein Teil des Funktionsgraphen springt bildlich gesprochen aus dem Sichtfeld der Unendlichkeitslupe – und das darf bei stetigen Funktionen nicht passieren.

Möchten wir im konkreten Fall eine gegebene Funktion auf Stetigkeit überprüfen, dann verwenden wir folgendes Korollar.

Korollar 25. *Es sei f eine reelle stetige Funktion und $a \in \mathbb{R}$ eine Stelle aus dem Definitonsbereich, dann gilt für beliebiges infinitesimales dx*

$$a + dx \approx a \iff {}^*f(a + dx) \approx f(a)$$

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus der Definition für Stetigkeit. Dabei steht $a + dx$ für alle beliebigen $x \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x \approx a$ und ${}^*f(x + dx)$ für die hyperreelle Fortsetzung ${}^*f(x)$, die infinitesimal benachbart zu $f(a)$ ist. □

Bemerkung. (1)Alternativ lässt sich der Ausdruck $a+dx$ auch als Monade um a beschreiben, mit $m(a) = \{a + \varepsilon : \varepsilon \approx 0\}$. An dieser Stelle wollen wir uns in Erinnerung rufen, dass dx auch negativ sein kann und man dabei immer an eine beidseitige Annäherung an a denken sollte.
(2) Ein Vergleich mit dem (Folgen-)Kriterium unter Verwendung des rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerts aus der klassischen Analysis, empfinde ich hier als besonders angebracht. Die zu Grunde liegende Idee ist ja dieselbe.
(3) Der Ausdruck ${}^*f(a+dx)$ steht natürlich für die hyperreelle Fortsetzung. Fortan werden wir aber das Sternchen weglassen, sofern es im Kontext klar ist. Somit schreiben wir künftig einfach

$$a + dx \approx a \iff f(a + dx) \approx f(a).$$

Beispiel 21. Überprüfe, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig ist.
Sei $dx \approx 0$ infinitesimal, dann gilt $a \approx a + dx$. Folglich ist $f(a + dx) = (a + dx)^2 = a^2 + 2adx + (dx)^2 \approx a^2 = f(a)$. Somit folgt die Stetigkeit von f an der (beliebigen) Stelle a und sogleich auch, dass f (global) stetig ist.

Bemerkung. Das Produkt einer finiten (endlichen) mit einer infinitesimalen Zahl ist infinitesimal, d.h. $a \cdot dx \approx 0$ laut Satz 22.

Nun betrachten wir ein paar wohlbekannte Sätze zur Stetigkeit.

Satz 26. *Es seien f, g reelle Funktionen und beide stetig in a, dann sind auch folgende Verknüpfungen stetig:*

$$f + g;\ f - g;\ f \cdot g$$

Beweis. Es sei $x \in {}^*\mathbb{R}$ und $x \approx a$, dann gilt laut Definition

$$f(x) \approx f(a) \text{ und } g(x) \approx g(a).$$

Nun ist

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \approx f(a) + g(a) = (f+g)(a).$$

Somit ist $f+g$ stetig.
Dabei wurde insbesondere Satz 24 verwendet, als auch die Rechenregeln im Umgang mit $\approx$.
Der Beweis für $f-g$ funktioniert analog.

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \approx f(a) - g(a) = (f-g)(a).$$

Somit ist auch $f-g$ stetig.
Da $f(a)$ und $g(a)$ beide endlich sind, folgt

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \approx f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a).$$

Demnach ist $f \cdot g$ stetig in a. Somit ist alles gezeigt. □

Satz 27. *Es seien f, g reelle Funktionen mit passend gewähltem Definitionsbereich, wobei f in a und g in $f(a)$ stetig ist, dann ist auch $g \circ f$ stetig in a.*

Beweis. Es sei $a \approx x \in {}^*\mathbb{R}$, dann folgt sofort $f(x) \approx f(a)$, weil f laut Annahme stetig in a ist. Da ebenso g in $f(a)$ laut Annahme stetig ist, gilt:

$$(g \circ f)(x) \ = \ g(f(x)) \approx g(f(a)) = (g \circ f)(a),$$

und somit ist $g \circ f$ stetig in a. □

3.4 Differenzierbarkeit

Einer der zentralen Begriffe der Analysis ist jener der Differenzierbarkeit. Anders als in der klassischen Analysis wird im Hyperreellen die Differenzierbarkeit bzw. die Ableitung mit dem Quotient zweier infinitesimaler Größen definiert, mithilfe eines unendlich kleinen Differenzenquotienten sozusagen. Wir befinden uns dabei direkt auf den Spuren von Leibniz und greifen dabei die vielerorts gängige Vorstellung eines unendlich kleinen Steigungsdreiecks auf. Aus eigener Erfahrung kann ich berichten, dass diese intuitive Vorstellung vor allem im Physikstudium des Öfteren auftaucht. Mit der Nonstandard-Analysis haben wird diese sehr wertvolle Vorstellung auf ein mathematisch gesichertes Fundament gebettet. Wie schon im Kapitel zur Stetigkeit werden wir, um den Kreis zu den historischen Anfängen der Analysis zu schließen, für infinitesimale Elemente dx benutzen.

Definition 17. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, dann heißt f differenzierbar in $a \in \mathbb{R}$, falls für beliebiges $0 \approx dx \neq 0$ ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} \approx c$$

gilt. Kurz schreiben wir

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx}$$

und nennen den Ausdruck auch *Differentialquotient* an der Stelle a. Den zum Differentialquotient infinitesimal benachbarten reellen Wert c, also den reellen Teil des Differentialquotienten, bezeichnen wir als Ableitung von f an der Stelle a und schreiben dafür $f'(a) = c$.
Die Funktion, die jeder Stelle den zugehörigen Wert der Ableitung zuordnet, nennen wir Ableitungsfunktion von f und schreiben dafür f'.

Zur Erinnerung: Das Sternchen haben wir – wie im vorherigen Abschnitt vereinbart – bei $^*f(a+dx)$ bereits weggelassen.

Bemerkung. (1) Zuallererst stellen wir fest, dass in der hyperreellen Analysis der Differentialquotient und die Ableitung einer Funktion nicht äquivalent sind und demnach auch nicht synonym verwendet werden dürfen. Sie unterscheiden sich aber nur durch eine infinitesimale Abweichung.
Ein weiterer signifikanter Unterschied zwischen der reellen und hyperreellen Analysis ist daher die Bedeutung von df. In der Klassischen Analysis steht df für die Differenz der Funktionswerte der Tangentenfunktion. In der hyperreellen Analysis steht df, wie wir bereits gesehen haben, für die Änderung der Funktionswerte von f.
(2) Wir stellen außerdem fest, dass in der klassischen reellen Analysis mit $\frac{df}{dx}$ immer die Ableitung(-sfunktion) gemeint ist und einfach eine aus historischen Gründen beibehaltene Notation darstellt, die vor allem in der Physik auch ihre Vorteile hat und dort gerne zum Einsatz kommt.

In der Nonstandard-Analysis wird hingegen mancherorts auch, je nach Literatur, mit $\frac{df}{dx}$ die Ableitung(-sfunktion) bezeichnet. Ein schönes Beispiel für die Nicht-Einheitlichkeit der Bezeichnungen im Nonstandard-Bereich, also für den Fall wo $\frac{df}{dx} = f'(x)$ ist, ist bei [Keisler, Elem. Calc. 2022, 56] bzw. [Keisler, Foundations 2022, 37] zu finden.
Im hypereellen Fall in dieser Arbeit bezeichnen wir daher stets den Differentialquotienten mit $\frac{df}{dx}$, die Ableitung an einer Stelle a mit $f'(a)$ und die Ableitungsfunktion mit f'. Ich empfinde es als enorm wichtig, die Unterscheide bei den Bezeichnungen zur klassischen Analysis aufzuzeigen und die historische Bedeutung den modernen Bedeutungen der klassischen und hyperreellen Analysis gegenüberzustellen. Dadurch wird ein weiteres Mal auf natürliche Weise klar, dass die Nonstandard-Analysis näher bei den ursprünglichen Überlegungen der Erfinder liegt.
(3) In manchen Büchern wird die (nonstandard) Ableitung durch den Begriff **Standard-Teil** (Standard Part) definiert, also z.B. mit $st(2x + dx) = 2x$. Der Standardteil einer hyperreellen Zahl ist nichts anderes als der rein reelle Teil dieser Zahl. Die Ableitung wird dann als Standardteil des Differentialquotienten, also beispielsweise als $st(\frac{df}{dx}) = st(2x + dx) = 2x$, definiert. Dies hat den didaktischen Vorteil, die Ableitung mit einer einfachen Rechenvorschrift „als Bildung des Standardteils“ festzulegen. Für den Sekundarbereich wäre das dann jedenfalls so anzudenken. Elaborierte Unterrichtsvorschläge für die Sekundarstufe sind in [Bedürftig et.al 2023] zu finden.
Ich halte mich in dieser Arbeit jedoch an [Landers 1994] und empfinde es ebenso nicht als notwendig für unsere Zwecke den Standardteil einzuführen, da man meines Erachtens ohne den Begriff außerdem noch näher an den ursprünglichen Überlegungen von Leibniz dran ist. Dies ist auch im Sinne einer didaktischen Reduktion zu sehen, worin auf die Einführung eines weiteren Begriffs verzichtet wird.
(4) Ungeachtet der formalen Definition und Notation, bleibt festzuhalten, dass die Ableitung an einer Stelle (sofern sie existiert natürlich) eine eindeutige reelle Zahl ist, auch wenn sie mithilfe einer hyperreellen Zahl definiert wird.
(5) Diese reelle Zahl lässt sich bekanntlich als Tangentensteigung im zugehörigen Punkt an den Funktionsgraph interpretieren. Sie wird außerdem auch oft als momentane Steigung (Änderungsrate) oder lokale Änderungsrate bezeichnet.

Beispiel 22. Zeige, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ in $a = 2$ differenzierbar ist.

$$\frac{f(2 + dx) - f(2)}{dx} = \frac{(2 + dx)^2 - 2^2}{dx} = \frac{4 + 4dx + dx^2 - 4}{dx} =$$

$$= \frac{dx \cdot (4 + dx)}{dx} = 4 + dx \approx 4 \ (\in \mathbb{R}).$$

Somit folgt sofort, dass f in $a = 2$ differenzierbar und $f'(2) = 4$ ist.

Beispiel 23. Berechne die Ableitungsfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ anhand der Definition.

$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx} =$$

$$= \frac{dx \cdot (2x + dx)}{dx} = 2x + dx \approx 2x.$$

Also ist

$$f'(x) = 2x,$$

wobei wir eben für $x = 2$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

erhalten, wie wir bereits in obigem Beispiel 22 gezeigt haben.

Bemerkung. Denkt man an die Berechnung der Ableitungsfunktion mittels Grenzwert nach Cauchy, so ergibt sich nun folgende Brücke als Vorstellung beim Übergang ins Reelle. Der Unterschied zwischen dem Differentialquotienten, also der Sekantensteigung in dem infinitesimalen Intervall dx und der Tangentensteigung an der Stelle a kommt Null derart beliebig nahe, dass „er vernachlässigt werden kann“. Der Unterschied ist also infinitesimal.

Nun soll noch ein etwas schwierigeres Beispiel zur Berechnung der Ableitungsfunktion folgen.

Beispiel 24. Berechne die Ableitungsfunktion von $f : [0; \infty) \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = \sqrt{x}$ anhand der Definition.
Wir erinnern, dass laut Definition $0 \approx dx \neq 0$ ist und zusätzlich aufgrund der Definitionsmenge auch noch die Einschränkung $dx > 0$ für $x = 0$ gelten muss, weil für $x = 0$ und $dx < 0$ der Ausdruck $\sqrt{x + dx}$ nicht existieren würde (da es sich um eine reelle Funktion handelt).

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} = \frac{\sqrt{x+dx} - \sqrt{x}}{dx} = \frac{\sqrt{x+dx} - \sqrt{x}}{dx} \cdot \frac{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}} \\ = \frac{x + dx - x}{dx \cdot (\sqrt{x+dx} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}} \\ \approx \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Die Ableitungsfunktion von f lautet also

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

wobei sie nur auf dem Intervall $(0; \infty)$ definiert ist.

Bemerkung. Setzt man in der vorletzten Zeile in obiger Rechnung nämlich $x = 0$, so würde der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{dx}}$ über bleiben, welcher eine infinite, also unendlich große hyperreelle Zahl beschreiben würde. Die Ableitung ist aber laut Definition immer eine reelle Zahl, woraus nun sofort ersichtlich ist, warum f in $x = 0$ nicht differenzierbar ist, was wir ja bereits aus der klassischen Analysis wissen. Das Argument $x = 0$ ist also bei der Ableitung – wie man sofort sieht – kein zulässiges Argument.

In folgenden vier Fällen existiert die Ableitung $f'(a) = c,$ mit $c \in \mathbb{R}$, an einer Stelle a nicht:

- Der Wert des Differentialquotienten $\frac{df}{dx}$ ist infinit oder infinitesimal (also unendlich groß oder klein).
- Der Ausdruck $f(a + dx)$ ist undefiniert für ein $dx \neq 0$.
- $f(a)$ ist undefiniert.
- Der Wert des Differentialquotienten $\frac{df}{dx}$ ist nicht für alle $dx \neq 0$ gleich.

Wir möchten nun die wieder zum Leben erweckten, historischen Differentiale „dx, dy“ grafisch deuten. Dabei bedienen wir uns wiedermal des didaktischen Hilfsmittels der *Unendlichkeitslupe*, mit der wir in nachfolgender Abbildung das *charakteristische Dreieck* unendlichfach vergrößert sehen.

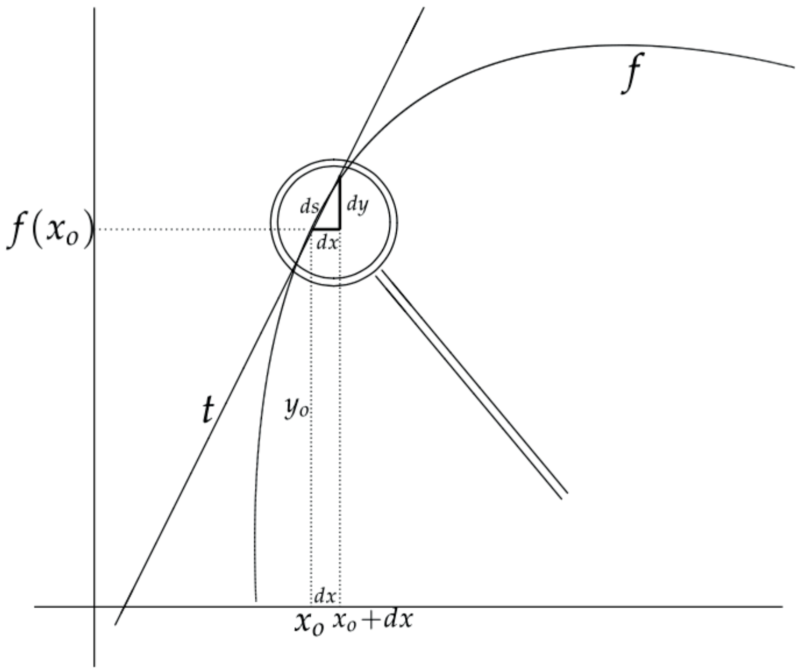

Abbildung 3.3: Das charakteristische Dreieck [Keisler, Foundations 2022, 17]

Die Differentiale dx, dy stehen für die infinitesimalen Kathetenlängen des unendlich kleinen *charakteristischen Dreiecks* (ds, dx, dy) der Sekante durch f in dem unendlich kleinen Intervall $[x_0; x_0 + dx]$. Der Differentialquotient $\frac{df}{dx} = \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$, gemäß Abbildung 3.3 als $\frac{dy}{dx}$ notiert, ist dann die Steigung dieser unendlich kleinen Sekante durch $[x_0; x_0 + dx]$. Sieht man durch die „reelle Brille“ hin, so erkennt man lediglich die Tangente t, deren Steigung $f'(x_0)$ eben genau der reelle Anteil der hyperreellen Sekantensteigung $\frac{df}{dx}$

ist. Nimmt man nun zusätzlich die Unendlichkeitslupe zur Hand, wie in Abbildung 3.3 dargestellt, so sieht man plötzlich auch die Sekante in $[x_0; x_0 + dx]$ in unendlichfacher Vergrößerung, welche wiederum Teil der reellen Tangente ist. Die Hypotenuse ds stellt dann den unendlich kleinen Abschnitt auf der Tangente bzw. Sekante (ds liegt ja auf beiden!) zwischen den beiden Schnittpunkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + dx, f(x_0 + dx))$ dar.

In anderen Worten, kurz und bündig: Die Tangetensteigung der Tangente t an f bei x_0 und die Sekantensteigung in $[x_0; x_0 + dx]$ sind nicht ident. Sie unterscheiden sich aber lediglich durch eine infinitesimale Abweichung, sodass: $f'(x_0) \approx \frac{dy}{dx}$. Die Tangentensteigung $f'(x_0)$ ist eine reelle Zahl, also der Wert der ersten Ableitung in x_0. Die Sekantensteigung in $[x_0; x_0 + dx]$ ist eine hyperreelle (finite) Zahl, die sich aus dem unendlich kleinen Steigungsdreieck (*dem charakteristischen Dreieck*) als Wert des (hyperreellen) Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ ergibt. Wir definieren $f'(x_0)$ als reellen Teil des (hyperreellen) Differentialquotienten.

Es gelten sämtliche Differentiationsrechenregeln, die in der klassischen Analysis gelten, auch in der Nonstandard-Analysis.

Ausblicksweise möchten wir noch exemplarisch eine Rechenregel besprechen und beweisen. Mithilfe der im vorherigen Kapitel hart erarbeiteten hyperreellen Zahlen, lassen sich nun analytische Beweise in vielen Fällen signifikant einfacher als in der klassischen Analysis führen. Exemplarisch dafür möchte ich die Kettenregel einführen und beweisen. In der Vorlesung ließe sich an dieser Stelle zur Demonstration ein direkter Vergleich zum klassischen Beweis ziehen.

Satz 28. *(Kettenregel)*
Es seinen f, g zwei reelle Funktionen mit passend gewählten Definitons-, Werte- und Zielmengen, sodass die Verkettung $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ existiert. Seien zudem g in x und f in $g(x)$ differenzierbar, dann ist auch $f \circ g$ differenzierbar in x und ihre Ableitung ist:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Beweis. Es seien f, g und $f \circ g$ wie oben.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{f(g(x + dx)) - f(g(x))}{dx} \\ &= \frac{f(g(x) + dg) - f(g(x))}{dx} \cdot \frac{dg}{dg} \\ &= \frac{f(g(x) + dg) - f(g(x))}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \\ &\approx f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Also ist $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. □

Bemerkung. Dies macht jedenfalls auch intuitiv Sinn, denn eine infinitesimale Änderung von x, also dx, verursacht eine infinitesimale Änderung von $g(x)$ um dg. Weil aber $g(x)$ das Argument von f ist, verändert sich wiederum $f(g(x))$ um df. Die Ableitung ergibt sich dann wieder als reeller Teil des Differentialquotienten unter der getätigten Annahme der Differenzierbarkeit.

Aber es sind eben nicht alle Beweise kürzer und prägnanter im Nichtstandard-Bereich, dazu noch kurz die Produktregel inklusive Beweis.

Satz 29. *Es seien f, g zwei hinreichend oft differenzierbare reelle Funktionen, und $h : h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Dann gilt für die Ableitung von h*

$$h'(x) = (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dx} &= \frac{f(x+dx) \cdot g(x+dx) - f(x) \cdot g(x)}{dx} \\
&= \frac{(f(x)+df) \cdot (g(x)+dg) - f(x) \cdot g(x)}{dx} \\
&= \frac{f(x) \cdot g(x) + df \cdot g(x) + dg \cdot f(x) + df \cdot dg - f(x) \cdot g(x)}{dx} \\
&= \frac{df}{dx} \cdot g(x) + \frac{dg}{dx} f(x) + \frac{df}{dx} \cdot dg \\
&\approx f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Wir haben schlichtweg verwendet, dass $df = f(x+dx) - f(x)$ äquivalent zu $f(x+dx) = df + f(x)$ ist. Die Differenzierbarkeit von f und g führt schließlich auf die letzte Zeile.

Zu guter Letzt möchten wir zeigen, dass auch der Nullstellensatz in der Nichtstandard-Analysis einen wesentlich einfacheren, und meiner Ansicht nach auch intuitiveren Beweis hat.

Satz 30. *Sei f auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $I = [a; b]$ definiert und stetig, und zusätzlich gelte entweder $f(a) < 0, f(b) > 0$ oder $f(a) > 0, f(b) < 0$. Dann besitzt f eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$, mit $f(\xi) = 0$.*

Beweis. Sei o.B.d.A. der Fall $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gegeben. Wir führen eine infinitesimale Unterteilung von $[a; b]$ durch, mit den durch $x_k = a + k\frac{b-a}{\mu}$ gegebenen Teilungspunkten, wobei μ eine hypernatürliche Zahl (siehe Bemerkung) ist. Wir wählen nun einen größten Index λ, für $f(x_\lambda) \leq 0$. Dann ist $x_{\lambda+1} \approx x_\lambda$ und folglich $f(x_{\lambda+1}) \geq 0$. Sei nun ξ reell und es gelte $x_{\lambda+1} \approx \xi \approx x_\lambda$, d.h. $x_{\lambda+1}$ und x_λ liegen in der Monade um ξ, dann folgt aus der Stetigkeit von f:

$$0 \geq f(x_\lambda) \approx f(\xi) \approx f(x_{\lambda+1}) \geq 0,$$

und daraus ergibt sich direkt $f(\xi) = 0$. $\square$

Bemerkung. (1) Bildet man von allen nicht negativen hyperreellen Zahlen den ganzzahligen Anteil, so erhält man die hypernatürlichen Zahlen ${}^*\mathbb{N}$.
(2) Die Verwendung von infinitesimalen Unterteilungen ist in der Nichtstandard-Analysis sozusagen Standard. So kommt sie beispielsweise bei der Definition vom bestimmten Integral zum Einsatz.
(3) Wir haben außerdem einen größten Index λ mit $f(x_\lambda) \leq 0$ ausgewählt. Dazu haben wir die Eigenschaften der hypernatürlichen Zahlen verwendet, die sich arithmetisch wie die natürlichen Zahlen verhalten. D.h. dass es in einer beschränkten, vorgegebenen Menge hypernatürlicher Zahlen stets eine größte hypernatürliche Zahl gibt. Diese Übertragung der arithmetischen Eigenschaften regelt das sogenannte Transferprinzip, das im folgenden letzten kleinen Kapitel dieser Arbeit besprochen wird.

3.5 Ausblick auf das mächtige Transferprinzip und die Nichtstandard-Welt

„Die Problematik des Unendlichen verlagert sich. Sie wird in die Arithmetik versetzt. ... Denn: Das Unendliche ist in den infiniten und infinitesimalen Zahlen arithmetisch gegeben.“ [Bedürftig et. al. 2023, 89]

Das Transferprinzip ist in der Nichtstandard-Analysis unglaublich mächtig. Ich werde an dieser Stelle aber nur sehr oberflächlich darauf eingehen, nur so weit, dass dadurch ein Ausblick in die weite Nichtstandard-Welt gewährleistet wird, denn das ist das Ziel.

Würde man tiefer eintauchen wollen, müsste man sich auf fundamentaleren Ebenen der Mathematik bewegen. Man wird dann erstmal streng definieren müssen, was wir unter einer Aussage und deren Gültigkeit überhaupt verstehen (wollen). Eine Aussage ist eine bestimmte Formel. Eine Formel ist wiederrum eine Aneinanderreihung gewisser, vorab exakt formulierter und zugelassener Zeichen. Dabei möchte man der Effizienz wegen möglichst wenige Zeichen verwenden, auf bestimmte aber nicht verzichten.

Eine sogenannte Superstruktur enthält dann sämtliche Objekte einer mathematischen Theorie als Elemente. Das sind recht viele. Betrachtet man nicht alle Bereiche der Mathematik, sondern begrenzt man sich nur auf die reelle Analysis, so würde die Superstruktur $\hat{\mathbb{R}}$ alle in der reellen Analysis betrachteten Objekte beinhalten. Elemente von $\hat{\mathbb{R}}$ wären dann beispielsweise die *Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen*, *die Menge aller linearen Abbildungen von* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *die Menge aller Relationen über* $\mathbb{R}^n$ und natürlich auch $\mathbb{R}^2$.

Mit dem Werkzeug einer Aussage (d.h. eine spezielle Formel) für eine Superstruktur lassen sich dann alle weiteren relevanten Sachverhalte formalisieren.

Eine Formel für eine Superstruktur $\hat{V}$ besteht aus den Zeichen der Folgenden drei disjunkten Mengen von Zeichen:

1.) Die erste Menge enthält folgende elf Zeichen:

$$= \ \in \ \neg \ \hat{\ } \ \forall \, \langle \, \rangle \, , \, (\,) \, \upharpoonright$$

2.) Die zweite Menge enthält die Variablen:

$$\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \ldots \underline{A}, \underline{A}, \underline{A} \ldots \underline{f}, \underline{g}, \underline{h} \ldots$$

2.) Die dritte Menge enthält die Elemente von $\hat{V}$.

Die Standardwelt bildet also eine derartige, spezielle Superstruktur. Der Standardwelt wird funktional eine neue sogenannte Nichtstandardwelt zugeordnet, die selbst Teil einer gigantischen weiteren Superstruktur ist. Es gibt dann eine Abbildung, die jeden Satz (d.h. jede gültige Aussage) der Standardwelt in einen gültigen Satz der Nichtandard-Welt überführt. Das Transferprinzip besagt dann, dass über ${}^*\mathbb{R}$ alle Aussagen gültig sind, die auch über $\mathbb{R}$ gültig sind.

Zusammengefasst für den Rahmen dieser Einführung, besagt das Transferprinzip folgendes.

Gilt eine Aussage über $\mathbb{R}$, so gilt sie auch über ${}^*\mathbb{R}$.

Das Transferprinzip ist demnach ein sehr wichtiges Beweisprinzip, mithilfe dessen direkt gezeigt werden kann, dass ${}^*\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist, genauer gesagt aus den betreffenden Körperaxiomen unter Anwendung des Transferprinzips.
Ebenso folgt direkt aus dem Transferprinizip die hyperreelle Fortsetzung einer Funktion und somit auch die hyperreelle Existenz uns bekannter transzendenter Funktionen wie $\sin, \cos, e^x \ldots$, die folglich denselben Rechengesetzen folgen wie die „reellen Geschwister“.

Als didaktisches Hilfsmittel, um ein Gefühl für das Transferprinzip zu bekommen, lässt sich ein **eingeschränktes Transferprinzip** nach [Landers 1994] formulieren.

Das eingeschränkte Transferprinzip:

Es sei φ eine Aussage, in der Funktionen $f_1, \ldots, f_m$, die Menge $\mathbb{R}$, reelle Zahlen, sowie $+, -, \cdot, \leq, ||$ und die Zeichen $=, \in, \hat{}, \vee, \neg, \to, \forall \underline{x}, \exists \underline{y}$ vorkommen; wobei $\underline{x}, \underline{y}$ Variablen sind.
Die Aussage φ ist genau dann gültig, falls die Aussage ${}^*\varphi$ gültig ist. Dabei entsteht ${}^*\varphi$ aus φ dadurch, dass $f_1, \ldots, f_m$ durch ${}^*f_1, \ldots, {}^* f_m$ und $\mathbb{R}$ durch ${}^*\mathbb{R}$ ersetzt werden.
Nun wollen wir zur Veranschaulichung dessen einen Baustein des Beweises, dass ${}^*\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist, vorzeigen. Wir betrachten das Axiom der Kommutativität bezüglich der Addition.

Beispiel 25. Aus der Kommutativität der Addition in $\mathbb{R}$, d.h. aus folgender Aussage

$$\varphi \equiv (\forall \underline{x} \in \mathbb{R})(\forall \underline{y} \in \mathbb{R})\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$$

folgt die Kommutativität bezüglich der Addition in ${}^*\mathbb{R}$, indem die gültige Aussage φ mittels Transferprinzip in die gültige Aussage ${}^*\varphi$ übergeht

$${}^*\varphi \equiv (\forall \underline{x} \in {}^*\mathbb{R})(\forall \underline{y} \in {}^*\mathbb{R})\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$$

Analog funktioniert das für die restlichen Körperaxiome.

Das soll die Wirkungsweise des Transferprinzips verdeutlichen und einen Ausblick auf dessen Mächtigkeit für die Nichtstandard-Welt ermöglichen.

Für manche vielleicht gar wie ein Paralleluniversium erscheinend, gibt es auch Nichtstandard-Stochastik, Nichtstandard-Topologie, komplexe Nichtstandard-Analysis, . . . , also tatsächlich eine parallel zur Standardmathematik existierende Welt, die sich jedoch tief im Kernschatten der Standard-Mathematik befindet. In Zukunft kann sich dies ja eventuell noch ändern – zumindest wenn es nach Kurt Gödel geht:

„Rather there are good reasons to believe that non-standard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future. . . . I think, in coming centuries it will be considered a great oddity in the history of mathematics that the first exact theory of infinitesimals was developed 300 years after the invention of the differential calculus.“ [Robinson 1996, xvi]

4 Schlussbemerkungen

Natürlich habe ich mich vor dem Schreiben dieser Arbeit grundlegend gefragt, was der Nichtstandard-Analysis ihre Daseinsberechtigung in einer einführenden Analysisvorlesung gibt. Es war weder ein Ziel der Arbeit, dies zu beantworten, noch maße ich es mir in irgendeiner Weise an, hierauf eine qualifizierte persönliche Antwort zu geben. Vielmehr möchte ich an dieser Stelle auf die kürzlich unter dem Titel „*Nichtstandard in der elementaren Analysis. Mathematische, logische, philosophische und didaktische Studien zur Bedeutung der Nichtstandardanalysis in der Lehre*“ erschienene Dissertation von Karl Kuhlemann verweisen [Kuhlemann 2022].

Ungeachtet dessen, ob man deren Einsatz im regulären Anfangsunterricht befürwortet oder nicht, ist folgendes unmissverständlich klar und wenig überraschend durch die Forschungen von Kuhlemann unterstrichen worden:

Die Nonstandard-Analysis spielt in der Hochschullehre so gut wie keine Rolle.

Im Zuge der Forschungsarbeit wurden 50 Hochschullehrende befragt, wovon kein Einziger Teile der Nichtstandard-Analysis in seine Vorlesungen *Analysis I und II* integriert hat. Davon evaluieren 34% den Einsatz von Nichtstandard-Analysis in der Lehre ausschließlich negativ. Jedoch erachten 31% der Befragten den ergänzenden Einsatz als positiv und 21 % stehen dem ergänzenden Einsatz zumindest neutral gegenüber.

Dies nahm ich mir zum Anlass, mir einen Vorschlag für eine ergänzende Einheit zur Nonstandard-Analysis im Rahmen einer klassischen Analysis-Vorlesung zu erlauben.

Ist der Nichtstandard-Zugang zur Analysis schwieriger als der klassische und deshalb weniger für Anfängervorlesungen geeignet?
Dem Argument, dass die Komplexität der Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$ jene von $\mathbb{R}$ maßgeblich übersteige und sich demnach für den Anfangsunterricht disqualifiziere, entgegnet Kuhlemann folgendermaßen. In den meisten als vorlesungsbegleitende Literatur empfohlenen Lehrbüchern des deutschen Sprachraums, werden die reellen Zahlen axiomatisch eingeführt und die Konstruktion somit umgangen. Dies gilt zum Beispiel auch für „den Klassiker“[Forster 2013], worin $\mathbb{R}$ als gegeben vorausgesetzt wird, bevor die Axiome folgen. Gleichermaßen könnte man ja in einer hyperreellen Anfängervorlesung vorgehen. Genau das tat H. Jerome Keisler. Keisler hatte von 1969 an über 20 Jahre hinweg seinen axiomatisch begründeten Analysis-Einführungskurs an der University of Wisconsin Ma-

dison etabliert, woraus auch das Lehrbuch [Keisler, Elem. Calc. 2022] in mehreren Auflagen hervorgegangen ist, wohlgemerkt das erste Lehrbuch überhaupt zur Nonstandard-Analysis. Aufgrund ausbleibender Unterstützung wurde der Nichtstandard-Kurs nicht fortgeführt.

Eine ähnliche didaktische Vorgehensweise sieht man auch bei Thomas Bedürftig [Bedürftig et.al 2022] bzw. [Bedürftig et.al 2023] , der einen axiomatischen Zugang für den Schulbetrieb der Sekundarstufe vorgelegt hat. Dabei geht es den Autoren vor allem darum, den ohnehin im Lehrplan nur mehr rudimentär vorgesehenen Grenzwertbegriff zu ersetzen. Der abstrakte Limes-Formalismus soll dadurch wegfallen und durch elementare Arithmetik und geometrische Anschaulichkeit ersetzt werden. Zahlreiche Erläuterungen, Publikationen und Materialien finden sich auf deren gemeinsamer Webseite [Nichtstandard-Analysis für die Schule].

Nach Kuhlemann „dürfte weitgehende Einigkeit darüber bestehen, dass man in Analysis I weder Robinsons modelltheoretische Argumentation, noch Luxemburgs Ultrafilterkonstruktion, noch Nelsons Axiome der Internen Mengenlehre oder verwandte Axiomensysteme lehren kann.“ [Kuhlemann 2022, 106] Kuhlemann selbst erachtet die dafür benötigten Konzepte schlichtweg als zu kompliziert. Das sehe ich anders. Ich bin hingegen der festen Überzeugung, dass eine didaktisch motivierte Einführung mit dem Konzept des Ultrafilters sehr wohl einen gangbaren Weg darstellt. Ich sehe es vielmehr als Ressource für angehende Mathematiker*innen, sich mit einem komplizierten Konzept zu beschäftigen. Infolgedessen lässt sich vor allem bei Beginner*innen das Gefühl von „Lust auf mehr“ wecken. Zumal handelt es sich ja um eine zum klassischen Teil ergänzende Lehrveranstaltung, worin es erst recht möglich sein soll, die Mächtigkeit mathematischer Konzepte anhand des Ultrafilters zu verdeutlichen.

Das sind also beispielhafte Vorhaben, die Nichtstandard-Analysis in die reguläre Lehre zu integrieren. In der Praxis ist man aber von einem solchen Vorhaben weit entfernt. Dafür mag es auch seine vielfältigsten Gründe geben, in [Kuhlemann 2022] werden die dazu führenden Gegenpositionen eingefangen und empirisch ausgewertet. Bedürftig sieht als Ursache der eingenommenen Gegenpositionen sogenannte äußere Gründe und bezieht sich in seiner Argumentation wiederum auf [Kuhlemann 2022]. „Was sind die sogenannten äußeren Gründe? Sie kommen aus Traditionen, Konventionen, Haltungen, Denkgewohnheiten und Routinen, die oft bereits die bloße Wahrnehmung des Nonstandardansatzes be- oder verhindern.“ [Bedürftig 2022, 149] Jemand der standard arbeitet und denkt, müsse jene Gewohnheiten in Frage stellen. Als Beispiel verweist er auf die Identifizierung der reellen Zahlen als Punkte auf der lückenlosen Zahlengeraden, als bekannte alltägliche Grundvorstellung. Die Nonstandard-Analysis widerspricht bekanntlich dieser etablierten Grundvorstellung. Er sieht den Widerstand folglich auch soziologisch begründet, weil so gut wie jeder standard denkt und die Nichtstandard-Methoden kaum kennt, gegebenenfalls dabei auch Gewohntes in Gefahr sieht.

5 Zusammenfassung

In der vorliegenden hochschuldidaktischen Masterarbeit wird ein Vorschlag für zwei ergänzende Nichtstandard-Einheiten im Rahmen einer einführenden Analysis-Vorlesung für Studierende der Mathematik unterbreitet. Dabei werden die hyperreellen Zahlen von Grund auf eingeführt und Schritt für Schritt konstruiert. Für die Konstruktion wurde mit der Arbeit ein didaktisches Konzept für den Weg zum Konzept des Ultrafilters entwickelt. Die ausblicksweise Einführung in die Nichtstandard-Analysis erfolgt anhand der Begriffe *Stetigkeit* und *Differenzierbarkeit*. Veranschaulichungen anhand von konkreten Beispielen ziehen sich durch die gesamte Arbeit. Die Schlussbemerkungen enthalten zur Abrundung noch einen kurzen Umriss der Nichtstandard-Analysis in der (universitären) Lehre.

Literaturverzeichnis

[1] Peter Baumann, Thomas Kirski. *Analysis mit hyperreellen Zahlen. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.* 100. Ausgabe (Februar 2016), 6-16.

[2] Peter Baumann, Thomas Kirski. *Infinitesimalrechnung. Analysis mit hyperreellen Zahlen.* Berlin. Springer (2019).
doi:10.1007/978-3-662-56792-0

[3] Peter Baumann, Thomas Kirski. *Nichstandard-Analysis für die Schule.* Webseite. Online unter: `http://www.nichtstandard.de/index.html`
(Zuletzt aufgerufen am 22.12.2023)

[4] Thomas Bedürftig et.al. *Über die Elemente der Analysis–Standard und Nonstandard.* Berlin. Springer (2022).
doi:10.1007/978-3-662-64789-9

[5] Thomas Bedürftig et.al. *dx,dy–Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen. Eine Handreichung.* Berlin/Hannover/Worms (2023). Online unter: `http://www.nichtstandard.de/pdf/Handreichung-2021-Auflage2.pdf`
(Download am 22.12.2023)

[6] Thomas Bedürftig, Karl Kuhlemann. *Grenzwerte oder infinitesimale Zahlen? Über Einstiege in die Analysis und ihren Hintergrund.* Wiesbaden. Springer (2020).
doi:10.1007/978-3-658-31908-3

[7] Mauro Di Nasso et.al. *Nonstandard Methods in Ramsey Theory and Combinatorial Number Theory.* Cham. Springer (2019).
doi:10.1007/978-3-030-17956-4

[8] Franz Embacher. *Analysis in einer Variable für das Lehramt. Vorlesungsskriptum, Sommersemester 2017.* Universität Wien. Version 1.5 (2018).

[9] Otto Forster. *Analysis 1.* Wiesbaden. 11.Auflage. Springer (2013).
doi:10.1007/978-3-658-00317-3

[10] Isaac Goldbring. *Lecture Notes on Nonstandard Analysis UCLA Summer School in Logic* University of California (2014). Online unter: `https://www.math.uci.edu/~isaac/NSA%20notes.pdf`
(Download am 28.10.2023)

[11] Karl Kuhlemann. *Nichtstandard in der elementaren Analysis. Mathematische, logische, philosophische und didaktische Studien zur Bedeutung der Nichtstandardanalysis in der Lehre.* Dissertation. Universität Hannover (2022). Online unter: `https://www.repo.uni-hannover.de/handle/123456789/12202` (Download am 28.08.2023)

[12] H. Jerome Keisler. *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach.* University of Wisconsin. Second Edition (2022). Online unter: `https://people.math.wisc.edu/~hkeisler/calc.html` (Download am 15.04.2023)

[13] H. Jerome Keisler. *Foundations of Infinitesimal Calculus.* University of Wisconsin (2022). Online unter: `https://people.math.wisc.edu/~hkeisler/foundations.html` (Download am 15.04.2023)

[14] Dieter Landers, Lothar Rogge. *Nichtstandard Analysis.* u.a. Heidelberg. Springer (1994).

[15] Gerd Laures, Markus Szymik. *Grundkurs Topologie.* Heidelberg. Springer (2009). doi:10.1007/978-3-8274-2218-7

[16] Abraham Robinson. *Non-Standard Analysis* Princeton University Press (1996).

[17] Thomas Sonar. *3000 Jahre Analysis* Berlin/Heidelberg. Springer (2016). doi:10.1007/978-3-662-48918-5

[18] Rudolf Taschner. *Anwendungsorientierte Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Fachrichtungen. Band 1: Grundbegriffe* München 2014. Carl Hanser Verlag (2014).

Abbildungsverzeichnis

2.1 Geometrische Darstellung der hyperreellen Zahlen [Bedürftig et.al 2022, 13] 30

3.1 Graphik zur Stetigkeit [Keisler, Foundations 2022, 125] 38
3.2 Graphik zur Unstetigkeit [Keisler, Foundations 2022, 125] 38
3.3 Das charakteristische Dreieck [Keisler, Foundations 2022, 17] 44