MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Grundvorstellungen zur Ableitung bei Lernenden
in 7. Klassen AHS"

verfasst von / submitted by

Jakob Nömair, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2021 / Vienna 2021

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 511 520 02
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) UF Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung UF Mathematik
Betreut von / Supervisor:	Doz. Dr. Franz Embacher

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei den Personen bedanken, ohne die der erfolgreiche Abschluss der Masterarbeit und des gesamten Studiums nicht möglich gewesen wäre.

Zuerst möchte ich mich bei meiner Freundin Lena bedanken, die über all die Jahre meine größte und wichtigste Stütze war und mir immer mit Geduld und guten Ratschlägen zur Seite gestanden ist. Ohne dich wäre mein Studium in dieser Form sicher nicht möglich gewesen – Danke!

Besonderer Dank gilt auch meinen Eltern, die mich immer bedingungslos unterstützt haben und ohne die es für mich nicht möglich gewesen wäre, ein so langes Studium erfolgreich abschließen zu können. Auch bei meiner Schwester möchte ich mich herzlich dafür bedanken, dass sie mir gerade in den ersten Semestern durch ihre guten Tipps vieles erleichtert hat und immer ein Vorbild für mich war.

Zu guter Letzt bedanke ich mich beim Betreuer meiner Masterarbeit, Dr. Franz Embacher. Schon während des Studiums konnten Sie mich in einigen Vorlesungen und Übungen für die Inhalte der Analysis begeistern. Besonders bedanken möchte ich mich dafür, dass Sie sich trotz geringer zeitlicher Ressourcen dazu bereiterklärt haben, meine Arbeit zu betreuen. Auch für die unkomplizierte Zusammenarbeit im Rahmen dieser Masterarbeit und die vielen hilfreichen Tipps und detaillierten Verbesserungsvorschläge, die mir den Arbeitsprozess sehr erleichtert haben, möchte ich herzlich Danke sagen.

Abstract

Deutsch

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit den Grundvorstellungen zur Ableitung. Die Ziele sind, den Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen zur Ableitung bei Lernenden in 7. Klassen AHS festzustellen, um so oft vernachlässigte Facetten des Ableitungsbegriffs diagnostizieren zu können und zu untersuchen, ob besser ausgeprägte Grundvorstellungen zu einer höheren Lösungsfähigkeit führen. Dazu wurde neben einer Expertinnen- und Expertenbefragung auch eine Befragung unter Lernenden durchgeführt, an der 114 Schülerinnen und Schüler teilnahmen. Es zeigt sich, dass die für die Reifeprüfung besonders wichtigen Grundvorstellungen der lokalen Änderungsrate und der Tangentensteigung deutlich stärker ausgeprägt sind als jene der lokalen Linearität und des Verstärkungsfaktors. Überdies legen die Ergebnisse nahe, dass stark ausgeprägte Grundvorstellungen auch besser zum Lösen von Typ-1-Aufgaben aktiviert werden können. Das spricht dafür zu versuchen, im Unterricht auch andere und für die Reifeprüfung weniger wichtige Grundvorstellungen auszubilden, damit Lernende mit einer größeren Vielfalt an Problemstellungen umgehen können und so ein umfangreicheres Verständnis vom Ableitungsbegriff erlangen.

English

The thesis at hand is concerned with basic concepts of derivation. Its main goal is to determine the degree to which those basic concepts are developed among students in the 11^{th} form AHS so as to detect typically neglected aspects of the term “derivation”. Furthermore, the question of whether more profound basic concepts also result in a higher problem-solving capability is addressed. In order to answer these questions, experts as well as 114 students were asked to fill in a questionnaire. An analysis of the collected data has shown that those basic concepts that are especially relevant for passing the Matura, namely the ones of Local rate of change and Tangent slope are considerably better developed than those of Local Linearity and the amplification factor. Moreover, the results suggest that highly developed basic concepts are of valuable help when it comes to solving Typ-1 tasks. This indicates that it is worth cultivating also the so far neglected basic concepts which, even though less important for passing the Matura, might increase students’ problem-solving capability and also lead to a more profound understanding of the term “derivation”.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Durch den vielschichtigen Blick, der einem in Lehrveranstaltungen an der Universität in Bezug auf die Ableitung einer Funktion geboten wird, wird die Eindimensionalität der Behandlung der Thematik in der Schulmathematik besonders deutlich. Einüben der strukturell immer gleichen Aufgaben, um Lernende optimal auf die zentrale Reifeprüfung vorzubereiten, steht im Mathematikunterricht in der Schule an der Tagesordnung.

Diese Überlegungen ließen mein Interesse an der Erforschung des tatsächlich vorherrschenden Ausprägungsgrads der vier Grundvorstellungen nach Greefrath et al. (2016: 147) bei Lernenden in 7. Klassen AHS aufblühen. Vor allem mit Blick auf den Niveauunterschied, der zwischen Reifeprüfung und Anforderungen in Studiengängen mit mathematischen Schwerpunkten besteht, kann die in dieser Arbeit vorgestellte Forschung Aufschluss darüber geben, ob bzw. in welchen Spektren des Ableitungsbegriffs Aufholbedarf besteht. Neben zahlreichen professionsrelevanten Aspekten, wie die Analyse von Schulbüchern oder der Vorstellung konkreter Unterrichtsgänge, bildet die Beantwortung der folgenden beiden Forschungsfragen das Hauptziel der vorliegenden Arbeit:

Forschungsfrage Nr. 1: In welchem Ausmaß sind die Grundvorstellungen der Ableitung nach Greefrath et al. (2016: 147) bei Lernenden in 7. Klassen AHS ausgeprägt?

Forschungsfrage Nr. 2: Inwieweit sind stark ausgeprägte Grundvorstellungen für das Lösen von Typ-1-Aufgaben förderlich?

Im ersten Teil (Kapitel 1–5) der Masterarbeit stehen curriculare Einordnungen, historische Entwicklungen, fachliche Klärungen und theoretische Ausführungen zu den Aspekten und Grundvorstellungen des Ableitungsbegriff im Vordergrund, bevor im zweiten Teil (Kapitel 6–8) die ausführliche Beantwortung der Forschungsfragen erfolgt. Verwendet werden dafür die Daten zweier Online-Befragungsprojekte, die von April 2021 bis Juni 2021 einerseits bei vier Fachdidaktik-Expertinnen und Experten, andererseits bei 114 Lernenden von 7. Klassen AHS durchgeführt wurden. Die Ergebnisse dieser quantitativen Analyse werden in Form von insgesamt 26 Diagrammen und zehn Tabellen grafisch aufbereitet und im Fließtext diskutiert.

1. Differentialrechnung im Lehrplan, im Grundkompetenzkatalog und bei der schriftlichen Reifeprüfung

Das Thema „Differentialrechnung“ ist eines der umfangreichsten und dadurch auch wichtigsten Themengebiete der AHS-Oberstufe. Durch einen genauen Blick auf den AHS-Lehrplan für Mathematik (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung[1] 2018) wird dieser Eindruck durchwegs bestätigt. Bereits in der 6. Klasse wird eine Vorarbeit für das Thema „Differentialrechnung“ geleistet, indem der wichtige Begriff des Grenzwerts von Folgen definiert wird. Weiters wird durch die Untersuchung von Folgen und Reihen der Umgang mit unendlichen Prozessen trainiert.

Im ersten Halbjahr der 7. Klasse (5. Semester/Kompetenzmodul 5) sind die Grundlagen der Differentialrechnung anhand von Polynomfunktionen zu unterrichten. Im Sommersemester (6. Semester/Kompetenzmodul 6) folgt dann noch eine Erweiterung und Exaktifizierung der Differentialrechnung. Von den fünf großen Themengebieten, die im Lehrstoff der 7. Klasse verankert sind (1. Grundlagen der Differentialrechnung, 2. Kreis, Kugeln, Kegelschnittlinien und andere Kurven, 3. Erweiterung und Exaktifizierung der Differentialrechnung, 4. Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen, 5. Komplexe Zahlen) behandeln zwei große Themen die Differentialrechnung. Die detaillierten Vorgaben des Lehrstoffs zu diesen beiden Kapiteln sind in folgender Übersicht dargestellt:

Grundlagen der Differentialrechnung anhand von Polynomfunktionen (Modul 5)

- Einfache Polynomgleichungen vom Grad ≤ 4 im Bereich der reellen Zahlen lösen können (sofern sie in der Differentialrechnung verwendet werden)
- Den Differenzenquotient (die mittlere Änderungsrate) und den Differentialquotienten (die lokale bzw. momentane Änderungsrate) definieren können
- Den Differenzen- und Differentialquotienten als Sekanten- bzw. Tangentensteigung sowie in außermathematischen Bereichen deuten können
- Den Begriff der Ableitungsfunktion kennen; höhere Ableitungen kennen
- Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktionen kennen und anwenden können

[1] Das Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung wird im Folgenden mit BMBWF abgekürzt.

- Monotonie- und Krümmungsbereiche, Extremstellen, Wendestellen und Sattelstellen (Terrassenstellen) mit Hilfe der Ableitung beschreiben können
- Untersuchungen von Polynomfunktionen in inner- und außermathematischen Bereichen durchführen können; einfache Extremwertaufgaben lösen können (Ermittlung von Extremstellen in einem Intervall)

Erweiterungen und Exaktifizierungen der Differentialrechnung (Modul 6)

- Ableitungsregeln für Exponential- und Logarithmusfunktionen, Sinus- und Cosinusfunktion kennen
- Weitere Ableitungsregeln (insbesondere die Kettenregel) kennen und für Funktionsuntersuchungen in verschiedenen Bereichen verwenden können
- Den Begriff Stetigkeit kennen und erläutern können
- Den Begriff Differenzierbarkeit sowie den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit kennen (BMBWF 2018)

Der Lehrplan (BMBWF 2018) sieht außerdem auch in der 8. Klasse (7. Semester/Kompetenzmodul 7) eine Behandlung der Differentialrechnung vor, hauptsächlich in Zusammenhang mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und einfachen Differentialgleichungen.

Ein kurzer Blick in die Geschichte zeigt, dass die Differentialrechnung – anders, als man möglicherweise vermuten würde – nicht schon seit deren Erfindung Teil des Lehrplans war. Während die Differentialrechnung im 19. Jahrhundert sowohl in der Wissenschaft als auch in Anwendungsgebieten wie Technik, Industrie und Wirtschaft hoch angesehen war, fand sie den Eintritt in den Lehrplan der österreichischen Gymnasien erst lange Zeit später (Kapper 1998: 3). Erst um 1900, als Frankreich die Infinitesimalrechnung in den Lehrplan aufnahm und auch in Deutschland der Wunsch nach Erneuerungen im mathematischen Unterricht aufkeimte, war auch Österreich bereit, dieser Linie zu folgen (Kapper 1998: 82). Inspiriert von Felix Klein und seinen Forderungen war in den neuen Lehrplänen von 1908/1909 erstmals vom Differentialquotienten zu lesen, wenngleich eine Einführung der Differentialrechnung auf breiter Basis ausblieb. Die Begriffe „Differentialrechnung“ bzw. „Infinitesimalrechnung“ wurden in diesen Lehrplänen bewusst vermieden (Kapper 1998: 103), doch ein erster Schritt in Richtung jener

Schulanalysis, wie sie gegenwärtig praktiziert wird, wurde im Zuge dieser Lehrplanerneuerungen gemacht.

Eine detailliertere historische Analyse zur Entwicklung der Schulanalysis im deutschsprachigen Raum, in der u.a. auch der Einsatz moderner Technologien erörtert wird, folgt in Kapitel 2.

Der Grundkompetenzkatalog der schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik bildet die „inhaltliche Grundlage zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen" (BMBWF 2021a: 1) und ist in vier Inhaltsbereiche (Algebra und Geometrie (AG), Funktionale Abhängigkeiten (FA), Analysis (AN), Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS)) unterteilt. Im Themenbereich Analysis (AN) ist die Differentialrechnung der 7. Klasse mit folgenden Grundkompetenzen stark vertreten:

> **AN 1.2:** Den Zusammenhang *Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differenzialquotient („momentane" bzw. lokale Änderungsrate)* auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs kennen und diese Konzepte (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können
> **AN 1.3:** Den Differenzen- und Differenzialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differenzialquotienten beschreiben können
> **AN 2.1:** Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*)
> **AN 3.1:** Die Begriffe *Ableitungsfunktion* und *Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können
> **AN 3.2:** Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können
> **AN 3.3:** Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitungsfunktion beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen (BMBWF 2021a: 9)

In Form von Anmerkungen im Grundkompetenzkatalog werden der Interpretation verschiedener Veränderungsmaße in vorgegebenen Kontexten und dem Einsatz von Technologie bei der Ermittlung von Ableitungsfunktionen nichtelementarer Funktionen besondere Bedeutung beigemessen (BMBWF 2021a: 9).

Diese Grundkompetenzen werden bei der schriftlichen Reifeprüfung in Form von Typ-1-Aufgaben abgeprüft, deren Ziel es ist, „(Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten ohne darüber hinausgehende Eigenständigkeit" (BMBWF 2021b: 4) abzufragen. Bei Typ-2-Aufgaben wird unterschieden zwischen „normalen" Typ-2-Aufgaben und Typ-2-Aufgaben mit reduziertem Kontext. Bei diesem Aufgabenformat handelt es sich um umfangreichere und komplexere Aufgaben, bei denen eine Vernetzung von Grundkompetenzen notwendig ist, wodurch ein selbstständiges Anwenden von Wissen und Fertigkeiten erforderlich ist. Außerdem kommt im Vergleich zu den Typ-1-Aufgaben den operativen Fähigkeiten der Schüler*innen eine größere Bedeutung zu (BMBWF 2021b: 4).

Neben der zuvor bereits beantworteten Frage, was zum Thema Differentialrechnung aus der 7. Klasse bei der schriftlichen Reifeprüfung abgeprüft wird (s. Grundkompetenzen), ist die Frage nach der Häufigkeit der Aufgaben aus diesem Inhaltsbereich interessant. Mit dieser Frage hat sich Patrik Kutleša (2018) genauer beschäftigt, auch wenn er die Aufgaben den vier Inhaltsbereichen und nicht explizit der Differentialrechnung zugeordnet hat. Ein Ergebnis seiner Untersuchung ist, dass der Inhaltsbereich Analysis mit 35,7% mit Abstand am häufigsten abgeprüft wird, gefolgt von Wahrscheinlichkeit und Statistik mit 25% (Kutleša 2018: 117). Auch wenn der Inhaltsbereich Analysis nicht nur aus Differentialrechnung besteht, zeigt das doch die herausragende Bedeutung des Themas bei der gegenwärtigen schriftlichen Reifeprüfung.

Im internationalen Vergleich ist der österreichische Anteil von Analysis-Aufgaben bei der schriftlichen Reifeprüfung eher hoch, wenngleich es auch Länder gibt, in denen die Analysis eine noch viel größere Rolle spielt. In Italien beträgt der Anteil an Aufgaben, die dem österreichischen Inhaltsbereich Analysis zugeordnet wurden, 48,2%, während dieser Wert in den USA sogar 72,1% beträgt (Kutleša 2018: 117).

2. Historische Entwicklungen des Analysis-Unterrichts im deutschsprachigen Raum

Während in Kapitel 1 bereits kurz skizziert wurde, wie und wann die Aufnahme der Analysis in die Lehrpläne erfolgte, widmet sich dieses Kapitel der weiteren historischen Entwicklung des Schulanalysisunterrichts. Die folgenden Darlegungen beschränken sich auf den deutschsprachigen Raum, insbesondere auf Deutschland und Österreich.

Schon kurze Zeit nach der Etablierung der Analysis in den Schullehrplänen beschäftigte sich die Fachdidaktik mit dem schmalen Grat zwischen einer fachlich korrekten Einführung komplexer Begriffe, wie beispielsweise jenem der Differenzierbarkeit, und den jeweiligen individuellen kognitiven Möglichkeiten der Schüler*innen. In einer Zeit, in der versucht wurde, auch in den Gymnasien kindgerechte Pädagogik zu installieren, hegte man Zweifel ob der großen fachlichen Ansprüche an die Lernenden (Lotz, Salle & Vom Hofe 2015: 167).

Nach einer Zeit des Aufbruchs Anfang des 20. Jahrhunderts wurde diese Phase durch das nationalsozialistische Regime in den 1930er Jahren beendet. Fortan wurde das Hauptaugenmerk auf den praktischen Nutzen sowie technische Anwendungen der Analysis gelegt (Danckwerts & Vogel 2006: 217). Bis dahin hatte Deutschland im Bereich des Analysisunterrichts eine Vorreiterrolle in Europa inne. Die damals praktizierte Schulanalysis war sehr universitätsnahe, wenngleich Elementarisierungen des Lehrinhalts natürlich vorgenommen wurden. Auch nach Ende des zweiten Weltkriegs wurde dieser Weg im Analysisunterricht fortgeführt (Lotz et al. 2015: 167). Lenné (1969) kritisierte dabei, dass im Unterricht Ideen und Strukturen nie ganzheitlich herausgearbeitet werden, sondern stets von Aufgabe zu Aufgabe gedacht wird. Dieses Prinzip der Stofforganisation nennt sie „Aufgabendidaktik“ (Lenné 1969: 35).

In der Nachkriegszeit gab es in der Mathematikdidaktik immer wieder große Veränderungen. Als Paradigmenwechsel können die Veränderungen in den 1960er Jahren bezeichnet werden: Die bisher praktizierte „Aufgabendidaktik“ wurde zugunsten der sogenannten „Neuen Mathematik“ ersetzt, in der nun die formale Theorie und die bisher oft vernachlässigten mathematischen Strukturen das Kerninteresse des Unterrichts bildeten. Auf der Strecke blieben durch diese Veränderungen vor allem die

Realitätsbezüge im Mathematikunterricht (Büchter & Henn 2015: 24–25). Offiziell wurde die „Neue Mathematik" 1968 durch die Kultusministerkonferenz (KMK) bestätigt. Speziell für die Schulanalysis war diese Hinwendung zur fachlichen Strenge eine große Veränderung, denn von da an orientierte sich der Unterricht an den topologischen Grundlagen der Analysis (Danckwerts & Vogel 2006: 218) und nicht mehr an den bis dahin üblichen „verfahrensorientierten Aufgabenserien" (Büchter & Henn 2015: 24). Spätestens durch die Neugestaltung der gymnasialen Oberstufe 1972 entwickelte sich die Analysis zur wichtigsten Disziplin der Oberstufenmathematik (Danckwerts & Vogel 2006: 218). Der Unterricht in der Schule orientierte sich von nun an verstärkt an den Einstiegsvorlesungen der Universitäten. Nicht die Anwendbarkeit oder der Nutzen der Analysis standen im Fokus, sondern die innermathematische Theorie- und Begriffsbildung, sodass beispielsweise einer streng formalen Beweisführung im Mathematikunterricht eine große Bedeutung beigemessen wurde (Daume & Dennhard 2017: 100). Auf die didaktischen Probleme dieses Ansatzes wiesen Klika, Tietze und Wolpers (1982: 91) hin. Durch die rein systematische Vorgehensweise blieben den Lernenden fundamentale Ideen und Methoden verborgen, weshalb sie auch in Hinblick auf die Motivation der Schüler*innen für mehr Anwendungsorientierung im Analysisunterricht plädierten.

Schon Ende der 1970er reagierten Blum & Kirsch (1979) auf die didaktischen Schwierigkeiten und machten einen Vorschlag zur Reduktion der Strenge im Analysisunterricht. In Zukunft sollen nicht mehr stringente Beweisführung und innermathematische Strukturen den größten Teil des Unterrichts ausmachen, sondern es soll durch ein Aufbauen von Grundvorstellungen zu den zentralen Begriffen der Analysis den Lernenden ermöglicht werden, in Anwendungssituationen fachlich korrekt argumentieren und interpretieren zu können (Blum & Kirsch 1979: 6–7). Gleichzeitig wurde jedoch betont, dass Vereinfachungen nur dann getroffen werden dürfen, wenn sie keine Verfälschung bedeuten (Blum & Kirsch 1979: 18). Laut Oldenburg (2016: 56) hat sich der Analysisunterricht bis in die Gegenwart sehr an dieser Abkehr der Strenge orientiert, sodass mittlerweile weitgehend informell gearbeitet wird. Diese Entwicklung ist laut ihm mittlerweile zu weit fortgeschritten, denn ein gewisses Maß an Formalisierung sei notwendig, um beispielsweise die mathematische Argumentationskompetenz bestmöglich auszubilden.

Schon in den 1980er Jahren wurde der Vorschlag von Blum & Kirsch (1979) umgesetzt, wodurch eine Abkehr der fachlichen und begrifflichen Strenge im Analysisunterricht stattfand. Stattdessen richtete sich der Fokus vermehrt auf die Lern- und Handlungsprozesse der Schüler*innen und es wurde versucht, neue Sozialformen in einen problemlöse- und anwendungsorientierten Unterricht zu inkludieren (Lotz et al. 2015: 167).

Blum (1985: 197) diagnostizierte, dass die Integration von anwendungsorientierten Aufgaben in den Unterricht in den 1980er Jahren vielen Lehrenden an den Gymnasien schwer fiel. Konkrete Anregungen und Vorschläge für Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht lieferte er genauso wie Verweise auf andere Publikationen der frühen 1980er Jahre, die sich mit diesem Thema auseinandergesetzt haben (Blum 1985: 198). Für den Bereich Analysis schlug er zwei Themenbereiche vor, die sich für eine analytische Auseinandersetzung eignen, nämlich die Trassenführung bei Autobahnkreuzen und die Festsetzung von Steuern auf Einkommen (Blum 1985: 199).

Zehn Jahre später beschäftigte sich Blum (1995) immer noch mit realitätsbezogenen Aufgaben im Analysisunterricht. Er stellte erfreut fest, dass in den deutschen und österreichischen Schulbüchern der frühen 1990er Jahre die Anwendungsorientierung viel stärker in den Mittelpunkt gerückt wurde. Er führte eine Reihe von Gründen an, warum diese Entwicklung gutzuheißen ist – nichtsdestotrotz wünschte er sich noch mehr außermathematische Anwendungen im Analysisunterricht. Aufgrund einiger Hindernisse, wie beispielsweise dem Zeit- und Stoffdruck, unter dem die Lehrenden standen, bezweifelte er, dass diese Entwicklung in dem von ihm erwünschten Ausmaß voranschreiten würde (Blum 1995: 8–9).

Die wohl bedeutendste und einschneidendste Veränderung im Analysisunterricht der letzten Jahrzehnte ist wohl der Einsatz von Computern und neuen Technologiesoftwares. Österreich spielte dabei eine Vorreiterrolle, denn es war das erste Land, das zu Beginn der 1990er Jahre „die Generallizenz für ein Computeralgebrasystem […] für alle Gymnasien erwarb“ (Heugl 1995: 35). Gleichzeit betont Heugl (1995: 35) jedoch, dass dies nicht ausreiche, sondern eine detaillierte Forschung und Erstellung von passenden Unterrichtsmaterialen notwendig sei, um ein derart mächtiges Instrument sinnvoll und gewinnbringend in den Unterricht eingliedern zu können.

Seit Beginn der 1990er Jahre wurden in der Fachdidaktik eifrig Vor- und Nachteile des Technologieeinsatzes abgewägt. Blum (1995) lieferte einige Vorteile, wie beispielsweise Visualisierungsmöglichkeiten, lokale Vergrößerungen von Funktionsgraphen oder das Delegieren von Rechenarbeit an die Technologie (Blum 1995: 11). Genauso betonte er allerdings auch mögliche Gefahren, wie eine unkritische Computergläubigkeit. Als Beispiel nannte er Schülerantworten, die auf die Frage bei einer am PC durchgeführten Schularbeit folgende Frage bejahten: „Gegeben sei $f(x) = \frac{1}{x^2+1000}$. Ist f eine konstante Funktion?“ (Blum 1995: 13)

Auch Henn (2004) schlägt in die gleiche Kerbe wie Blum (1995) und sieht in Cumputeralgebrasystemen[2] (CAS) große Möglichkeiten, den Schüler*innen selbstgesteuerte mathematische Aktivitäten zu bieten. Hierfür sei allerdings eine „didaktische Reduktion des Stoffes auf fundamentale Ideen“ (Henn 2004: 217) und gut ausgebildete Lehrkräfte notwendig, die solche Lernumgebungen schaffen können (Henn 2004: 217–218). Er sieht die neuen Technologien als Ergänzung für herkömmliche Medien und warnt genauso wie Blum (1995) vor den Gefahren der CAS, wie beispielsweise vor der Ansicht, es handle sich dabei um „universelle Problemlöse-Instrumente“ (Henn 2004: 217).

In den letzten Jahren wurden in der fachdidaktischen Literatur immer wieder neue Einsatzmöglichkeiten für CAS entwickelt und publiziert. Gundlach (2006) legt beispielsweise den Nutzen von Technologie anhand des Tangentenproblems dar: Durch die Möglichkeit, einen Funktionsgraphen mit dazugehöriger Tangente in einem Punkt immer weiter zu vergrößern, kann die Vorstellung der Tangente als bestmögliche lineare Approximation der Funktion in diesem Punkt besonders gut angesprochen werden (Gundlach 2006: 10–11). Weiters eignet sich der Technologieeinsatz dazu, den Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotienten zu visualisieren, also die Annäherung der Sekanten an die Tangente (Gundlach 2006: 13–16). Diese dynamische Visualisierungsmöglichkeit, die der Technologieeinsatz bietet, heben auch Danckwerts & Vogel (2006: 202–203) hervor, die darin eine Möglichkeit sehen, einen verständigeren Umgang mit Extremwertaufgaben zu erreichen.

[2] Wird zukunftig mit CAS abgekürzt

Die Möglichkeit des „Hineinzoomens“ in eine Umgebung eines Punktes auf einem Funktionsgraphen machen sich auch Eberle & Lewintan (2019: 203–204) zu Nutze, indem sie bei der Einführung der Ableitung in der Schulanalysis nicht die herkömmliche Methode über den Grenzwert des Differenzenquotienten, sondern den Zugang über die lokale lineare Approximation bevorzugen. In Kapitel 5 wird dieser Vorschlag noch einmal aufgenommen und detailliert analysiert.

Barzel (2012) sieht in CAS allgemein eine Erleichterung für Lernende und Lehrende gleichermaßen: Dadurch, dass CAS als eine Art zweiter Experte im Klassenraum genutzt werden kann, wird die Lehrperson entlastet und begleitet die Schüler*innen beim individuellen Lernen, anstatt im Frontalunterricht selbst die führende Rolle einzunehmen (Barzel 2012: 52). Weiters unterstreicht Barzel (2012: 55), dass durch CAS die Anzahl der individuellen Lösungswege steigt und durch geeignete Reflexion im Unterricht Zusammenhänge dabei hergestellt werden können.

Neumann (2018) konnte zum Thema CAS spannende Forschungsergebnisse erzielen, indem er die mathematische Leistungsfähigkeit von Studierenden der Wirtschaftswissenschaften (Neumann 2018: 43), die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) im Mathematikunterricht arbeiteten, mit jenen verglich, die ein CAS verwendeten. Die Ergebnisse zeigen, dass leistungsschwächere Schüler*innen, die den Grundkurs besucht hatten, schwächere Ergebnisse erzielten, wenn mit CAS, und nicht mit einem GTR gearbeitet wurde. Bei Lernenden aus dem Leistungskurs ist genau der gegenteilige Effekt zu beobachten (Neumann 2018: 131). Kurz zusammengefasst bedeutet das, dass leistungsstärkere Schüler*innen von CAS profitieren, während leistungsschwächere Lernende durch die Verwendung von CAS nicht ihr bestmögliches Potential abrufen können. Dieses Ergebnis legt nahe, dass CAS zur Öffnung der Schere zwischen leistungsstärkeren- und leistungsschwächeren Schüler*innen beiträgt, auch wenn Neumann (2018: 156) die Notwendigkeit weiterer Forschungen in diesem Bereich betont.

In der fachdidaktischen Literatur ist man sich jedenfalls einig, dass neue Technologien aus dem Mathematikunterricht nicht mehr wegzudenken sind, wenngleich sie als sinnvolle Ergänzung und nicht als Allheilmittel Verwendung finden sollten.

3. Zugänge zur Ableitung

3.1. Noch ein kurzer Blick in die Geschichte

Die Analysis ist eine scheinbar sehr junge Teildisziplin der Mathematik und wird als Wissenschaft „der unendlichen Prozesse und der ‚unendlichen kleinen Größen'" bezeichnet (Sonar 2016a: 4). Die Verwendung dieser Definition und das Wissen, dass bereits die Menschen in den frühen Hochkulturen in Ägypten und Mesopotamien mit wichtigen Zahlen für die Analysis, wie beispielsweise π und $\sqrt{2}$ in Berührung kamen, rechtfertigt den Gedanken, dass die Wurzeln der Analysis schon wesentlich länger zurückliegen, als man annehmen möchte (Sonar 2016a: 4).

In der Mathematik der griechischen Antike wurden erstmals Ideen und Konzepte entwickelt, wie man sie auch heute noch verwendet. Beispielsweise stellte sich Demokrit im 4. bzw. 5. Jahrhundert v. Chr. bei der Herleitung des Kegel- und Tetraedervolumens die Körper aus unendlich vielen Scheiben der Dicke Null vor, die heute als „Indivisible" bezeichnet werden (Sonar 2016a: 52). Weiters beschäftigte sich Archimedes im 3. Jahrhundert v. Chr. bereits mit der Berechnung des Flächeninhalts unter einer Parabel (Sonar 2016a: 72–74) und mit Volumina von Rotationsparaboloiden (Sonar 2016a: 74–76). Passend dazu analysiert Körle (2012: 18–19), dass sich die Beiträge Archimedes zur Infinitesimalrechnung beinahe gänzlich auf die Integration beschränkten, während beispielsweise Tangenten kaum unter analytischen Gesichtspunkten betrachtet wurden. Uneinig ist man sich in der Literatur darüber, ob Archimedes beim Umgang mit der nach ihm benannten Spirale auch schon differenziert hat (Körle 2012: 131). Während der Herrschaft des antiken römischen Reichs ging das Interesse an Mathematik zurück und es entstanden kaum nennenswerte Beiträge zur Analysis (Sonar 2016a: 86).

Wie in so vielen Bereich ist auch in der Analysis festzustellen, dass nach der Antike große Fortschritte ausbleiben (Körle 2012: 69), auch wenn während des europäischen Mittelalters die antiken Leistungen im arabisch-islamischen Raum rezipiert wurden und für die Analysis relevante Weiterentwicklungen erzielt werden konnten. Im Werk von Herrmann (2016) werden diese v.a. in Kapitel 4 umfangreich vorgestellt. In Europa nimmt das Tempo der Weiterentwicklungen ab ca. 1600 wieder rasant zu (Körle 2012: 69). Die beiden Mathematiker, die im 17. Jahrhundert die eigentliche Differential- und Integralrechnung entwickeln (Sonar 2016a: 4), sind Isaac Newton und Gottfried Wilhelm

Leibniz. Die beiden entwickelten im 17. Jahrhundert auf zwei verschiedene Arten das, was heute als Infinitesimalrechnung bezeichnet wird. Dabei war ihnen u.a. auch schon klar, dass die Probleme der Tangentenbestimmung und Flächenberechnung invers zueinander sind, sodass sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in zahlreichen Anwendungsbereichen (Berechnung von Krümmungsradien, Bogenlängen, etc.) verwenden konnten. Wichtig zu betonen ist, dass damals aber noch nicht mit Funktionen gearbeitet wurde, sondern mit Größen, die sie auf gewisse geometrische Objekte, wie beispielsweise gegebenen Kurven, bezogen (Guicciardini 1999: 89–90).

Die beiden unterschiedlichen Zugänge[3] bei der Erfindung derselben Sache sorgten dafür, dass es zwischen Newton und Leibniz zu einem der größten Prioritätsstreite in der Geschichte kam. Auf über 500 Seiten sind die Streitigkeiten zwischen den beiden bei Sonar (2016b) nachzulesen. Guicciardini (1999: 123) betont außerdem, dass bei allen Unterschieden der Arbeiten von Newton und Leibniz auch die Gemeinsamkeiten betont werden sollen, während Körle (2012: 53) sogar meint, dass sich die Differentialrechnung bei Newton und Leibniz in Ansatz und Form zwar unterscheiden, in ihrem Wesen jedoch gleich sind.

Vor allem in begrifflicher Hinsicht war auch nach den Entdeckungen der beiden noch viel Arbeit zu leisten, sodass es an den Mathematikern (Mathematikerinnen waren damals noch rar gesät[4]) des 19. Jahrhunderts lag, Begriffe wie Funktion, Stetigkeit, Konvergenz, Integral und Ableitung begrifflich sauber zu fassen (Sonar 2016a: 495), was Körle (2012: 69) sogar dazu veranlasst, das 19. Jahrhundert als „goldenes Zeitalter" der Analysis zu bezeichnen.

Im Folgenden wird nur auf den Begriff der Ableitung Bezug genommen, den Augustin-Louis Cauchy (1836: 16) in seiner Vorlesung über Differentialrechnung in der heute noch gängigen Form über den Grenzwert des Differenzenquotienten definiert. Dabei weist Cauchy, der sich u.a. auch sehr mit der Lehrbarkeit der Analysis beschäftigt hat (Danckwerts & Vogel 2006: 66), auf die Problematik im Verständnis hin, dass das

[3] Ein wesentlicher Unterschied bestand in der Symbolik: Während Newton ihre Wichtigkeit schmälerte, legte Leibniz großen Wert darauf (Sonar 2016b: 448) und erzielte mit seiner Schreibweise große Erfolge (Sonar 2016b: 246).

[4] Erwähnenswert ist beispielsweise Émilie du Châtelet, die Newtons Principia übersetzt und damit auf dem Kontinent bekannt gemacht hat.

Verhältnis von Zähler und Nenner ungleich Null sein kann, obwohl sich beide Differenzen im Zähler und Nenner unbestimmt und gleichmäßig Null annähern (Cauchy 1836: 17).

Rund ein halbes Jahrhundert später definierte der deutsche Mathematiker Karl Weierstraß die Ableitung auf völlig unterschiedliche Weise, indem er sich die Sichtweise der lokalen linearen Approximation beim lokalen Zusammenspiel von Funktion und Tangente zu Nutze machte (Danckwerts & Vogel 2006: 83).

Diese beiden unterschiedlichen Definitionsmöglichkeiten der Ableitung, die von Cauchy und Weierstraß im 19. Jahrhundert eingeführt wurden, werden im restlichen Kapitel noch ausführlicher thematisiert.

3.2. Zwei Definitionsmöglichkeiten der Ableitung

Die beiden Definitionsmöglichkeiten der Ableitung einer Funktion an einer Stelle, die von Cauchy und Weierstraß begründet wurden, bilden auch gegenwärtig noch zentrale Ideen der Analysis, insbesondere der Schulanalysis.

Zwar gibt es noch weitere Möglichkeiten, die Ableitung zu definieren, wie beispielsweise als stetige Fortsetzung des Differenzenquotienten oder mit Hilfe der ε-δ-Grenzwertdefinition (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand 2016: 143–144), doch die beiden Definitionen von Cauchy und Weierstraß bilden in Greefrath et al. (2016: 147) die beiden Aspekte der Ableitung, die im Folgenden noch eine große Rolle spielen werden. Dabei wird unterschieden zwischen Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten als ersten und Ableitung als lokale lineare Approximation als zweiten Aspekt. Diese beiden Aspekte sind deswegen von großer Bedeutung für diese Arbeit, weil sie jeweils bestimmte Grundvorstellungen der Ableitung ansprechen, die im Detail noch in Kapitel 5 vorgestellt und in weiterer Folge den Kern der Fragebogenerhebung in 7. Klassen AHS bilden.

Nun werden erstmal die beiden Definitionen, die gleichzeitig auch für die beiden Aspekte der Ableitung stehen, formuliert.

3.2.1. Grenzwert des Differenzenquotienten

Die erste Definition der Ableitung ist jene über den Grenzwert des Differenzenquotienten, die von Greefrath et al. (2016: 142) inklusive nachfolgender geometrischer Interpretation übernommen wird:

Definition 1: Es sei f eine in einer offenen Umgebung der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion. Man nennt f differenzierbar an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert $f'(x_0) \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ oder (äquivalent dazu) $f'(x_0) \coloneqq \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ Ableitung von f an der Stelle x_0.

Geometrisch betrachtet gibt der Differenzenquotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ die Steigung der Sekante durch die Punkte $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und $\big(x_0+h, f(x_0+h)\big)$ an. Durch Grenzwertbildung ($h \to 0$) erhält man die Ableitung $f'(x_0)$, die der Steigung der Tangente von f an der Stelle x_0 entspricht (vgl. Abbildung 1).

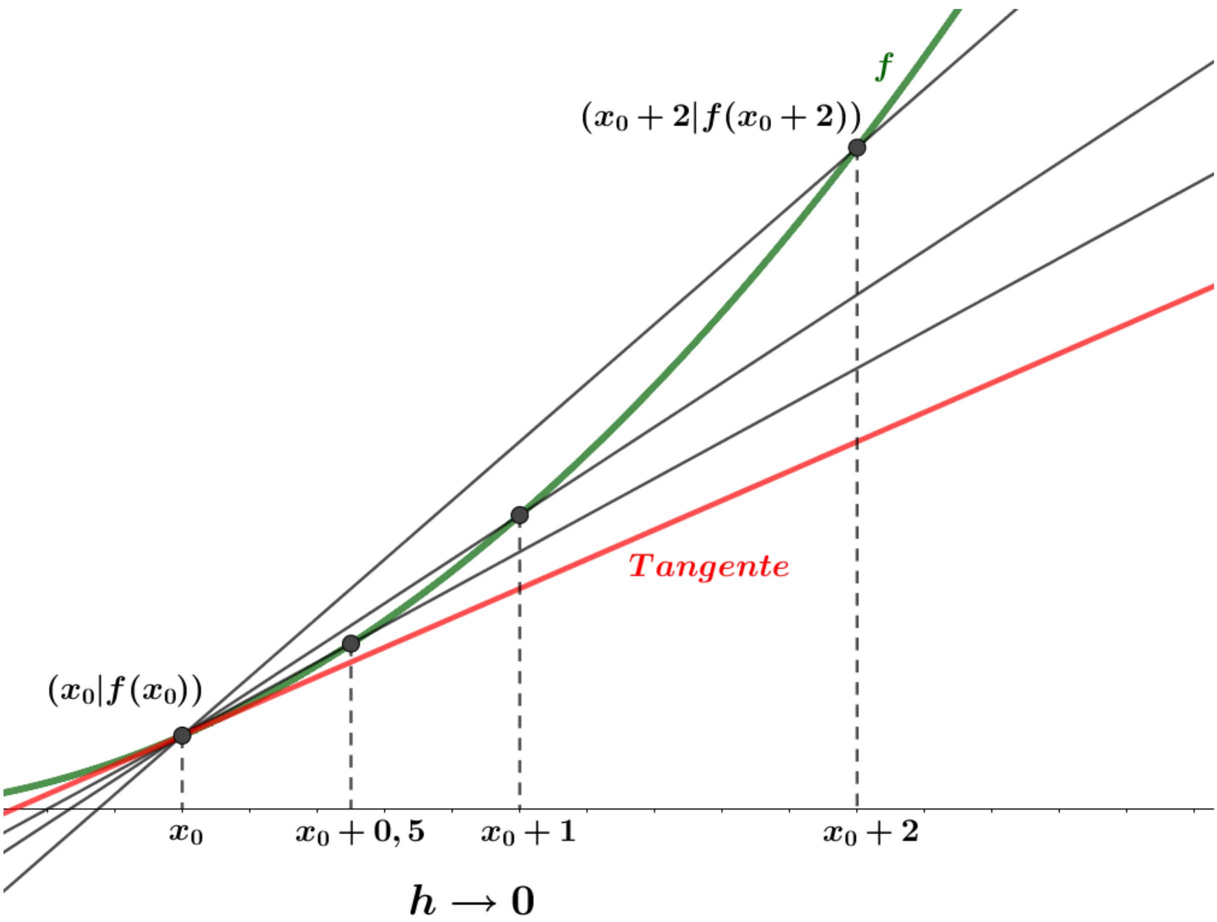


Abbildung 1: Tangente als Grenzlage von Sekanten
Quelle: Eigene Darstellung

3.2.2. Lokale lineare Approximation

Die zweite Definition der Ableitung ist jene, die Karl Weierstraß in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickelt hat und den Aspekt der Ableitung als lokale lineare Approximation als zentrale Idee aufweist. Die Definition wird von Greefrath et al. (2016: 144) übernommen, wobei wegen besserer Kompatibilität mit Abbildung 2 $x - x_0 = h$ gesetzt wird:

Definition 2: Es sei f eine in einer offenen Umgebung der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion. Man nennt f differenzierbar an der Stelle x_0, wenn es eine Zahl m gibt, sodass $f(x) = f(x_0) + m \cdot h + r(h)$, wobei für die Restfunktion r gilt: $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Die Zahl m wird dann als Ableitung von f an der Stelle x_0 bezeichnet, d.h. $f'(x_0) \coloneqq m$.

Roth (n.d.: 35) erklärt, dass die lokale lineare Approximation bedeutet, dass sich der Graph von f in der Nähe von x_0 besonders gut durch die Tangente in x_0 annähern lässt. Entscheidend dabei ist, dass die Approximation so gut ist, dass der Fehler $r(h)$ schneller gegen Null konvergiert als h. Genau das wird in der Definition durch die Bedingung $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ ausgedrückt. In Abbildung 2 wird die Definition über die lokale lineare Approximation graphisch veranschaulicht:

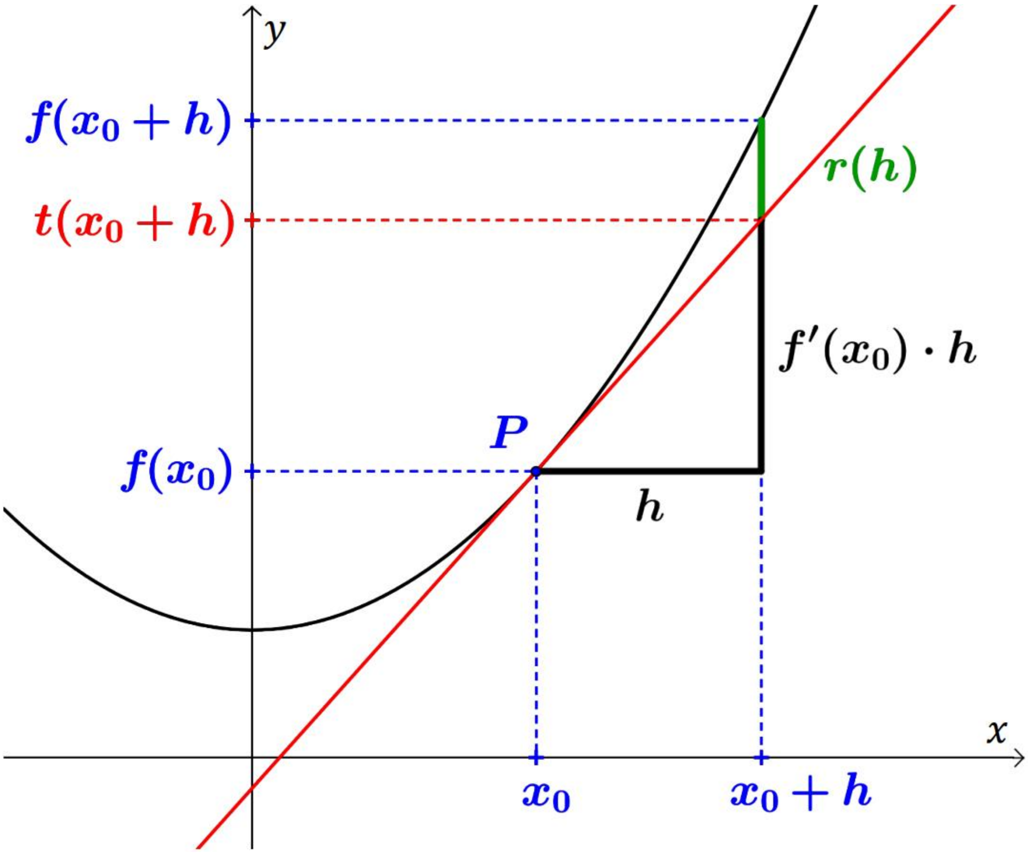


Abbildung 2: Ableitung als lokale lineare Approximation
Quelle: Roth n.d.: 35

Nach dieser fachlichen Einführung dieser Definitionsmöglichkeiten, die die beiden Aspekte der Ableitung bilden, wird in Kapitel 5 auch noch näher darauf eingegangen, welche Vor- und Nachteile die beiden Zugänge für den Analysis-Unterricht in der Schule haben. Außerdem werden mögliche Unterrichtsgänge bezüglich der beiden Aspekte kurz vorgestellt.

Davor werden jedoch in Kapitel 4 noch drei gängige Schulbücher der 7. Klassen AHS hinsichtlich Einführung der Ableitung untersucht. Dabei wird u.a. analysiert, wie sehr die beiden eben ausgeführten Aspekte bzw. Definitionen der Ableitung in der Schulbuchrealität ausgeprägt sind.

4. Einführung der Ableitung in ausgewählten Schulbüchern

In diesem Kapitel werden drei Schulbücher der 7. Klassen AHS bezüglich der Einführung und des weiteren Umgangs mit der Ableitung analysiert. Es handelt sich dabei um drei gängige Schulbücher: Das Buch „Lösungswege 7“ von Freiler, Marsik, Olf & Wittberger (2016) wird im ersten Unterkapitel 4.1 analysiert. Danach folgt „Mathematik verstehen 7“ von Malle et al. (2019) in Kapitel 4.2, bevor im dritten Unterkapitel 4.3 die Bücher

„Thema Mathematik 7. 1. Semester“ (Dorfmayr, Mistlbacher, Sator & Zillner 2019a) und „Thema Mathematik 7. 2. Semester“ (Dorfmayr, Mistlbacher, Sator & Zillner 2019b) in den Blick genommen werden.

Um eine strukturierte Behandlung und eine Vergleichbarkeit zwischen den einzelnen Schulbüchern zu ermöglichen, werden pro Schulbuch jeweils fünf Aspekte betrachtet, auf die im nächsten Absatz kurz eingegangen wird. Zu beachten ist dabei, dass bei der Analyse der jeweiligen Schulbücher (also in den Kapiteln 4.1, 4.2 & 4.3) nur Beschreibungen und keine wertenden Bemerkungen oder Beurteilungen gemacht werden. Erst in Kapitel 4.4 werden jeweils die fünf Aspekte der drei Schulbücher miteinander verglichen, wobei Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausgearbeitet und mit fachdidaktischer Literatur abgeglichen werden.

Die folgenden fünf zuvor bereits erwähnten Aspekte der Analyse werden nun aufgelistet und es wird in Kürze erläutert, worauf bei der Analyse der jeweiligen Aspekte der Schwerpunkt liegt:

Einführung der Ableitung an einer Stelle:
Im Zentrum der Betrachtung steht bei diesem Aspekt, wie die Ableitung an einer Stelle bzw. der Differentialquotient im jeweiligen Schulbuch eingeführt wird. Alternative Erklärungen, Zugänge bzw. Illustrationen im weiteren Verlauf des Kapitels werden zwar kurz erwähnt, im Fokus steht aber die Einführung des Begriffes. Außerdem werden die Bezeichnungen und Notationen bei der Definition der Ableitung an einer Stelle analysiert.

Einführung der Ableitungsfunktion:
Dieser Aspekt widmet sich der Frage, wie das jeweilige Schulbuch den Übergang von der Ableitung einer Stelle zur Ableitungsfunktion motiviert und ausführt.

Ausprägung der beiden Aspekte der Ableitung:
Bei diesem Unterpunkt erfolgt eine Analyse, in welchem Ausmaß die beiden in Kapitel 3.2 bereits thematisierten Aspekte der Ableitung (Grenzwert des Differenzenquotienten & lokale lineare Approximation) in den Kapiteln, die von Differentialrechnung handeln, in den jeweiligen Schulbüchern vorkommen.

Einführung von Ableitungsregeln:

Dieser Aspekt beschäftigt sich mit dem Umgang der Schulbücher mit den Ableitungsregeln. Dabei wird vor allem analysiert, wie mit den Beweisen der jeweiligen Ableitungsregeln verfahren wird.

Leibniz´sche Schreibweise:

Abschließend erfolgt jeweils eine kurze Analyse, ob in den die Ableitung betreffenden Kapiteln der Schulbücher die Leibniz´sche Schreibweise auftritt bzw. explizit thematisiert wird.

4.1. Buch 1: Lösungswege 7

Das Lehrbuch von Freiler et al. (2016) besteht aus elf Kapiteln, wobei vier davon die Differentialrechnung behandeln. Im ersten Semester werden auf 70 Seiten in Kapitel 2 und 3 die Differentialrechnung eingeführt und Polynomfunktionen untersucht. Im zweiten Semester erfolgt in den Kapiteln 7 und 8 auf rund 40 Seiten eine Erweiterung und Anwendungen der Differentialrechnung.

Einführung der Ableitung an einer Stelle:

Bevor der Differentialquotient eingeführt wird, thematisieren Freiler et al. (2016: 25-32) auf einigen Seiten verschiedene Aspekte des Differenzenquotienten. Die verschiedenen Zugänge sind dabei der Differenzenquotient als mittlere Änderungsrate, mittlere Geschwindigkeit und Steigung der Sekante.

Die Einführung des Differentialquotienten wird anhand eines Beispiels aus dem Kapitel über den Differenzenquotienten vorgenommen. Dabei wird die Wegfunktion in Abhängigkeit von der Zeit (in Sekunden) eines Bungee-Jumps betrachtet, wobei nun nicht die mittlere Geschwindigkeit, sondern die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t=4$ berechnet werden soll. Dafür wird eine Folge von Differenzenquotienten berechnet, wobei das Zeitintervall verkleinert wird, bis ein Ergebnis vermutet werden kann (vgl. Abbildung 3):

Bei Musteraufgabe 78 wurde die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Springers beim Bungee-Jumping berechnet. Für den zurückgelegten Weg des Springers (wenn man den Luftwiderstand nicht berücksichtigt) gilt $s(t) = 5\,t^2$ (t in Sekunden, s in Meter). Um die momentane Änderungsrate des Springers zum Zeitpunkt $t = 4\,s$ zu berechnen, kann der Differenzenquotient als Annäherung verwendet werden. Dabei kann man z. B. mit dem Intervall [4; 5] beginnen und dieses immer kleiner machen:

$$\overline{v}(4;\,5) = \frac{s(5) - s(4)}{5 - 4} = 45\,m/s, \qquad \overline{v}(4;\,4{,}1) = \frac{s(4{,}1) - s(4)}{4{,}1 - 4} = 40{,}5\,m/s$$

$$\overline{v}(4;\,4{,}5) = \frac{s(4{,}5) - s(4)}{4{,}5 - 4} = 42{,}5\,m/s \qquad \overline{v}(4;\,4{,}01) = \frac{s(4{,}01) - s(4)}{4{,}01 - 4} = 40{,}05\,m/s$$

$$\overline{v}(4;\,4{,}2) = \frac{s(4{,}2) - s(4)}{4{,}2 - 4} = 41\,m/s \qquad \overline{v}(4;\,4{,}0001) = \frac{s(4{,}0001) - s(4)}{4{,}0001 - 4} = 40{,}0005\,m/s$$

Man könnte vermuten, dass 40 m/s die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 4\,s$ ist. Je kleiner man das Intervall um 4 wählt, desto mehr nähert sich die mittlere Geschwindigkeit dem Wert 40 m/s an.

Abbildung 3: Hinführung zur Momentangeschwindigkeit in „Lösungswege 7"
Quelle: Freiler et al. 2016: 33

Nach dieser Aufgabe wird die Notwendigkeit einer Grenzwertbetrachtung diskutiert und der Differentialquotient bzw. die Ableitung an einer Stelle definiert. Interessant ist, dass x für die Stelle steht, an der die Ableitung berechnet wird, während mit z jene Intervallgrenze bezeichnet wird, die gegen die Stelle x strebt (vgl. Abbildung 4):

Der Differentialquotient

Sei f eine reelle Funktion, dann heißt

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$ **momentane (oder lokale) Änderungsrate (Differential-quotient) oder 1. Ableitung** von f an der Stelle x.

Sei s eine Zeit-Ort-Funktion, dann heißt

$$v(t) = s'(t) = \lim_{z \to t} \frac{s(z) - s(t)}{z - t}$$ **momentane Geschwindigkeit** von s zum Zeitpunkt t.

Abbildung 4: Definition des Differentialquotienten in „Lösungswege 7"
Quelle: Freiler et al. 2016: 34

Bevor durch Herausheben und Anwendung der binomischen Formeln der Nenner bei den Grenzwertbetrachtungen gekürzt werden kann, sodass die Berechnung des Grenzwerts leicht möglich wird, sind noch einige Beispiele von den Lernenden zu erledigen, bei denen Grenzwerte durch Berechnung von Differenzenquotienten vermutet werden sollen (Freiler et al. 2016 34-35).

In einem darauffolgenden Unterkapitel steht die geometrische Interpretation des Differentialquotienten als Steigung der Tangente im Fokus, wobei die Tangente mit Hilfe einiger Illustrationen als Grenzlage von Sekanten eingeführt wird (Freiler et al. 2016: 36).

Einführung der Ableitungsfunktion:

Ableitungsregeln werden motiviert, indem angeführt wird, dass im Vergleich zur aufwändigen Berechnung des Differentialquotienten die Anwendungen der in weiterer Folge formulierten Regeln wesentlich einfacher und zeitsparender ist. Bei der Definition der Ableitungsfunktion wird betont, dass die Ableitungsfunktion f' an jeder Stelle des Definitionsbereichs die Steigung der Tangente von f angibt – auf eine graphische Illustration wird verzichtet (Freiler et al. 2016: 39).

Ausprägung der beiden Aspekte der Ableitung:

In „Lösungswege 7“ findet der Aspekt der Ableitung als lokale lineare Approximation gar keine Erwähnung, stattdessen wird der Fokus sehr auf den Aspekt der Ableitung als Grenzfall des Differenzenquotienten gelegt.

Auf zwei verschiedene Weisen wird dieser Aspekt detailliert behandelt: Einerseits bei der Einführung der Ableitung an einer Stelle, bei der Differenzenquotienten von immer kleiner werdenden Intervallen berechnet werden, bis die Ableitung als Grenzfall des Differenzenquotienten definiert wird (Freiler et al. 2016: 33-34). Andererseits erfolgt auch eine detaillierte geometrische Betrachtung dieses Aspekts der Ableitung, indem der Differenzenquotient als Steigung der Sekante betrachtet wird, die im Grenzfall in die Steigung der Tangente übergeht.

Einführung von Ableitungsregeln:

Freiler et al. (2016: 39) führen in Kapitel 2 die ersten Ableitungsregeln ein, wobei die Potenzregel und die Regel von der Ableitung eines konstanten Faktors auch bewiesen werden. Für die Beweise der Summen- bzw. Differenzenregel und die Regel der multiplikativen Konstante werden die Lernenden auf den Anhang verwiesen. Mit Hilfe dieser Regel können nun Polynomfunktionen untersucht werden, weshalb die weiteren Ableitungsregeln in den Kapiteln des zweiten Semesters folgen.

Bei den schwierigeren Ableitungsregeln gehen Freiler et al. (2016: 157-165) unterschiedlich vor: Manche Regeln (Produktregel, Potenzfunktionen mit reellen Exponenten) werden formal inklusive zusätzlichen Erklärungen bewiesen, bei anderen (Konstantenregel, Sinus- und Cosinusfunktion, Exponential- und Logarithmusfunktion) sind die Beweise im Anhang zu finden. Bei der Quotientenregel werden die Lernenden bei vorgegebener Beweisstruktur dazu angeregt, den Beweis selbst durchzuführen, während bei Sinus- und Cosinusfunktion die Schüler*innen die Ableitungsregeln durch graphisches Differenzieren vermuten sollen. Die Kettenregel ist die einzige Regel, deren Beweis komplett ausgespart wird, also auch nicht im Anhang zu finden ist.

Insgesamt wird in „Lösungswege 7“ den Beweisen der Ableitungsregeln keine überdurchschnittlich große Bedeutung beigemessen, auch wenn interessierte Schüler*innen bei fast allen Regeln die Möglichkeit haben, sich mit den Beweisen im Anhang auseinanderzusetzen.

Leibniz´sche Schreibweise:

„Lösungswege 7“ widmet sich auf einer ganzen Seite explizit der Leibniz´schen Schreibweise für den Differentialquotienten (Freiler et al. 2016: 45). Dabei wird erklärt, wie man die bis dato eingeführte Schreibweise auf die Leibniz´sche Schreibweise umformen kann. Außerdem wird (oberflächlich) die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{dy}{dx}$ erläutert und betont, dass dieser Ausdruck als Bruch keinen Sinn macht, auch wenn nicht näher darauf eingegangen wird (vgl. Abbildung 5):

Leibniz'sche Schreibweise

Sehr oft wird der Differenzen- und Differentialquotient auch anders angeschrieben. Diese Schreibweise geht auf Gottfried Wilhelm Leibniz zurück und wird in den Naturwissenschaften oft verwendet. Dabei hat er folgende Schreibweise verwendet:

$z - x = \Delta x$ (Delta x) $\quad f(z) - f(x) = \Delta y$ oder
$f(z) - f(x) = \Delta f$

Mit Hilfe dieser Abkürzungen kann der Differenzen- und Differentialquotient umgeschrieben werden.

Differenzenquotient $\quad$ Differentialquotient

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Nähert sich beim Differentialquotient z unbegrenzt der Zahl x, so werden Δy und Δx immer kleiner. Den Grenzwert, der bis jetzt mit f'(x) bezeichnet wurde, nannte Leibniz $\frac{dy}{dx}$. Die Teile dy und dx nannte er Differentiale und den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ Differentialquotient. Da die beiden Differentiale in diesem Zusammenhang als Bruch keinen Sinn machen, wird der Ausdruck als „dy nach dx" gelesen.

Abbildung 5: Leibniz´sche Schreibweise in „Lösungswege 7"
Quelle: Freiler et al. 2016: 45

Nach diesem theoretischen Input folgen einige Aufgaben für die Lernenden, wobei Aussagen in die Leibniz´sche Schreibweise zu überführen sind bzw. Funktionen in mehreren Variablen anhand gegebener Differentiale nach der richtigen Variable abzuleiten sind.

4.2. Buch 2: Mathematik verstehen 7

Das Buch von Malle et al. (2019) ist in zwölf Kapitel gegliedert, von denen fünf (Kapitel 2, 3, 7, 8, 9) die Differentialrechnung auf ca. 120 Seiten behandeln. In einem kurzen ersten Kapitel „Gleichungen und Polynomfunktionen" stehen Gleichungen höheren Grades und Nullstellen von Polynomfunktionen im Vordergrund (Malle 2019: 6-15), bevor mit Kapitel 2 „Grundbegriffe der Differentialrechnung" die Analyse beginnen kann.

Einführung der Ableitung an einer Stelle:

Gleich zu Beginn von Kapitel 2 wird eine Wegfunktion in Abhängigkeit von der Zeit (in Sekunden) bei einem Bungee-Jump vorgegeben. Dabei ist die mittlere Geschwindigkeit in zwei vorgegebenen Intervallen zu berechnen, während die letzte Aufgabe ist, die Geschwindigkeit zu einem vorgegebenen Zeitpunkt (t=3) zu berechnen. Direkt auf die Aufgabenstellungen folgend sind vorgerechnete Musterlösungen im Buch zu finden

(Malle et al. 2019: 16-17), wobei die Lösung zur Frage nach der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t=3 in Abbildung 6 zu sehen ist:

3) Wir bezeichnen die Geschwindigkeit des Springers zum Zeitpunkt 3 mit v(3).
Was soll man darunter überhaupt verstehen? Es liegt nahe, die mittleren Geschwindigkeiten in immer kleiner werdenden Zeitintervallen [3; z] zu ermitteln, dh. z immer näher bei 3 zu wählen, wodurch man eine immer bessere Näherung für die gesuchte Geschwindigkeit v(3) erhält.

Nach **2)** gilt für $t = 3$:

$$\bar{v}(3; z) = 5 \cdot (z + 3) \text{ für } z \neq 3$$

In der nebenstehenden Tabelle wurde $\bar{v}(3; z)$ für verschiedene, immer näher bei 3 liegende Werte von z berechnet. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 3 kann man als „**Grenzwert**" [lat.: Limes] dieser mittleren Geschwindigkeiten auffassen, wenn sich z **unbegrenzt** der Zahl 3 nähert (dh. in beliebige Nähe von 3 kommt).

Zeitintervall [3; z]	mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}(3; z)$
[3; 4]	35
[3; 3,5]	32,5
[3; 3,1]	30,5
[3; 3,01]	30,05
[3; 3,001]	30,005

Dies schreibt man kurz so an:

$$v(3) = \lim_{z \to 3} \bar{v}(3; z)$$

[Lies: v(3) ist der Limes von $\bar{v}(3; z)$ für z gegen 3.]

Aufgrund der Tabelle vermuten wir: Nähert sich z unbegrenzt der Zahl 3, dann nähert sich $\bar{v}(3; z)$ unbegrenzt der Zahl 30. Also:

$$v(3) = \lim_{z \to 3} \bar{v}(3; z) = 30\,\text{m/s}$$

Abbildung 6: Hinführung zur Momentangeschwindigkeit in „Mathematik verstehen 7"
Quelle: Malle et al. 2019: 17

Durch eine Verkleinerung der Zeitintervalle nähern sich die mittleren Geschwindigkeiten dieser Intervalle einem Wert, der intuitiv als Grenzwert bzw. Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t=3 aufgefasst wird. Abschließend zu diesem Beispiel wird noch die Notwendigkeit dieses Grenzwertprozesses (informell) argumentiert.

Danach werden die Formeln der mittleren und momentanen Geschwindigkeit definiert, wobei noch keine Rede von Differentialquotienten oder Ableitung ist (Malle et al. 2019: 17).

Nach zwei durchgerechneten Beispielen zur Änderungsgeschwindigkeit und Änderungsrate (Malle et al. 2019: 18-20) wird der Begriff des Differentialquotienten erstmals formal definiert (vgl. Abbildung 7):

Definition
Es sei f: A → ℝ eine reelle Funktion und [a; b] ⊆ A.

- Die Zahl $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ heißt **Differenzenquotient** oder **mittlere Änderungsrate von f in [a; b]**.
- Der Grenzwert $\mathbf{f'(x) = \lim\limits_{z \to x}}$ $\frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ heißt **Differentialquotient von f an der Stelle x** oder **Änderungsrate von f an der Stelle x**.

Abbildung 7: Definition des Differentialquotienten in „Mathematik verstehen 7"
Quelle: Malle et al. 2019: 20

Bemerkenswert ist, dass die Stelle des Definitionsbereichs, an der der Differentialquotient berechnet wird, mit x und die rechte Intervallgrenze, die gegen besagte Stelle strebt, mit z bezeichnet wird.

Nach zahlreichen Aufgaben wird im weiteren Verlauf von Kapitel 2 der Differentialquotient auf eine weitere Art erklärt, nämlich als Steigung der Tangente, die als Grenzlage von Sekanten definiert und illustriert wird (Malle et al. 2019: 24).

Bei der Einführung des Differentialquotienten bzw. der Ableitung an einer Stelle liegt der Fokus bei diesem Buch klar auf dem Übergang von der mittleren Geschwindigkeit in einem Intervall zur Momentangeschwindigkeit.

Einführung der Ableitungsfunktion:

Malle et al. (2019: 32) führen die Ableitungsfunktion ein, indem sie die Möglichkeit darlegen, den Differentialquotienten nicht nur an einzelnen Stellen, sondern – falls möglich – an jeder Stelle des Definitionsbereichs zu berechnen. Dadurch ergibt sich eine neue Funktion f', die an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs den Differentialquotienten von f angibt. An dieser Stelle wird im Buch auch erstmals der Ableitungsbegriff verwendet (vgl. Abbildung 8):

Definition
Die Funktion f′: x ↦ f′(x) nennt man **Ableitungsfunktion von f** oder kurz **Ableitung von f**.
Das Berechnen der Ableitungsfunktion nennt man **Ableiten** oder **Differenzieren**.

Abbildung 8: Definition der Ableitungsfunktion in „Mathematik verstehen 7"
Quelle: Malle et al. 2019: 30

Ausprägung der beiden Aspekte der Ableitung:

In „Mathematik verstehen 7“ wird an keiner Stelle die Ableitung über den Aspekt der lokalen linearen Approximation betrachtet – die Worte „Approximation“ bzw. „Linearität“ kommen beispielsweise gar nicht im Buch vor. Auch im Kapitel Exaktifizierung der Differentialrechnung bleibt dieser Aspekt außen vor, stattdessen wird auf formal exakte und detaillierte Grenzwertbetrachtungen fokussiert.

Umso umfangreicher wird der Aspekt des Grenzwerts des Differenzenquotienten behandelt. Wie schon bei der Analyse der Einführung der Ableitung an einer Stelle deutlich wurde, wird die Ableitung durch den Grenzwert des Differenzenquotienten eingeführt, indem die Zeitintervalle schrittweise verkleinert werden und so von der mittleren auf die momentane Geschwindigkeit geschlossen werden kann. Auch geometrisch wird der Aspekt des Grenzwerts des Differenzenquotienten ausführlich behandelt, indem der Übergang von der Steigung der Sekante zur Steigung der Tangente (vgl. Abbildung 1) erklärt und illustriert wird (Malle et al. 2019: 24).

Insgesamt kann festgehalten werden, dass der Aspekt der Ableitung als lokale lineare Approximation völlig unerwähnt bleibt, dafür der Aspekt der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten ausführlich und übersichtlich abgehandelt wird.

Einführung von Ableitungsregeln:

Malle et al. (2019: 32-33) führen jene Ableitungsregeln in Kapitel 2 ein, die zur Ableitung von Polynomfunktionen benötigt werden. Das betrifft die Ableitung einer konstanten Funktion, der identischen Funktion, die Potenzregel, die Regel vom konstanten Faktor und die (allgemeine) Summenregel. Alle diese Regel werden auch bewiesen.

In Malle et al. (2019: 140-152) werden in Kapitel 6 (Erweiterung der Differentialrechnung) die weiteren Ableitungsregeln formuliert. Bei vielen davon (Quadratwurzelfunktion, Produktregel, Quotientenregel und Logarithmusfunktion) wird ein formal exakter Beweis vorgeführt, manche Regeln (trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktion) werden durch eine Beweisskizze plausibel gemacht, indem Grenzwerte mittels Tabellen numerisch angenähert werden (vgl. Abbildung 9):

Satz (Ableitungsregeln für Exponentialfunktionen)

(1) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ **(2)** $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$ (wobei $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$)

BEWEISSKIZZE:

(1) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$

Man kann zeigen (vgl. die nebenstehende Tabelle):

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

Damit erhalten wir: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$

(2) $f(x) = a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{\ln(a) \cdot x}$

Nach der Ableitungsregel für $f(k \cdot x)$ ergibt sich:

$f'(x) = e^{\ln(a) \cdot x} \cdot \ln(a) = \left(e^{\ln(a)}\right)^x \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$

h	$\frac{e^h - 1}{h}$
0,1	1,051709181…
0,01	1,005016708…
0,001	1,000500167…
0,0001	1,000050000…

Abbildung 9: Beweisskizze für Ableitungsregeln für Exponentialfunktionen in „Mathematik verstehen 7"
Quelle: Malle et al. 2019: 141

Die Kettenregel bildet in „Mathematik verstehen 7“ eine Ausnahme, weil sie die einzige Ableitungsregel ist, die nicht bewiesen bzw. mit einer Beweisskizze plausibel gemacht wird. Zwar wird die Regel durch einige Überlegungen motiviert und fällt nicht einfach vom Himmel (Malle et al. 2019: 149), auf formale Begründungen und Argumentationen wird aber weitgehend verzichtet.

Trotzdem kann festgehalten werden, dass in „Mathematik verstehen 7“ großer Wert auf die Begründung und Beweise der Ableitungsregeln gelegt wird.

Leibniz´sche Schreibweise:

In einem eigenen Unterkapitel (2.3) wird die Leibniz´sche Schreibweise eingeführt und der bisher üblichen gegenübergestellt. Es wird auf einige historische Entwicklungen und mögliche Fehlvorstellungen in Bezug auf den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ eingegangen. Die Aufgaben für die Lernenden in diesem Kapitel beziehen sich hauptsächlich auf die Gewöhnung an die Leibniz´sche Schreibweise, indem sie Sachverhalte auf zwei Arten darstellen bzw. von der gebräuchlicheren Schreibweise auf die Leibniz´sche Schreibweise wechseln müssen (Malle et al. 2019: 30).

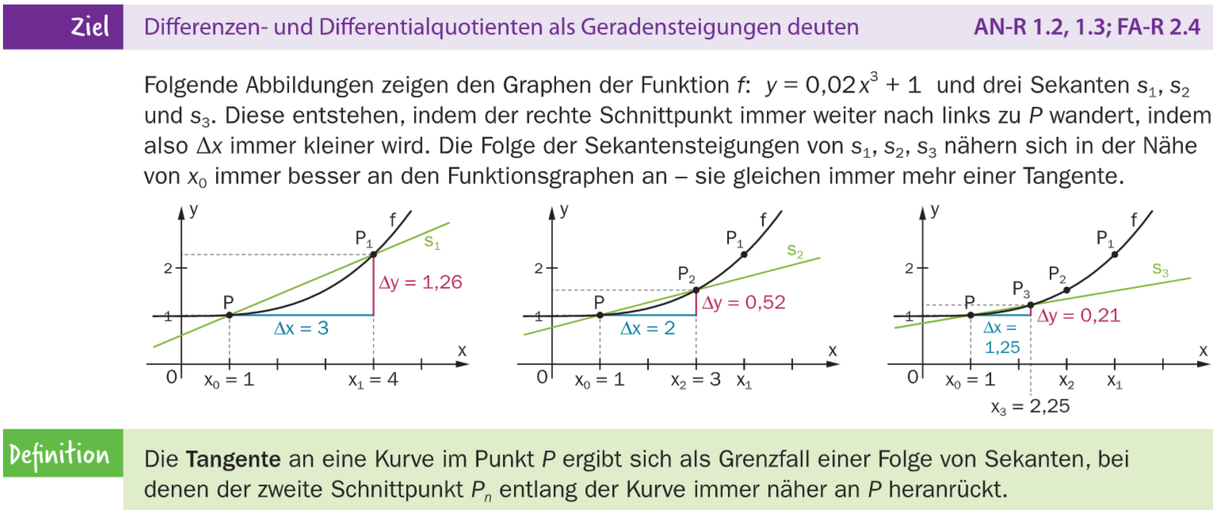
4.3. Buch 3: Thema Mathematik 7

Eine Besonderheit bei „Thema Mathematik 7“ ist, dass es nicht ein Buch für die gesamte Schulstufe, sondern für jedes Semester ein eigenes Buch gibt. Auf jeweils etwas über 100 Seiten werden in jeweils vier Kapitel die Inhalte der 7. Klasse abgehandelt. In beiden

Büchern sind jeweils zwei Kapitel zur Differentialrechnung enthalten, nämlich Kapitel 1, 3, 5 und 7.

Einführung der Ableitung an einer Stelle:

Nachdem im Einstiegskapitel des Buches für das erste Semester der 7. Klasse anfangs der Differenzenquotient behandelt wird, wird sofort danach der Differentialquotient eingeführt. Dorfmayr et al. (2019a: 14) entscheiden sich dabei für den Zugang über das Tangentenproblem, indem die Steigung der Sekante schrittweise in die Steigung der Tangente übergeht (vgl. Abbildung 10).



Ziel Differenzen- und Differentialquotienten als Geradensteigungen deuten **AN-R 1.2, 1.3; FA-R 2.4**

Folgende Abbildungen zeigen den Graphen der Funktion f: $y = 0{,}02x^3 + 1$ und drei Sekanten s_1, s_2 und s_3. Diese entstehen, indem der rechte Schnittpunkt immer weiter nach links zu P wandert, indem also Δx immer kleiner wird. Die Folge der Sekantensteigungen von s_1, s_2, s_3 nähern sich in der Nähe von x_0 immer besser an den Funktionsgraphen an – sie gleichen immer mehr einer Tangente.

Definition Die **Tangente** an eine Kurve im Punkt P ergibt sich als Grenzfall einer Folge von Sekanten, bei denen der zweite Schnittpunkt P_n entlang der Kurve immer näher an P heranrückt.

Abbildung 10: Definition des Differentialquotienten über das Tangentenproblem in „Thema Mathematik 7"
Quelle: Dorfmayr et al. 2019a: 14

Dieser Zugang wird noch auf derselben Seite genutzt, um die Begriffe „differenzierbar", „Differentialquotient" und „Ableitung an einer Stelle" zu definieren. Dabei ist zu beachten, dass Dorfmayr et al. (2019a: 14) schon bei der Einführung des Differentialquotienten die Möglichkeit einer Inexistenz des Grenzwerts des Differenzenquotienten an einer Stelle beiläufig erwähnen. Außerdem wird bereits an dieser Stelle nicht nur vom Differentialquotienten, sondern auch von der Ableitung an einer Stelle geschrieben. Auch die Schreibweise bei folgender Definition (vgl. Abbildung 11) ist bemerkenswert, wird jedoch gesondert beim Aspekt der Leibniz´schen Schreibweise noch einmal aufgegriffen:

Definition Eine Funktion f: $y = f(x)$ heißt **differenzierbar** an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert. Dieser Grenzwert von Differenzenquotienten heißt dann der **Differentialquotient** oder die **Ableitung** von f an der Stelle x_0. Wir schreiben dafür kurz $\frac{dy}{dx}$ oder $f'(x_0)$, daher

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Abbildung 11: Definition des Differentialquotienten in „Thema Mathematik 7"
Quelle: Dorfmayr et al. 2019a: 14

Nach einer Seite mit Aufgaben werden auch noch andere Zugänge zum Differentialquotienten vorgestellt, beispielsweise durch eine Funktion, die den Bremsweg eines Fahrzeugs in Abhängigkeit seiner Geschwindigkeit angibt (Dorfmayr et al. 2019a: 16). Um die momentane Änderungsrate des Bremsweges für v=100km/h zu erhalten, werden einige Differenzenquotienten berechnet, wobei sich die rechte Intervallgrenze kontinuierlich dem Wert 100km/h annähert, bis ein Grenzwert vermutet werden kann. Dieser wird dann auch noch exakt berechnet, wobei die Zahlenwerte so gewählt sind, dass der Nenner vollständig wegfällt, sodass die Problematik der Division durch Null an dieser Stelle noch nicht ersichtlich wird.

Als letzter Zugang wird noch der Übergang von der mittleren zur momentanen Geschwindigkeit in klassischer Form dargeboten, wobei erwähnenswert ist, dass sich in diesem Fall die linke Intervallgrenze der rechten annähert (Dorfmayr 2019a: 18).

Einführung der Ableitungsfunktion:

Zuerst wird die Ableitungsfunktion als jene Funktion definiert, die jedem Argument den entsprechenden Differentialquotienten zuordnet, wobei noch einmal extra erwähnt wird, dass die Differentialquotienten den Steigungen der jeweiligen Argumente in Bezug auf die Ausgangsfunktion entsprechen (Dorfmayr 2019a: 20). Genau dieser Aspekt wird in weiterer Folge genutzt, um das Zustandekommen der Ableitungsfunktion durch graphisches Differenzieren zu erklären. Danach sollen die Lernenden selbst bei vorgegebenen Graphen durch graphisches Differenzieren die Ableitungsfunktion möglichst exakt skizzieren, ohne bisher etwas über Ableitungsregeln gehört zu haben.

Ausprägung der beiden Aspekte der Ableitung:

In „Thema Mathematik 7“ wird der Aspekt der lokalen linearen Approximation auf einer Doppelseite aufgegriffen (Dorfmayr 2019b: 200-201). Zwar werden die Differenzierbarkeit bzw. Ableitung an einer Stelle nicht alternativ über diesen Zugang definiert (wie in dieser Arbeit in Kapitel 3.2.2), doch werden Differentiale als bestmögliche lineare Näherungen in einem Punkt eingeführt und anhand zahlreicher Beispiele erprobt (vgl. Abbildung 12):

Beispiel 952 Bestimme mithilfe eines Differentials die bestmögliche lineare Näherung für $\sqrt{36 + h}$ im Punkt (0|6) und veranschauliche das Ergebnis!

Ausführung:

Wir definieren

$f(x) = \sqrt{x}$ mit $x_0 = 36$ und $dx = h$.

Daher $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(36) = \frac{1}{12}$

Nun gilt: $f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$

$f(36 + h) \approx f(36) + f'(36)h$

$\sqrt{36 + h} \approx 6 + \frac{1}{12}h$

veranschaulicht:

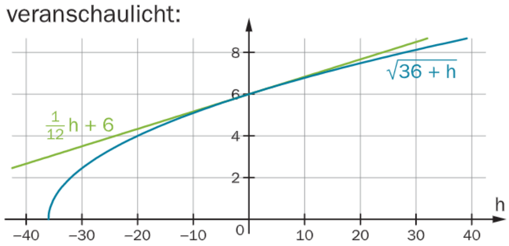


Abbildung 12: Lokale lineare Approximation in „Thema Mathematik 7"
Quelle: Dorfmayr et al. 2019b: 200

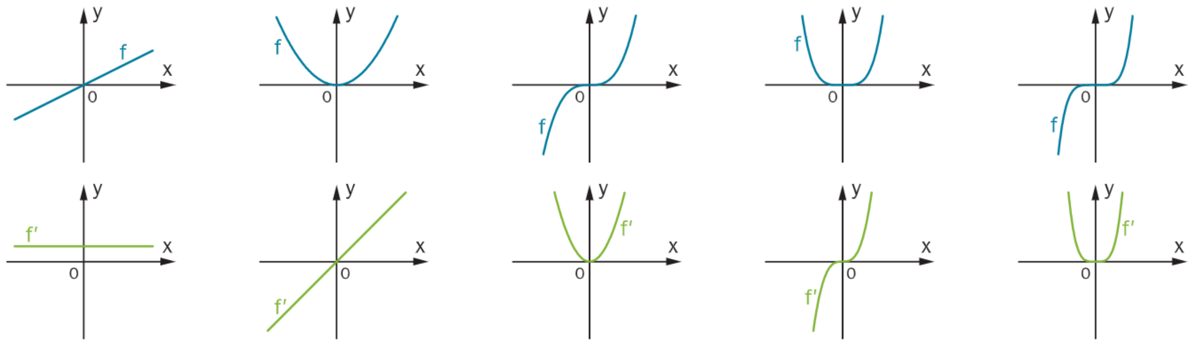
Nichtsdestotrotz ist auch in „Thema Mathematik 7“ der Aspekt des Grenzwerts des Differenzenquotienten der dominierende Aspekt in Bezug auf den Umgang mit der Ableitung. Neben der geometrischen Einführung der Ableitung über das Tangentenproblem kommt der Aspekt des Grenzwerts des Differenzenquotienten auch in weiterer Folge immer wieder zum Tragen, beispielsweise beim bereits zuvor erwähnten Beispiel mit dem Bremsweg eines Fahrzeugs (Dorfmayr et al. 2019a: 16) oder beim Übergang von der mittleren zur momentanen Geschwindigkeit (Dorfmayr et al. 2019a: 18).

Einführung von Ableitungsregeln:

Die erste Ableitungsregel (Potenzregel mit natürlichem Exponenten) wird durch graphisches Differenzieren vorbereitet, sodass die Lernenden schon intuitiv die Vermutung anstellen können, dass sich durch Ableiten der Exponent bei Potenzfunktionen um eins reduziert (vgl. Abbildung 13):

Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten differenzieren **AN-R 2.1**

In den folgenden Abbildungen wird veranschaulicht, welche Ableitungsfunktion wir durch grafisches Differenzieren einer Potenzfunktion f: $f(x) = a \cdot x^n$ vom Grad $n \leq 5$ (mit $a \in \mathbb{R}$) erhalten.



Hier erkennst du: Aus Grad 5 wird Grad 4, aus Grad 4 wird Grad 3, usw. Der Grad der Ableitungsfunktion f' ist offenbar jeweils um 1 kleiner als der Grad der Funktion f.

Unser Ziel ist es nun, den Term der Ableitungsfunktion einer Potenzfunktion durch eine Rechenregel einfach zu bestimmen.

Abbildung 13: Hinführung zur Potenzregel durch graphisches Differenzieren in „Thema Mathematik 7"
Quelle: Dorfmayr et al. 2019a: 22

Danach wird die Potenzregel formuliert und bewiesen. Die beiden einzigen anderen in Kapitel 1 formulierten Ableitungsregeln sind die Faktorregel und die Regel von der Ableitung einer additiven Konstanten, die beide jedoch erst in Kapitel 5 bewiesen werden. Erst in Kapitel 3 werden alle Ableitungsregeln formuliert, die für das Differenzieren von Polynomfunktionen benötigt werden. Auch bei diesen Regeln werden die Beweise nicht sofort, sondern erst in Kapitel 5 durchgeführt.

In Kapitel 5 werden in zwei umfangreichen Unterkapiteln alle Ableitungsregeln formuliert und jede einzelne Regel wird auch bewiesen. Dabei ist jedoch zu beachten, dass nicht überall auf strikte Beweisführung, sondern eher auf heuristische Argumentationen Wert gelegt wird, wie beispielsweise beim Beweis der Kettenregel (Dorfmayr et al. 2019b: 138). Auch bei der Herleitung der Ableitungsregeln für die Sinus- und Cosinusfunktion wird strengem Formalismus keine große Bedeutung beigemessen, stattdessen werden die Regeln durch graphisches Differenzieren plausibel gemacht (Dorfmayr et al. 2019b: 144-145).

Leibniz´sche Schreibweise:

Spannend ist in „Thema Mathematik 7“ auch der Umgang mit der Leibniz´schen Schreibweise für den Differentialquotienten. Wie in Abbildung 11 zu sehen ist, wird diese Schreibweise schon bei der erstmaligen Definition des Differentialquotienten bzw. der

Ableitung an einer Stelle verwendet. Dabei wird der Quotient $\frac{dy}{dx}$ nicht näher erklärt und problematisiert, sondern unkommentiert in der Definition eingeführt. Die Schreibweise wird ab der Einführung auch konsequent für die erste Ableitung verwendet, beispielsweise bei der Definition der Ableitungsfunktion (Dorfmayr et al. 2019a: 20). Bei höheren Ableitungen wird die Leibniz´sche Schreibweise hingegen weggelassen (Dorfmayr et al. 2019a: 24, 74).

4.4. Vergleich der Schulbücher inklusive fachdidaktische Einschätzungen

Zum Abschluss des Kapitels werden die Zugänge der drei Schulbücher anhand der fünf jeweils analysierten Aspekte verglichen. Außerdem werden die Aufbereitungen der Schulbücher dabei einer Auswahl an fachdidaktischer Literatur gegenübergestellt. Das soll ermöglichen, dass Lehrpersonen mögliche Stärken und Gefahren der betreffenden Bücher zum Thema Differentialrechnung kennenlernen können, sodass besser abgewogen werden kann, ob sich der eigene Unterricht bei gewissen Themen am Schulbuch orientieren oder bevorzugt ein alternativer Zugang gewählt werden soll.

Einführung der Ableitung an einer Stelle

In „Lösungswege 7" und „Mathematik verstehen 7" wird der Differentialquotient bzw. die Ableitung an einer Stelle in analoger Weise durch den Übergang von der mittleren zur momentanen Geschwindigkeit eingeführt, während „Thema Mathematik 7" den Zugang über das Tangentenproblem wählt.

Der Ansatz über die Tangente war lange Zeit der übliche Einstieg in das Kapitel Differentialrechnung in der Schulbuchliteratur bis zum Ende der 1990er Jahre (Klika, Tietze & Wolpers 1997: 259). Danckwarts & Vogel (2006: 45) bezeichnen sogar im Jahr 2006 die Einführung über das Tangentenproblem noch als den „schulklassischen Zugang", kritisieren diesen aber gleichzeitig vehement. Einige Argumente werden genannt, die den Zugang über das Tangentenproblem in Frage stellen, wie beispielsweise der benötigte Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff (Danckwerts & Vogel 2006: 49). Weiters wird die Annäherung der Tangente durch Sekanten als „vom Himmel fallende Idee" (Danckwerts & Vogel 2006: 47) bezeichnet, die anschaulich wenig anschlussfähig ist. Als letzten Kritikpunkt nennen Danckwerts & Vogel (2006: 49-50) die „erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten", die bei der Bildung des Grenzwerts von Sekantensteigungen passieren. Ähnliche Kritikpunkte am Zugang über das Tangentenproblem äußern auch Greefrath et al. (2016: 163), auch wenn gleichzeitig die Wichtigkeit einer großen Bandbreite an Vorstellungen zum Ableitungsbegriff betont wird (Greefrath et al. 2016: 154).

Durch Kritik dieser Art aus der fachdidaktischen Community wird mittlerweile der Zugang über die lokale Änderungsrate, die in der Regel über die Momentangeschwindigkeit eingeführt wird, bevorzugt unterrichtet (Greefrath et al. 2016: 163). Diesem Zugang können auch Danckwerts & Vogel (2006: 50-55) viel abgewinnen und betonen die Überlegenheit dieses Zugangs im Vergleich zum Einstieg über das Tangentenproblem, indem sie u.a. auf den verstärkten Realitätsbezug verweisen. Nichtsdestotrotz ist zu beachten, dass der Begriff der Ableitung unter Studienanfängern in sehr geringem Ausmaß mit Änderungsraten assoziiert wird (Feudel 2015: 1051-1052). In Bezug auf die drei in diesem Kapitel analysierten Schulbücher kann also festgehalten werden, dass „Lösungswege 7“ und „Mathematik verstehen 7“ die Ableitung an einer Stelle auf die mittlerweile in der Fachdidaktik sinnvoller eingestufte Art des Zugangs über die Momentangeschwindigkeit einführen, während „Thema Mathematik 7“ den Begriff über das Tangentenproblem einführt und erst im weiteren Verlauf die Momentangeschwindigkeit thematisiert.

Auch die Notation bei der Definition der Ableitung an einer Stelle bzw. des Differentialquotienten ist in „Lösungswege 7“ und „Mathematik verstehen 7“ sehr ähnlich (vgl. Abbildung 4 & 7). Dabei ist zu beachten, dass für Lernende problematisch sein könnte, dass bei der Definition der Ableitung an einer Stelle x für die Stelle steht, während bei der Definition der Ableitungsfunktion im weiteren Verlauf des Kapitels x als Bezeichnung für eine veränderliche Größe verwendet wird. Greefrath et al. (2016: 166-167) betonen die Schwierigkeit, dass Lernende dabei den gedanklichen Sprung vom Einzelzahlaspekt zum Veränderlichenaspekt vollziehen müssen. Abhilfe kann geschaffen werden, indem die fixe Stelle als x_0 bezeichnet wird (Greefrath et al. 2016: 166).

Obwohl sich die fachliche Genauigkeit der drei Schulbücher an manchen Stellen leicht unterscheidet (z.B. wird in „Thema Mathematik 7“ schon bei der Definition der Ableitung an einer Stelle zwischen „differenzierbaren“ und „nicht differenzierbaren“ Funktionen unterschieden), liegt den Ausführungen stets der propädeutische Grenzwertbegriff zugrunde, der im gegenwärtigen Analysis-Unterricht vorherrschend ist (Weigand 2016:

135). Dabei wird auf eine formale Definition des Grenzwerts verzichtet – das Hauptaugenmerk liegt stattdessen auf einer intuitiven Begriffsbildung. Um trotzdem einen verständnisorientierten Unterricht gewährleisten zu können, fordert Weigand (2016: 135) die Ausbildung verschiedener Grundvorstellungen. Diese werden den Kern der folgenden Kapitel dieser Arbeit bilden. Skeptisch gegenüber dem propädeutischen Grenzwertbegriff zeigen sich Greefrath et al. (2016: 164), weil ihrer Meinung nach eine theoretisch fundiertere Beschäftigung mit dem Grenzwert aus mehreren Gründen von Vorteil wäre. Die drei betrachteten Schulbücher orientieren sich dabei alle in vergleichbarer Weise an der gegenwärtigen Tendenz hin zum propädeutischen Grenzwertbegriff.

Einführung der Ableitungsfunktion:

In „Lösungswege 7“ und „Mathematik verstehen 7“ wird die Ableitungsfunktion auf sehr ähnliche Weise eingeführt. Motiviert wird die Definition der Ableitungsfunktion dadurch, dass sie eine Vereinfachung bedeutet. Es wird zwar erklärt, dass diese neue Funktion die Steigung bzw. den Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion an jeder Stelle angibt – eine Illustration bleibt allerdings im Gegensatz zum Buch „Thema Mathematik 7“ aus. Dort wird schon früh im Kapitel starker Wert auf graphisches Differenzieren gelegt, wodurch die Lernenden die Möglichkeit bekommen, selbstständig das Zustandekommen der Ableitungsfunktion zu entdecken, indem sie die Steigung des Graphen der Ursprungsfunktion an einigen Stellen in ein Koordinatensystem eingezeichnet haben (Dorfmayr et al. 2019a: 20).

Greefrath et al. (2016: 166) befürworten diesen Zugang über graphisches Differenzieren und legen eine Möglichkeit dar, wie dieses Unterrichtsvorhaben noch effektiver gelingen kann. Durch den Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware (z.B. GeoGebra) lässt sich die Stelle, an der eine Tangente gelegt wird, verschieben. Das Spur-Werkzeug von dynamischen Geometriesoftwares ermöglicht, dass bei Verschiebung der Tangente die Steigungen der Tangente an den jeweiligen Stellen als Punkte in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden (Greefrath et al. 2016: 166). In Abbildung 14 ist diese Methode am Beispiel der Funktion $f(x) = x^3$ zu sehen:

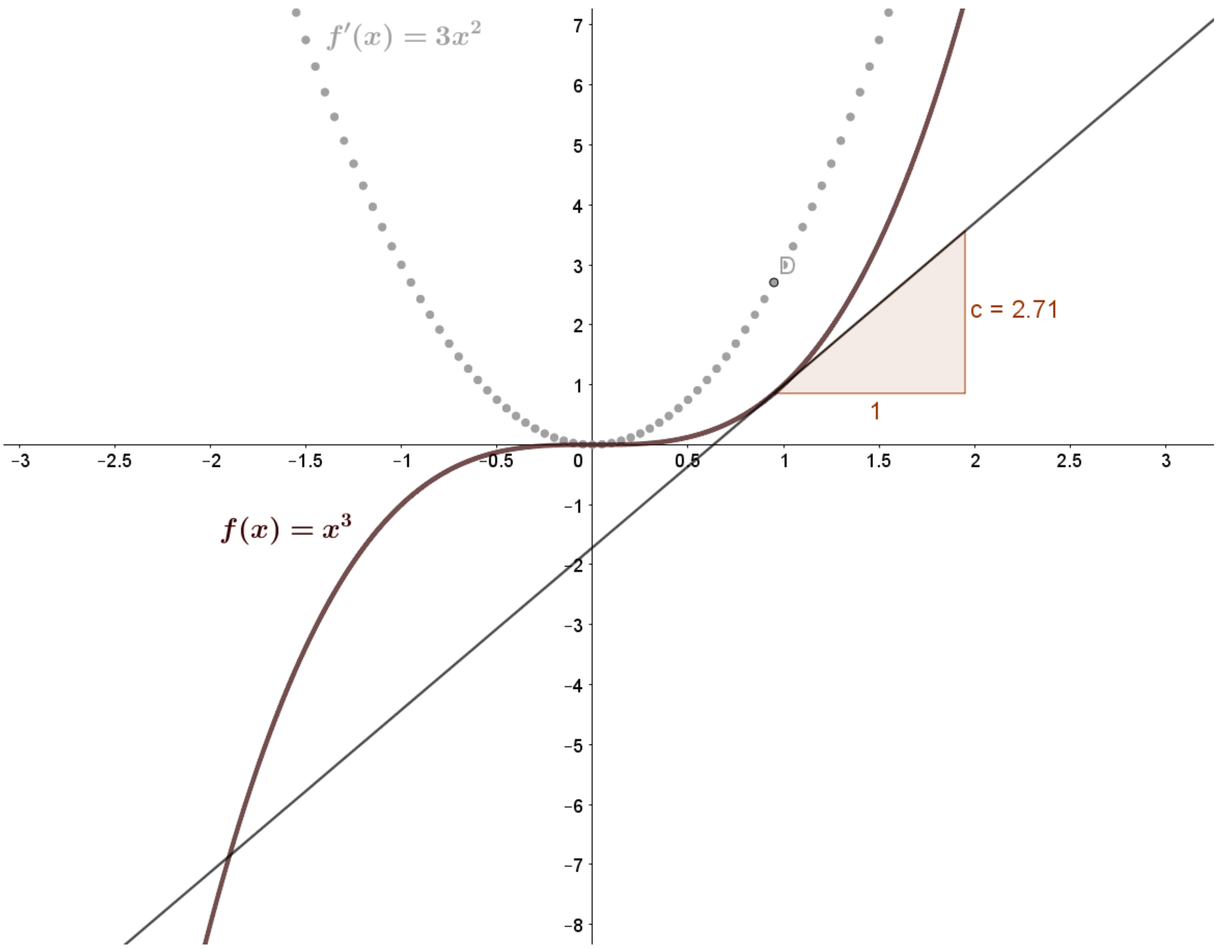


Abbildung 14: Hinführung zur Ableitungsfunktion anhand einer dynamischen Geometriesoftware
Quelle: Eigene Darstellung

Durch den Einsatz von Technologie kann der Übergang von der lokalen Sicht der Ableitung einer Funktion an einer Stelle zum globalen Blick auf die Ableitungsfunktion erleichtert werden (Greefrath et al. 2016: 166).

Ausprägung der beiden Aspekte:

Sehr auffällig bei der Analyse der drei Schulbücher ist, dass die Ableitung beinahe ausschließlich vom Standpunkt des Grenzwerts des Differenzenquotienten betrachtet wird. In allen drei Schulbüchern dominiert dieser Zugang und wird auf verschiedene Arten fundiert dargestellt. Der Aspekt der Ableitung als lokale lineare Approximation wird hingegen sehr vernachlässigt bzw. völlig außen vor gelassen – lediglich „Thema Mathematik 7“ widmet sich der lokalen Näherung an eine Funktion in einem kurzen Unterkapitel. Bemerkenswert ist, dass in der Vorgängerversion des Buches „Thema Mathematik 7“ der Aspekt der lokalen linearen Approximation noch viel ausführlicher behandelt wurde (Brand, Dorfmayr, Lechner, Mistlbacher & Nussbaumer 2015: 42).

In Kapitel 5 werden Gründe dafür genannt, warum eine Thematisierung des Aspekts der lokalen linearen Approximation dennoch gewinnbringend im Unterricht eingesetzt werden kann und wie eine Behandlung dieses Aspekts in der Praxis aussehen könnte.

Beweisen von Ableitungsregeln:

Mit den Beweisen und Argumentationen der Ableitungsregeln wird in allen drei Büchern ähnlich umgegangen. Bei allen Büchern werden einige Beweise sofort nach der Formulierung der Regel (z.B. Potenzregel) formal bewiesen, während manchmal darauf verwiesen wird, dass die Beweise im Anhang zu finden sind (das ist vor allem in „Lösungswege 7“ der Fall). Auffällig ist auch, dass in allen drei Büchern nicht immer eine mathematisch strenge Beweisführung im Vordergrund steht, sondern manche Ableitungsregeln oft durch heuristische Argumentationen oder numerische Annäherungen plausibel gemacht werden. Damit wird auch den Anforderungen des Lehrplans genüge getan, in dem festgelegt ist, dass die Schüler*innen die Ableitungsregeln „kennen und anwenden“ können sollen (BMBWF 2018).

Bei der Frage, ob Ableitungsregeln im Unterricht bewiesen werden sollen oder nicht vertreten Steinbacher & Süss-Stepancik (2018: 31) die Position, dass der Unterricht so aufgebaut sein soll, dass sich eine Beweisbedürftigkeit bei den Lernenden ergibt. Dazu schlagen sie vor, dass Schüler*innen ohne vorherige Formulierung der Ableitungsregeln die Phänomene selbstständig erkunden sollen, bis sie eine Vermutung formulieren können. Durch die selbstständige Beschäftigung mit der Thematik und der daraus folgenden Formulierung einer eigenen Vermutung kann sich die erhoffte Beweisbedürftigkeit der Schüler*innen ergeben (Steinbacher & Süss-Stepancik 2018: 31-33).

Leibniz´sche Schreibweise:

In allen drei Schulbüchern wird die Leibniz´sche Schreibweise verwendet, auch wenn wesentliche Unterschiede in der Verwendung bzw. Einführung festzustellen sind. „Lösungswege 7“ und „Mathematik verstehen 7“ gehen sehr ähnlich vor und widmen dem Thema eine eigene Seite bzw. sogar ein eigenes Unterkapitel. Dabei wird in ähnlicher Weise auf die Gefahr aufmerksam gemacht, den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ als gewöhnlichen Bruch zu interpretieren.

Das Buch „Thema Mathematik 7“ geht ganz anders mit der Leibniz´schen Schreibweise um und lässt diese implizit einfließen (vgl. Abbildung 11), ohne näher auf ihre Bedeutung einzugehen. Klika, Tietze & Wolpers (1997: 238) weisen darauf hin, dass viele Lernende Probleme mit einem adäquaten Verständnis des Ausdrucks $\frac{dy}{dx}$ haben und dabei glauben, es mit einem herkömmlichen Quotienten zu tun zu haben. Aufgrund dieser Problematik wird in den modernen Schulbüchern seit den 1990er Jahren auf die Leibniz´sche Schreibweise bei der Einführung der Ableitung verzichtet (Klika, Tietze & Wolpers 1997: 238) – umso erstaunlicher ist, dass sich Dorfmayr et al. (2019a,b) in „Thema Mathematik 7“ für diesen Zugang entschieden haben.

5. Aspekte und Grundvorstellungen des Ableitungsbegriffs

Aus Kapitel 4 lassen sich zwei wesentliche Erkenntnisse gewinnen: Zum einen wird deutlich, dass in der Schulbuchliteratur – und damit wohl auch in der Schulrealität – der Aspekt der lokalen linearen Approximation der Ableitung nicht bzw. höchstens sporadisch behandelt wird. Zum anderen ist zu erkennen, dass Grenzwertüberlegungen mit wenig Formalismus auskommen, wodurch ein propädeutischer Grenzwertbegriff vorherrscht.

Diese beiden Erkenntnisse werden nun in Kapitel fünf aufgegriffen. Dabei werden in Kapitel 5.1 bei der fachdidaktischen Analyse der beiden Aspekte der Ableitung Gründe und Unterrichtsszenarien dargeboten, die für eine Behandlung des Aspekts der lokalen linearen Approximation im Unterricht sprechen.

Die Kapitel 5.2 & 5.3 widmen sich den Grundvorstellungen zur Ableitung, die wesentlich dafür sind, dass Unterricht, der auf dem vorherrschenden propädeutischen Grenzwertbegriff basiert, verständnisorientiert stattfinden kann (Weigand 2016: 135). Kapitel 5.4 beschäftigt sich mit den gegenwärtig vorherrschenden Grundvorstellungen im Analysis-Unterricht, wobei auch noch einmal ein kurzer Blick in die drei Schulbücher geworfen wird, die in Kapitel 4 bereits vorgestellt wurden.

Zum Abschluss des Kapitels (5.5) werden Fehlvorstellungen und Probleme von Lernenden bei Grenzwertprozessen betrachtet. Dabei wird auch ein Unterrichtsgang vorgestellt, der dabei helfen soll, Fehlvorstellungen bei Grenzwertprozessen zu minimieren.

5.1. Die beiden Aspekte der Ableitung aus fachdidaktischer Perspektive

Die beiden Aspekte der Ableitung, die in Kapitel 3.2 definiert wurden, werden nun aus fachdidaktischer Perspektive betrachtet. Dadurch, dass bei der Schulbuchanalyse in Kapitel 4 der Aspekt des Grenzwerts des Differenzenquotienten inklusive möglichen Herangehensweisen im Unterricht schon ausführlich vorgestellt wurde, wird die Analyse zu diesem Aspekt eher kurz ausfallen. Das Hauptaugenmerk in diesem Kapitel liegt vor allem darauf, anhand fachdidaktischer Arbeiten die Sinnhaftigkeit einer Behandlung des Aspekts der lokalen linearen Approximation im Unterricht zu unterstreichen.

In den drei zuvor analysierten Schulbüchern finden sich die beiden klassische Zugänge zur Ableitung über den Aspekt des Grenzwerts des Differenzenquotienten: Einerseits der Zugang über die Momentangeschwindigkeit (z.B. Freiler et al. 2016: 33 & Malle et al. 2019: 16-17), andererseits jener über die Tangentensteigung (z.B. Dorfmayr et al. 2019a: 14). Dörr, Rolfes, Schmerenbeck & Weber (2015) haben mit ihrem selbstgesteuertem, auf Technologieunterstützung basierenden Lernpfad eine Möglichkeit aufgezeigt, diese beiden klassischen Zugänge parallel zu erarbeiten.

Inhaltlich wird der Zugang über die momentane Änderungsrate mit dem Problem der Geschwindigkeit der Wasserhöhenzunahme bei einem Füllvorgang motiviert, die Tangentensteigung wird über die Bestimmung der Steigung im Gelände eingeführt (Dörr et al. 2015: 139). Diese beiden Problemstellungen können die Lernenden selbstständig bearbeiten, wobei ihnen verschiedene GeoGebra Applets zur Veranschaulichung von Grenzwertprozessen zur Verfügung gestellt werden (Dörr et al. 2015: 140). Im gesamten Lernpfad sind aber immer wieder auch Plenums- und Reflexionsphasen enthalten. Beispielsweise wird nach einer ersten Beschäftigung mit den beiden Anwendungsproblemen im Plenum diskutiert, dass die beiden Aufgaben auf die gleiche Problematik führen (Dörr et al. 2015: 141).

Durch die Einbettung solcher Phasen in den Lernpfad wird auch den von Weigand & Weth (2002: 33) befürchteten Problemen bei computergestützten Unterrichtssequenzen, wie beispielsweise einer zu geringen Reflexion des Lerngegenstands, entgegengewirkt.

Dieser Lernpfad, der an deutschen Schulen erprobt wurde, wurde von den Lernenden durchwegs positiv aufgenommen, insbesondere die GeoGebra Applets empfanden die Schülerinnen und Schüler als sinnvolles Hilfsmittel (Dörr et al. 2015: 150-151). Auch die Plenums- und Reflexionsphasen wurden positiv bewertet – auffällig ist dabei, dass vor allem Schülerinnen und Schüler, die Mathematik weniger interessant finden, diese Phasen als besonders hilfreich empfunden haben (Dörr et al. 2015: 151-152).

Dieser Lernpfad ist jedenfalls eine gute Möglichkeit, selbstgesteuertes Lernen am Computer über den Aspekt der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten zu initiieren, sodass Schülerinnen und Schüler selbst entdecken und erforschen können und es nicht bei der reinen Reproduktion von bereits fertigem Wissen bleibt.

Der Aspekt der lokalen linearen Approximation spielt wie bereits analysiert in der Schulbuchliteratur kaum eine Rolle. In fachdidaktischen Publikationen wird dieser Zugang jedoch oft auch als für den Schulunterricht geeignet dargestellt.

Einen wesentlichen Beitrag zur didaktischen Aufbereitung dieses Aspekts lieferte Kirsch (1979) mit seinem Vorschlag, sich dem Ableitungsbegriff graphisch mit Hilfe eines sogenannten Funktionenmikroskops zu nähern. Den Ausgangspunkt bietet dabei der Graph einer Funktion f selbst und nicht der Wunsch, eine „Schmieggerade" bzw. jene affin-lineare Funktion zu finden, die den Graphen in einem Punkt bestmöglich approximiert (Kirsch 1979: 27). Dabei wird ein Punkt $P = \big(x_0 \big| f(x_0)\big)$ auf dem Graphen im inneren des Definitionsbereichs der Funktion so lange mit dem Mikroskop vergrößert, bis (im Fall von differenzierbaren Funktionen) praktisch nur noch ein Geradenstück zu sehen ist. Die Steigung dieses (beinahe) Geradenstücks ist die Ableitung m der Funktion f an der Stelle x_0. Durch numerische Berechnung in einer Tabelle zeigt Kirsch (1979: 30-31), dass in einer sehr kleinen Umgebung von x_0 gilt: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx m$. Durch elementare Umformungen ergibt sich daraus $f(x) \approx f(x_0) + m \cdot (x - x_0)$, wodurch man mit Hilfe des Funktionenmikroskops auf einfache Weise der formalen Definition der Ableitung als lokale lineare Approximation (vgl. Kapitel 3.2.2) sehr nahe gekommen ist. Die Arbeit mit dem Funktionenmikroskop sieht Kirsch „als ein vorbereitendes, verbindendes oder ergänzendes Instrument an" (Kirsch 1979: 25), das den Verstehensprozess bei Lernenden positiv beeinflussen kann (Kirsch 1979: 26).

Nichtsdestotrotz plädieren Blum & Kirsch (1979: 12) aufgrund geeigneterer Veranschaulichungsmöglichkeiten, einer einfacheren Handhabung bei konkreten Beispielen und der Wichtigkeit von Grenzwerten für einen Einstieg in das Thema über Grenzwerte von Änderungsraten.

Dass das Funktionenmikroskop zwar eine gute Veranschaulichung bietet, eine formale Definition jedoch nicht ersetzen kann, führt Kirsch (1995: 27) bei der Beschäftigung mit pathologischen Funktionen vor.

Die neuen technologischen Möglichkeiten, die seit der Publikation von Kirsch (1979) verfügbar wurden, machten auch eine Weiterentwicklung des Funktionenmikroskops möglich. Beispielsweise bietet Elschenbroich (2015: 265) mit seinem Funktionenmikroskop 2.0 eine Möglichkeit, durch eine dynamische Mathematik Software die Steigungsfunktion auf globaler Ebene zu betrachten. So einen Unterrichtsgang sieht Elschenbroich (2015: 267) als gute Möglichkeit an, die Lernenden beim Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen zu unterstützen und der Tendenz des unverstanden angewendeten Analysis-Kalküls entgegenzuwirken.

Eberle & Lewintan (2019: 204) sehen den Zugang über das Hineinzoomen in den Graphen um den betreffenden Punkt, bis praktisch nur noch ein Geradenstück zu sehen ist, als den natürlicheren Weg an, um Schülerinnen und Schüler auf die Ableitung hinzuführen. Sie betonen einige Vorteile des Aspekts der lokalen linearen Approximation, wie beispielsweise ein besseres Verständnis über das lokale Verhalten einer Funktion und die Verallgemeinerbarkeit auf höhere Dimensionen (Eberle & Lewintan 2019: 210-211).

Trotz dieser Vorteile gibt es allerdings auch eine Reihe von Gründen, die Ableitung nicht über den Aspekt der lokalen linearen Approximation einzuführen. Klika et al. (1997: 259) plädieren beispielsweise aufgrund geeigneter Anwendungen und guter Zugänglichkeit für einen Einstieg ins Thema über das Konzept der lokalen Änderungsraten. Für weiterführende Fragen- und Problemkontexte halten sie die Behandlung des Linearisierungskonzepts allerdings für eine sinnvolle Ergänzung des Unterrichts (Klika et al. 1997: 259).

Danckwerts & Vogel (2006: 74-81) listen eine Reihe von Vorteilen des Zugangs über den Aspekt der lokalen Linearisierung auf und meinen, dass man Schülerinnen und Schüler an der historischen Entwicklung des Ableitungsbegriff teilhaben lassen soll (Danckwerts & Vogel 2006: 83-84), wodurch der Aspekt der lokalen linearen Approximation im Unterricht zu behandeln wäre. Für den Einstieg ins Thema Ableitung erachten sie allerdings auch den Zugang über die lokale Änderungsrate als geeigneter (Danckwerts & Vogel 2006: 89).

Insgesamt geht aus der Literatur hervor, dass ein Einstieg über den Aspekt des Grenzwerts des Differenzenquotienten zu empfehlen ist. Konsens besteht allerdings auch darüber, dass das Konzept der lokalen Linearisierung aus vielerlei Gründen nützlich sein und dem Ableitungsbegriff eine neue Dimension geben könnte. Die fehlende Behandlung dieses Aspekts in der Schulbuchliteratur ist wohl dadurch zu erklären, dass die Bücher sich (aus gutem Grund!) an die Anforderungen der schriftlichen Reifeprüfung orientieren, bei der der Aspekt der lokalen linearen Approximation keine Rolle spielt. Im Sinne einer optimalen Abstimmung mit den fachdidaktischen Empfehlungen sollten allerdings auch einige Inhalte in den Büchern zu finden sein, die sich mit der lokalen linearen Approximation beschäftigen.

Damit Unterricht zu den beiden Aspekten der Ableitung überhaupt gewinnbringend stattfinden kann, müssen die Lernenden dabei adäquate Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff entwickeln. Deswegen wird im nächsten Unterkapitel die Entwicklung des Grundvorstellungskonzepts in der Mathematikdidaktik kurz allgemein thematisiert, bevor in Kapitel 5.3 auf die Grundvorstellungen zur Ableitung fokussiert wird.

5.2. Grundvorstellungen allgemein in der Mathematikdidaktik

Malle (n. d.) berichtet von seinen Erfahrungen als Hochschullehrender, dass bisher alle Studierenden folgende Prüfungsaufgabe richtig lösen konnten: „Sei $f(x) = x^2$. Berechnen Sie $f'(3)$!“ Die darauffolgende Aufgabe, die nach einer Interpretation des Ergebnisses $f'(3) = 6$ abzielt, wird jedoch kaum richtig von Studierenden gelöst. Eine Erklärung dafür findet Malle (n. d.: 1) darin, dass der Mathematikunterricht oft zu viel von formal-regelhaften Phasen geprägt ist, während die für das Verständnis so wichtigen inhaltlich-anschaulichen Phasen viel zu kurz kommen.

Das oben beschriebene Szenario ist ein gutes Beispiel dafür, welche Verständnisprobleme sich ergeben, wenn Schülerinnen und Schüler kaum bzw. keine Grundvorstellungen zu einer Thematik (wie in diesem Fall zur Ableitung) ausgebildet haben.

Das Grundvorstellungskonzept in der Mathematikdidaktik reicht bis in die in Kapitel 2 beschriebene Zeit der Strenge in den 1970er Jahren zurück, in der es notwendig war, neben der sehr formalen, universitätsnahen Mathematik Grundvorstellungen zu formulieren, um den Lehrstoff für Lernende zugänglicher zu machen (Blum & vom Hofe 2016: 226–227). Beispielsweise sind bei Griesel (1971) und Blum & Kirsch (1979) bereits Grundvorstellungskonzepte zu finden.

Zentrale Bedeutung für das Grundvorstellungskonzept in der Mathematikdidaktik hat die Arbeit von vom Hofe (1995), in der er die folgenden drei Aspekte als zentrale Elemente der Grundvorstellungsidee formuliert:

- Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen,
- Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. „Verinnerlichungen“, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
- Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur (vom Hofe 1995: 97–98).

Dabei betont er vor allem den dynamischen Charakter von Grundvorstellungen (vom Hofe 1995: 98) und fügt dem normativen Grundvorstellungskonzept eine Dimension hinzu, in der die in der Realität vorherrschenden Verstehensprozesse der Lernenden berücksichtigt werden. Diese neue Dimension nennt er deskriptive Ebene (vom Hofe 1995: 106), der konstruktive Aspekt behandelt die Frage, wodurch die Divergenz zwischen normativer und deskriptiver Ebene zustande kommt (vom Hofe 1995: 117). Grundvorstellungen können also als Verbindung zwischen der mathematischen und der individuellen Welt der Lernenden gesehen werden (Blum & vom Hofe 2016: 231).

Vom Hofe (1995: 113–122) gibt zwei Beispiele an, wie das Grundvorstellungskonzept in der Praxis hilfreich bei der Fehlerdiagnose von Lernenden sein kann.

Für jedes mathematische Teilgebiet sind unterschiedliche Grundvorstellungen notwendig. Auch wenn in zahlreichen Gebieten schon adäquate Konzepte ausgearbeitet wurden, gibt es immer noch Nachholbedarf in manchen thematischen Bereichen, wie beispielsweise in der Geometrie, linearen Algebra und Stochastik. In der Analysis gibt es hingegen schon zahlreiche Grundvorstellungsbeschreibungen (Blum, Griesel & vom Hofe 2019: 129–131). Im Folgenden werden die Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff nach Greefrath et al. (2016) aufgelistet und kurz erklärt.

5.3. Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff

Im Mathematikunterricht allgemein – vor allem aber in der Analysis – gilt es für Lehrpersonen das richtige Verhältnis zwischen Anschaulichkeit und formaler Exaktheit zu finden. Die gegenwärtige Tendenz zu einem höheren Maß an Anschaulichkeit im Unterricht ist nicht umsonst eine der zentralen didaktischen Prinzipien. Dennoch kann ein zu sehr auf Anschauung bedachter Unterricht gerade in der Analysis zu Problemen führen, wenn bei neuen Begriffen, wie beispielsweise dem Grenzwertbegriff, die vorherrschenden lebensweltlichen Denkmuster nicht mehr tragfähig sind (Lotz et al. 2015: 178). Deshalb ist eines der zentralen Anliegen der Analysis-Didaktik, eine Balance „im Spannungsfeld zwischen logischer Präzision und elementarer Plausibilität“ (Lotz et al. 2015: 181) zu finden. Damit diese Gratwanderung gelingen kann, wird die Ausbildung adäquater Grundvorstellungen zu zentralen Begriffen der Analysis gefordert (Weigand 2016: 135).

Das vorherrschende Grundvorstellungssystem zum Ableitungsbegriff stammt von Greefrath et al. (2016), auf das nun genauer eingegangen wird. Es bildet die Basis für die Fragebogenerhebung, deren Ergebnisse in Kapitel 7 vorgestellt werden. Abbildung 15 liefert eine Übersicht des Konzepts:

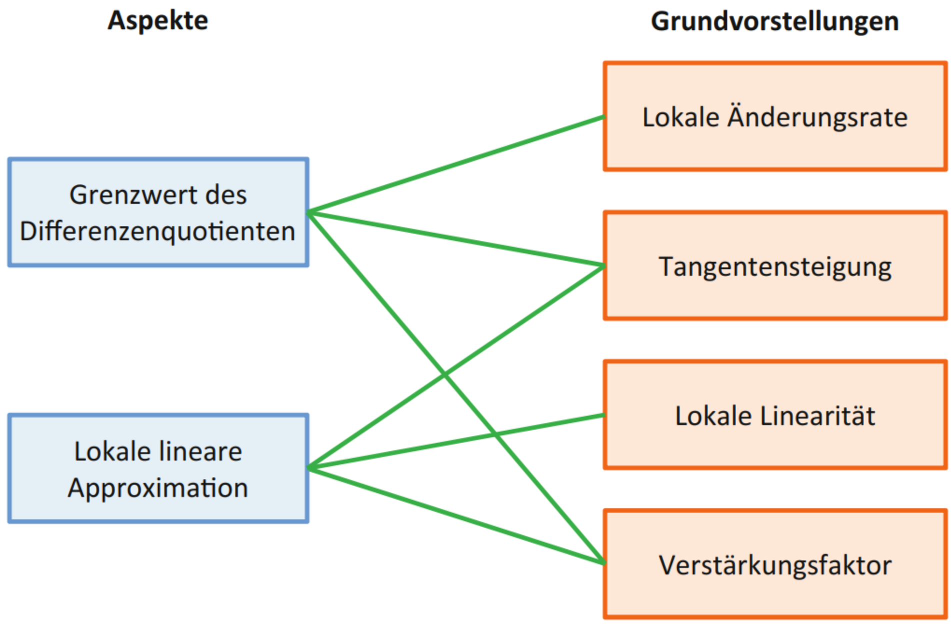


Abbildung 15: Aspekte und Grundvorstellungen der Differentialrechnung
Quelle: Greefrath et al. 2016: 147

Wie bereits in den vorigen Kapiteln ausführlich thematisiert wurde, lassen sich zwei Aspekte der Ableitung unterscheiden. Diese wiederum bilden die Basis für das Erlernen verschiedener Grundvorstellungen (Greefrath et al. 2016: 147), die nun jeweils genauer unter die Lupe genommen werden, indem auch mögliche Fehlvorstellungen und Ideen zu Unterrichtssequenzen diskutiert werden.

5.3.1. Lokale Änderungsrate

Die Vorstellung der lokalen Änderungsrate fußt auf die in der Sekundarstufe 1 im Lehrplan verankerten Berechnungen von mittleren Änderungsraten, beispielsweise bei der Berechnung von Durchschnittsgeschwindigkeiten in einem Zeitintervall. Mit diesem Vorwissen ist ein intuitiver Zugang zum Differentialquotienten durch systematisches Verkleinern des betrachteten Intervalls für Lernende leicht zugänglich. Damit einer Stelle ein lokales Änderungsverhalten zugeschrieben werden kann, ist die Einsicht nötig, dass es sich dabei nicht wie bei der mittleren Änderungsrate um einen Quotienten, sondern um den Grenzwert eines Quotienten handelt (Greefrath et al. 2016: 147–148). In Abbildung 16 ist zu sehen, welche Vorstellungen Lernende aufbauen müssen, um die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate verinnerlicht zu haben:

Zu einer umfassend ausgeprägten *Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate* gehört die Entwicklung

- der Vorstellung von der Momentangeschwindigkeit bei Veränderungsprozessen (z. B. Bewegungsvorgängen),
- der Vorstellung von der Steigung einer Kurve in einem Punkt,
- der Vorstellung, dass die Änderung der Abhängigen y durch $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ gegeben ist.

Abbildung 16: Benötigte Vorstellungen zur Aneignung der Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate
Quelle: Greefrath et al. 2016: 148

Mögliche Unterrichtsgänge bzw. Aufgabenstellungen zur Ausbildung dieser Grundvorstellung sind in allen drei in Kapitel 4 analysierten Schulbüchern enthalten. Vor allem der technologiegestützte, auf selbstgesteuertes Lernen fokussierende Lernpfad von Dörr et al. (2015) bietet eine zeitgemäße Möglichkeit, diese Grundvorstellung auszubilden.

Auch Henn (2018: 145–160) liefert einen Vorschlag für einen realitätsnahen, die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate ansprechenden Unterrichtsgang. Dabei betont er einerseits die Bedeutsamkeit und Anschaulichkeit eines Zugangs über die Idee der Änderungsrate, andererseits bietet sich dadurch auch ein intuitiver Zugang zum Integral, wenn – wie in vielen Anwendungssituationen üblich – eine Änderungsrate gegeben ist und der Bestand rekonstruiert werden soll (Henn 2018: 146).

Bei einer Untersuchung australischer Schülerinnen und Schüler in Bezug auf ihr Verständnis zu Änderungsraten wird durch Interviews aufgezeigt, wie viele verschiedene Vorstellungen eine Gruppe von Lernenden zum Begriff der Änderungsrate aufbaut (Herbert & Pierce 2012: 92–96). Eine Übersicht über die verschiedenen Deutungsmöglichkeiten ist in Herbert & Pierce (2012: 97) zu finden. Für Lehrpersonen ist diese Studie jedenfalls nützlich, um sich der möglichen Vorstellungsvielfalt zum Begriff der Änderungsrate bewusst zu werden und gegebenenfalls im Unterricht darauf eingehen zu können.

Oldenburg (2016) schlägt deshalb vor, zunächst Änderungen, anstatt Änderungsraten zu betrachten. Damit will er den algebraischen Problemen der Lernenden hinsichtlich der auftretenden Bruchterme bei Änderungsraten aus dem Weg gehen (Oldenburg 2016: 56).

5.3.2. Tangentensteigung

Die geometrische Interpretation des Übergangs von der mittleren zur momentanen bzw. lokalen Änderungsrate ist der Übergang von den Steigungen der Sekanten zur Steigung der Tangente. Die Bedeutung der Grundvorstellung der Ableitung als Steigung der Tangente ist unbestritten, auch wenn die Einführung der Ableitung über die Tangentensteigung in den letzten Jahren nach Kritik aus fachdidaktischen Publikationen (z.B. Danckwerts & Vogel 2006) weniger populär wurde (Gründe dafür wurden in Kapitel 4.4 genannt).

Der analytische Tangentenbegriff unterscheidet sich wesentlich von jenem, der den Lernenden bereits seit der 5. Schulstufe aus der Geometrie bekannt ist. Die wesentliche Eigenschaft ist, dass sich eine Tangente lokal dem Graphen einer Funktion anschmiegt, wobei sie mehr als einen Punkt (sogar beliebig viele) mit dem Graphen gemeinsam haben kann (Greefrath et al. 2016: 149). Die Eigenschaft der Tangente als Schmieggeraden gehört ebenso wie die weiteren Vorstellungen aus Abbildung 17 zu einer umfangreich ausgebildet Grundvorstellung der Tangentensteigung:

Zu einer ausgeprägten *Grundvorstellung der Tangentensteigung* gehören insbesondere

- die Vorstellung von Tangenten als Schmieggeraden,
- die Vorstellung, dass die Tangente an eine Kurve in einem Punkt die gleiche Steigung wie die Kurve hat,
- die Vorstellung, dass die Tangente die lokale Richtung einer Kurve angibt.

Abbildung 17: Benötigte Vorstellungen zur Aneignung der Grundvorstellung der Tangentensteigung
Quelle: Greefrath et al. 2016: 150

Damit Schülerinnen und Schüler die Grundvorstellung der Tangentensteigung ausbilden können, müssen sie zuerst einige mögliche Fehlvorstellungen überwinden bzw. ihren Tangentenbegriff anpassen und neu denken (Greefrath et al. 2016: 150). Biza (2011) untersuchte anhand 15 griechischer Schülerinnen und Schüler mögliche Fehlvorstellungen in Bezug auf die analytische Tangentendefinition. Dabei wird deutlich, dass die Lernenden Probleme haben, vom jahrelang gewohnten geometrischen Tangentenbegriff abzurücken und zuzulassen, dass Tangenten plötzlich mehrere Punkte mit dem Graphen gemeinsam haben können (Biza 2011: 136). Durch die Frage, ob die

Funktion $f(x) = x^3$ im Punkt $A = (0|0)$ eine Tangente besitzt oder nicht (vgl. Abbildung 18), lassen sich Schwierigkeiten mit der Deutung des neuen Tangentenbegriffs aufzeigen.

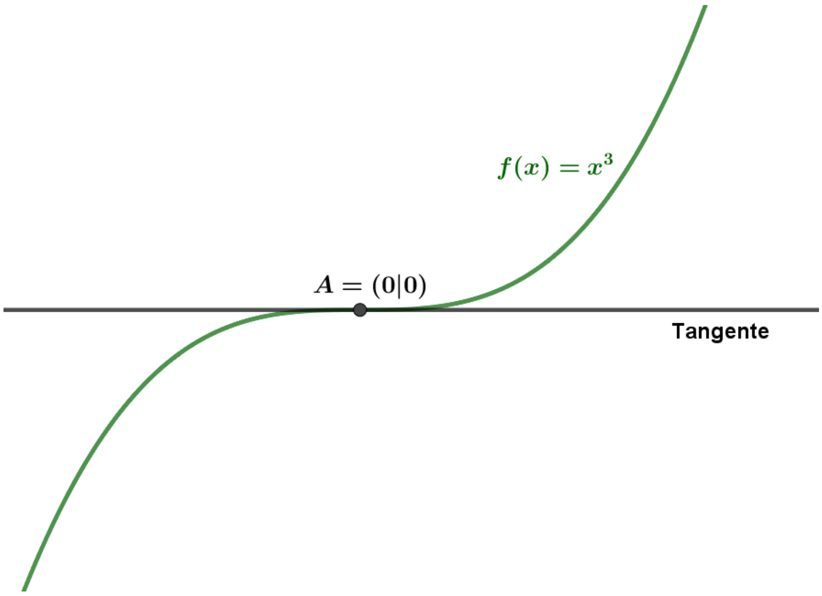


Abbildung 18: Bei Wendepunkten kann die Tangente zu beiden Seiten des Graphen verlaufen
Quelle: Eigene Darstellung

Die Schülerinnen und Schüler gaben zwar an, Ähnlichkeiten zu einer „gewöhnlichen" Tangente zu erkennen, glaubten aber nicht daran, dass es sich um eine Tangente handeln könne, weil die Tangente den Graphen auseinanderschneiden bzw. teilen würde (Biza 2011: 141).

Der Beitrag von Gundlach (2006) zum Einsatz von Technologie in Bezug auf das Tangentenproblem liefert spannende Ideen zu einem Unterrichtsgang, der die Ausbildung der Grundvorstellung der Tangentensteigung bei Lernenden ermöglicht. Dabei bietet u.a. der Zoom-in Befehl eine gute Möglichkeit, die in Abbildung 17 aufgezählten benötigten Vorstellungen zu aktivieren (Gundlach 2006: 10).

Wesentlich für einen Unterrichtsgang zur Tangentensteigung ist jedenfalls, dass die analytische Definition einer Tangente von der geometrischen abgegrenzt und hinreichend diskutiert wird, um Fehlvorstellungen, wie in Biza (2011) beschrieben, auszumerzen.

5.3.3. Lokale Linearität

Wie in Abbildung 15 zu sehen ist, spricht nur der Aspekt der lokalen linearen Approximation die Grundvorstellung der lokalen Linearität an. Wie bereits deutlich wurde, wird diesem Aspekt im Vergleich zu jenem des Grenzwerts des Differenzenquotienten in der Schulanalysis eine deutlich geringere Bedeutung beigemessen.

Nichtsdestotrotz betonen Greefrath et al. (2016: 151) die Wichtigkeit dieser Grundvorstellung, insbesondere bei Modellierungsaufgaben. Der Kern dieser Grundvorstellung liegt darin, dass die Ableitung angibt, mit welchem Faktor sich kleine Änderungen der unabhängigen Variablen auf die abhängige Größe auswirken (Greefrath et al. 2016: 151). Die beiden Aspekte in Abbildung 19 sind für eine Ausbildung der Grundvorstellung der lokalen Linearität notwendig:

Zu einer ausgeprägten *Grundvorstellung der lokalen Linearität* einer Funktion $f : x \longmapsto y$ gehört insbesondere:

- Beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung eines Punktes des Graphen einer differenzierbaren Funktion sieht man nur ein geradliniges Kurvenstück.
- Für kleine Änderungen der x-Werte ist die Funktion so gut wie linear, kann also approximativ durch einen linearen Zusammenhang ersetzt werden[2].

Abbildung 19: Benötigte Kenntnisse zur Aneignung der Grundvorstellung der lokalen Linearität
Quelle: Greefrath et al. 2016: 151

Dass durch Hineinzoomen in einen kleinen Ausschnitt eines Graphen dieses Stück praktisch geradlinig wird (vgl. Abbildung 20), sehen Eberle & Lewintan (2019: 204) als den natürlicheren Weg, die Steigung des Graphen in einem Punkt zu ermitteln. Sie meinen, dass Lernende die Frage nach der Steigung eines Graphen in einem Punkt intuitiv selbst durch Hineinzoomen in den Punkt lösen würden, wenn Mittel wie die Grenzwertbildung von mittleren Steigungen nicht zur Verfügung stehen würden.

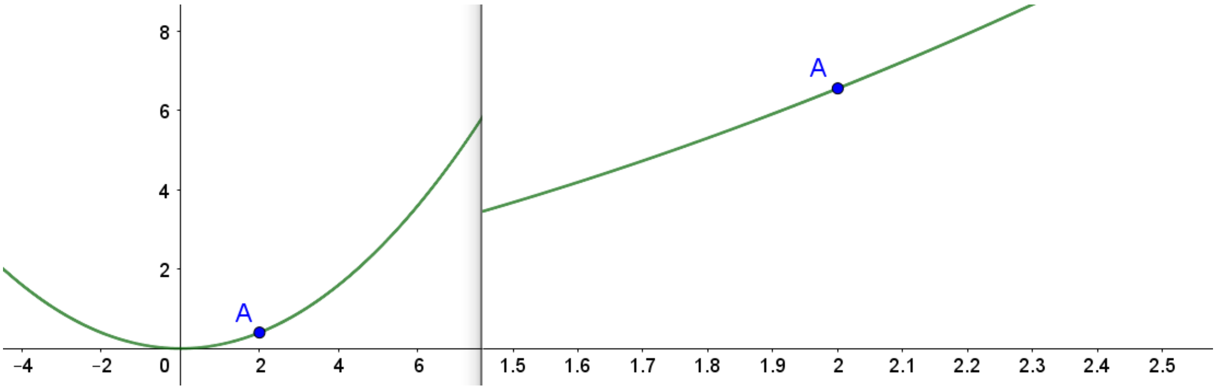


Abbildung 20: Bei hinreichend starker Vergrößerung ist ein kleines Graphenstück praktisch geradlinig
Quelle: Eigene Darstellung

Mögliche Chancen und Gefahren eines Zugangs, der auf die lokale Linearität von differenzierbaren Funktionen fokussiert, wurden bereits in Kapitel 5.1 dargelegt und sind im Detail in Klika (1997: 258) nachzulesen.

Neben dem bereits besprochenen Vorschlag von Eberle & Lewintan (2019) bietet auch Oldenburg (2016: 68–69) eine Möglichkeit zur graphischen und tabellarischen Erforschung des Phänomens der lokalen Linearität, indem beispielsweise für die Sinusfunktion lineare Prognosen in einem kleinen Intervall um einen festen Punkt getroffen werden sollen.

5.3.4. Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen

Die letzte der vier Grundvorstellungen – der Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen – ist eng mit dem Konzept der lokalen Linearisierung verbunden. Vor allem in der mathematischen Fehlerrechnung ist diese Vorstellung von großer Bedeutung, beispielsweise bei Aufgaben, die danach fragen, wie sehr sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken (Greefrath et al. 2016: 151–152).
Die in Abbildung 21 aufgelisteten Kenntnisse sind notwendig, um die Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors kleiner Änderungen ausprägen zu können:

Zu einer umfassend ausgeprägten *Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors* gehören folgende Kenntnisse:

- Die Ableitung gibt an, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken.
- Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle/starke Änderungen der Funktionswerte.
- Für kleine Änderungen ist der Zusammenhang von Δx, Δy multiplikativ: $\Delta y \approx m \cdot \Delta x$.

Abbildung 21: Benötigte Kenntnisse zur Aneignung der Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors
Quelle: Greefrath et al. 2016: 153

Im Mathematikunterricht spielt diese Grundvorstellung keine große Rolle (Greefrath et al. 2016: 152), wenngleich betont wird, dass diese Vorstellung auch im Schulunterricht – allen voran in der Physik (z.B. Schwingungen) – hilfreich sein kann. Deswegen entschieden sich Greefrath et al. (2016: 153), diese bis dato nicht gebräuchliche Vorstellung in ihr Grundvorstellungskonzept der Ableitung aufzunehmen.

Eine Untersuchung von Mamolo & Zazkis (2012) unter Studierenden der Mathematik, die schon mindestens zwei Analysis-Kurse besucht hatten (Mamolo & Zazkis 2012: 176), zeigt Schwierigkeiten in diesem Bereich auf. So wurden Aufgaben, deren Kern im Zusammenhang zwischen Flächeninhaltsformeln (Kreis, Quadrat) bzw. Formeln von Volumina (Würfel) und ihrer Ableitung besteht (Mamolo & Zazkis 2012: 164), von den Studierenden häufig falsch gelöst bzw. interpretiert (vgl. Übersicht in Mamolo & Zazkis 2012: 170).

Es wird dabei eine „unzureichend ausgeprägte Grundvorstellung der Ableitung als Verstärkungsfaktor“ (Greefrath et al. 2016: 152) diagnostiziert.

Greefrath et al. (2016: 161–162) machen trotz der geringen Bedeutung dieser Grundvorstellung im Mathematikunterricht einen Vorschlag für eine Unterrichtssequenz, in der die Ableitung als Verstärkungsfaktor im Zentrum steht. Dabei wird eine (monoton fallende) Nachfragefunktion inklusive ihres Graphen betrachtet. Aus Sicht der Herstellerin/des Herstellers wird dann diskutiert, wie sehr sich eine kleine Preissteigerung auf die Nachfrage auswirkt, wobei die Ableitung als wesentliches

Hilfsmittel verwendet wird. Danach werden Verstärkungsfaktoren rechnerisch ermittelt (Greefrath et al. 2016: 162).

5.4. Aufgaben zu den Grundvorstellungen der Ableitung in Schulbüchern

Jede der vier Grundvorstellungen zur Ableitung kann vorteilhaft und sinnvoll in den Mathematikunterricht eingebunden werden, auch wenn die tatsächliche Umsetzung dabei von einigen organisatorischen Parametern (z.B. Vorgaben des Lehrplans, Schulbüchern, Anforderungen bei Matura/Abitur) abhängt (Greefrath et al. 2016: 163).

Im gegenwärtigen Analysis-Unterricht werden beinahe ausschließlich die Grundvorstellungen der lokalen Änderungsrate und der Tangentensteigung behandelt, während beispielsweise die Vorstellung der lokalen Linearität praktisch kaum vorkommt (Oldenburg 2016: 56). Diese Einschätzung deckt sich mit jener von Greefrath et al. (2016: 155), die die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate als die zentralste in den Bildungsstandards für das Abitur ausmachen. Auch für die schriftliche Reifeprüfung in Österreich gilt, dass die Vorstellungen der lokalen Änderungsrate und Tangentensteigung am wichtigsten für eine erfolgreiche Bearbeitung sind.[5]

Diese Beurteilungen decken sich auch mit der Aufteilung der Aufgaben in den drei in Kapitel 4 analysierten Schulbüchern. So sind überall ähnliche und umfangreiche Aufgaben, die die Grundvorstellungen der lokalen Änderungsrate (z.B. Freiler et al. 2016: 34–35, Malle et al. 2019: 35, Dorfmayr et al. 2019a: 17) und der Tangentensteigung (z.B. Freiler et al. 2016: 36–38, Malle et al. 2019: 34, Dorfmayr et al. 2019a: 15) ansprechen, enthalten.

Aufgaben, die auf die Grundvorstellungen der lokalen Linearität bzw. den Verstärkungsfaktor fokussieren, sind nur sehr spärlich enthalten. In Freiler et al. (2016: 28) in Aufgabe 72d)[6] wird die Vorstellung des Verstärkungsfaktors kleiner Änderungen implizit angesprochen. Betrachtet wird der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r.

---

[5] vgl. dazu Diagramm 9 in Kapitel 7 und frühere Prüfungsaufgaben, abgerufen am 16.08.2021 unter: https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=4514&token=1db9f769d7eb4d77903da2f90ef4d529004eaece (Teil-1-Aufgaben), https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=4516&token=9b89940707d3fa0dd48c831ece5a41e06a867c66 (Teil-2-Aufgaben).

[6] Eine ähnliche Aufgabe mit dem Kugelvolumen anstatt des Kreisflächeninhalts ist in Freiler et al. (2016: 28) Bsp. 73c) zu finden.

Dabei sind einige Differenzenquotienten zu berechnen, wobei die rechte Intervallgrenze systematisch der linken ($r = 3$) angenähert wird. Die Lernenden sollen erkennen, dass für (genügend) kleine Intervalllängen die Differenzenquotienten (praktisch) dem Kreisumfang für $r = 3$ entsprechen. Auf weiterführende Abbildungen bzw. Erklärungen, wie sie beispielsweise in Greefrath et al. (2016: 152) zu finden sind, wird verzichtet.

Ähnlich schwierig ist es auch, Aufgaben in den drei Schulbüchern zu finden, die sich mit der Vorstellung der lokalen Linearität der Ableitung beschäftigen. Lediglich in Dorfmayr et al. (2019b: 200–201) wird diesem Zugang eine Doppelseite gewidmet. Dabei steht im Zentrum, mit Hilfe von Differentialen die bestmögliche lineare Näherung für Funktionen in einem Punkt zu finden, wobei damit dem „Verständnis der Ableitung als Steigung der bestapproximierenden Geraden" (Danckwerts & Vogel 2006: 89) sehr nahe gekommen wird. Eine formale Definition bzw. eine Erwähnung, dass man die Ableitung alternativ auch über den Aspekt der lokalen linearen Approximation einführen könnte, bleibt in Dorfmayr et al. (2019b) aus.

5.5. Fehlvorstellungen von Lernenden bei Grenzwertbetrachtungen

Nachdem bereits in Kapitel 5.3. mögliche Fehlvorstellungen zu den vier Grundvorstellungen der Ableitung kurz dargelegt wurden, werden zum Abschluss des Kapitels Probleme von Schülerinnen und Schüler bei der Betrachtung von Grenzwerten in den Blick genommen. Manchmal stellen nämlich Schwierigkeiten beim Umgang mit Grenzwerten bzw. Grenzwertprozessen Lernhindernisse für Schülerinnen und Schüler bei der Beschäftigung mit der Ableitung dar, wie beispielsweise Hauke (2001: 210–211) im Rahmen einer Unterrichtssequenz über Momentangeschwindigkeiten zeigt.

Hauke (2001: 212) unterscheidet zwei Sichtweisen zu Grenzwerten, nämlich die einbettende und isolierende Sichtweise. Die isolierende Sichtweise bedeutet im Kontext von Momentangeschwindigkeiten, dass Zeitpunkte isoliert von Zeiträumen betrachtet werden. Das führt zur Auffassung, dass lediglich Zeiträumen und nicht Zeitpunkten eine Geschwindigkeit zugeschrieben werden kann, wodurch nur Durchschnittsgeschwindigkeiten existieren würden. Bei der eingebetteten Sichtweise hingegen wird die „Momentangeschwindigkeit in die Menge der Momentangeschwindigkeiten über den gesamten Zeitraum eingebettet gesehen" (Hauke

2001: 212), wodurch jedem Zeitpunkt eine Momentangeschwindigkeit zugeordnet werden kann.

Weiters zeigt sich die Problematik eines unzureichend ausgereiften Grenzwertverständnisses bei der Unterscheidung von Differenzen- und Differentialquotienten, wie beispielsweise vom Hofe (1998: 263–265) ausführt. Bei dieser Unterrichtsbeobachtung wird deutlich, dass Schülerinnen und Schüler große Probleme damit haben, zu erklären, was ein Grenzwert überhaupt ist, wodurch beispielsweise die Unterscheidung zwischen Differenzen- und Differentialquotienten schwerer fällt (vom Hofe 1998: 267). Schwierigkeiten dieser Art erklärt Marx (2013: 74) dadurch, dass im Unterricht (auch in der Sekundarstufe 1) Folgen und deren Grenzwerte zwar immer wieder implizit auftreten (z.B. bei der Exhaustion der Kreisfläche), diese aber kaum expliziert werden, sodass es Schülerinnen und Schüler schwer haben, tragfähige Vorstellungen in Bezug auf den Grenzwertbegriff aufzubauen.

Eine erfreuliche Erkenntnis aus der Arbeit von vom Hofe (1998: 287) ist, dass die Erforschung des Grenzwertbegriffs als rein innermathematischer Gegenstand ohne unmittelbar erkennbare Anwendbarkeit bei Lernenden offenbar Neugierde, Entdeckungsfreude und das Bedürfnis weckt, „das Geheimnis des Grenzwerts“ (vom Hofe 1998: 287) zu verstehen. Erwähnt werden muss dabei, dass eine computergestützte Lernumgebung von großer Bedeutung für den Erforschungsprozess in Gruppenarbeiten ist, weil sich durch die Visualisierung von Grenzwertprozessen die Kommunikation erst richtig entwickeln kann (vom Hofe 1998: 287–288). Da die Beschaffung einer computergestützten Lernumgebung mittlerweile kein Hindernis mehr darstellt, lassen sich leicht adäquate Unterrichtssequenzen arrangieren, in denen Gruppen von Lernenden forschend-entdeckend zum Grenzwertbegriff arbeiten können.

Eine sehr konkrete Untersuchung zu Problemen mit Grenzwerten liefert Bauer (2011) in seiner Arbeit über das „Phänomen“ von $0,\overline{9} = 1$, das aufgrund der zahlreichen Möglichkeiten einer Behandlung im Schulunterricht in diesem Kapitel kurz Erwähnung findet. Bauer (2011: 79) fand mittels Fragebogenerhebung (n=256) heraus, dass ca. 70% der befragten Lernenden die Aussage $0,\overline{9} < 1$ für richtig hielten. Es bieten sich fast über die gesamte Schullaufbahn in der Sekundarstufe Gelegenheiten, diesem Thema Platz im

Unterricht zu widmen, angefangen von der Bruchrechnung in der 6. Schulstufe bis zur Infinitesimalmathematik der Sekundarstufe 2. Die Behandlung der Thematik im Sinne eines exemplarischen Beispiels einer elementaren Grenzwertbetrachtung hält Bauer (2011: 82) zwar für sinnvoll, wird allerdings in der Praxis kaum umgesetzt. Eine Übersicht über weitere mögliche Unterrichtszugänge zum Thema $0,\overline{9} = 1$ in verschiedensten Schulstufen ist in Bauer (2011: 82–85) zu finden.

Weitere Forschungen zu Fehlvorstellungen bei Grenzwertbetrachtungen werden bei Marx (2013: 75–77) überblicksmäßig vorgestellt.

Eine Möglichkeit, den eigenen Unterricht so zu gestalten, dass Verständnisprobleme bei Grenzwertbetrachtungen möglichst vermieden werden können, ist dem Vorschlag von Weigand (2016: 136) Folge zu leisten und vermehrt auf Folgen und diskrete Denkweisen im Analysisunterricht zu bauen. Konkret plädiert er für ein Stufenschema zum Aufbau der zentralen Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff (diese sind in Weigand 2016: 142–145 nachzulesen), das schon in der Sekundarstufe 1 beim Umgang mit Dezimalbrüchen ansetzten und in der Sekundarstufe 2 bei der Thematisierung von harmonischen Reihen, explizit und rekursiv definierten Folgen bis zur Annäherung an die formale Grenzwertdefinition verfeinert werden soll (Weigand 2016: 146–152).

Auch wenn Newton und Leibniz im 17. Jahrhundert auch noch ohne formale Grenzwertdefinition ausgekommen sind (Greefrath et al. 2016: 164), wäre die von Weigand (2016) vorgeschlagene Annäherung an die formale Definition im Unterricht hilfreich, um im Folgenden Schwierigkeiten bei der Unterscheidung von Differenzen- und Differentialquotienten (vgl. vom Hofe 1998: 267) zu vermeiden.

6. Rahmenbedingungen des Forschungsprojekts

Aufbauend auf die bis dato thematisierten Gebiete, wie der historischen Tradition des Analysis-Unterrichts, der Analyse gegenwärtig gängiger Schulbücher und der Entstehung und Diskussion der verschiedenen Aspekte und Grundvorstellungen der Ableitung (Greefrath et al. 2016: 147) werden auf den folgenden Seiten die Ergebnisse zweier Fragebogenerhebungen vorgestellt. Die Hauptziele dieses Forschungsprojekts sind die Beantwortung der beiden Forschungsfragen (siehe Einleitung), also herauszufinden, in welchem Ausmaß die vier Grundvorstellungen zur Ableitung bei der untersuchten

Stichprobe in 7. Klassen AHS ausgeprägt sind und wie gut diese Grundvorstellungen zum Lösen von Typ-1-Aufgaben eingesetzt werden können.

Dafür wurden zwei Online-Fragebögen erstellt: einer für eine Gruppe von Fachdidaktik-Expertinnen und Experten, der andere für Schülerinnen und Schüler von 7. Klassen AHS. An der Fragebogenerhebung der Expertinnen und Experten nahmen vier Personen teil, die Einschätzungsfragen zu verschiedenen Bereichen der Thematik „Grundvorstellungen der Ableitung" beantworteten.

Wesentlich umfangreicher gestaltete sich der Fragebogen für Schülerinnen und Schüler der 7. Klassen AHS, der neben der Erhebung demografischer Daten und Einschätzungsfragen zu Typ-1-Aufgaben auch die Bearbeitung von eben solchen (Format 1 aus 6) zum Thema Ableitung vorsah. Insgesamt nahmen 114 Schülerinnen und Schüler (44 männlich/69 weiblich/1 keine Angabe) aus drei Schulen und sechs Klassen (drei aus Oberösterreich/drei aus Wien) an der Befragung teil.

Betont werden muss in Bezug auf dieses Forschungsprojekt auch, dass die Umfrageergebnisse nicht repräsentativ für eine größere Grundgesamtheit sind, sondern lediglich Aussagen über die gewählte Stichprobe gemacht werden können.

Ähnliche Forschungen wurden in den letzten Jahren bereits von Drösemeier et al. (2018) und Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm und Weigand (2021) durchgeführt, wobei sich die Stichproben bei diesen Untersuchungen nicht aus Lernenden einer AHS Oberstufe, sondern aus Studienanfängerinnen und Studienanfängern der Mathematik zusammensetzten. Insofern werden sich bei der Darlegung der Befragungsergebnisse manchmal Gelegenheiten bieten, Vergleiche zu den oben genannten Forschungsprojekten zu ziehen und mögliche Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu analysieren.

7. Vorstellung der Ergebnisse

In drei Unterkapitel (7.1., 7.2. & 7.3.) werden die Ergebnisse der beiden Befragungen dargelegt.

In Kapitel 7.1. werden einige allgemeine Ergebnisse zur Stichprobe beschrieben. Darauffolgend steht in 7.2. der Ausprägungsgrad der vier Grundvorstellungen bei den

Lernenden im Fokus, wobei auch immer wieder Zusammenhänge zu verschiedenen Merkmalen (Geschlecht, Interesse, etc.) analysiert werden. Abschließend rückt in Kapitel 7.3. die Frage nach einem möglichen Zusammenhang zwischen dem Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen und der Lösungsfähigkeit ins Zentrum der Betrachtungen. Auch an dieser Stelle wird der Einfluss einiger Merkmale auf die Lösungsfähigkeit thematisiert und in Diagrammform dargestellt.

7.1. Allgemeine Ergebnisse

Bevor Ergebnisse zum eigentlichen Forschungsanliegen – nämlich der Ausprägung und Lösungsfähigkeit von Schülerinnen und Schüler in Bezug auf die vier Grundvorstellungen zur Ableitung – dargelegt werden, hat dieses Unterkapitel die Präsentation der demographischen Daten der befragten Lernenden inklusive weiterer allgemeiner Ergebnisse zum Thema.

7.1.1. Demografische Daten

Wie bereits erklärt nahmen 114 Lernende (44 männlich/69 weiblich/1 keine Angabe) von 7. Klassen AHS an der Befragung teil. Das Projekt wurde an einer Schule in Oberösterreich und an drei Schulen in Wien durchgeführt, wobei 52 Lernenden aus Oberösterreich 62 aus Wien gegenüberstehen (vgl. Diagramm 1):

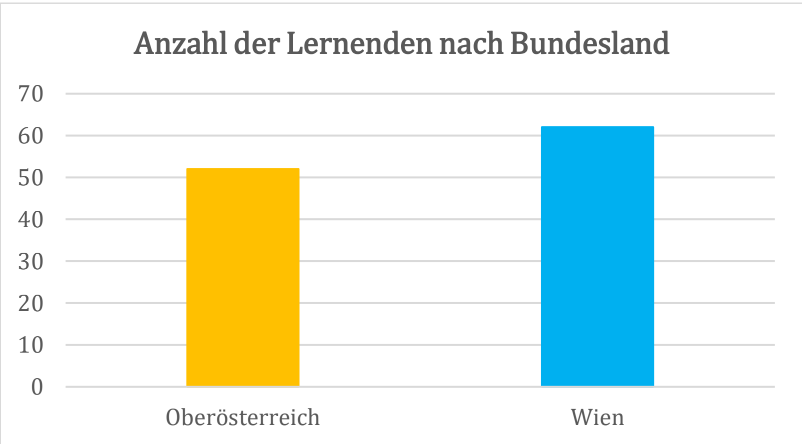


Diagramm 1: Schulstandort der Befragten
Quelle: Eigene Darstellung

Aus beiden Bundesländern wurden je drei Klassen befragt, wobei in beiden Bundesländern Klassen sowohl aus dem Real- als auch aus dem Gymnasium in der Stichprobe enthalten sind. Weil ursprünglich auch eine Befragung an einem Wirtschaftskundlichen Gymnasium geplant war, stand bei der Befragung auch diese

Antwortmöglichkeit zur Auswahl. Fälschlicherweise kreuzte eine Person diese Alternative an, wodurch sie bei dieser Frage aus der Stichprobe genommen wird. Deshalb beträgt die Stichprobengröße bei der Frage nach der Art des Gymnasiums in Diagramm 2 nur N=113 (39 Gymnasium/74 Realgymnasium):

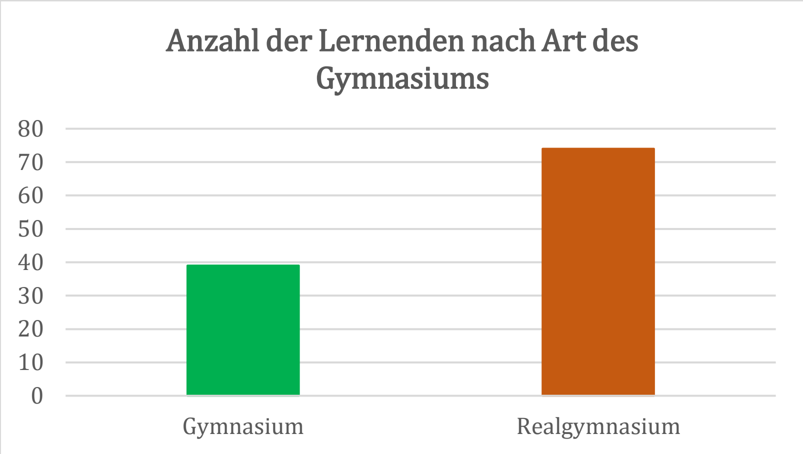


Diagramm 2: Art des Gymnasiums der Befragten
Quelle: Eigene Darstellung

7.1.2. Noten im Fach Mathematik und Interesse am Thema Differentialrechnung

Weiters wurden die Schülerinnen und Schüler nach ihrer durchschnittlichen Mathematiknote der letzten beiden Schuljahre befragt. In Diagramm 3 ist die Notenverteilung zu sehen, wobei es verwirrend erscheinen mag, dass vier Schülerinnen und Schüler dabei „Nicht Genügend“ angekreuzt haben. Durch die neue Oberstufe (NOST) ist allerdings das Aufsteigen mit einem „Nicht Genügend“ einfacher geworden[7], sodass die vier „Nicht Genügend“ in der Stichprobe durchaus plausibel erscheinen:

[7] Für detaillierte Informationen zur NOST siehe:
https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/zrp/nost/nost_eckpunkte.html (abgerufen am 27.08.2021)

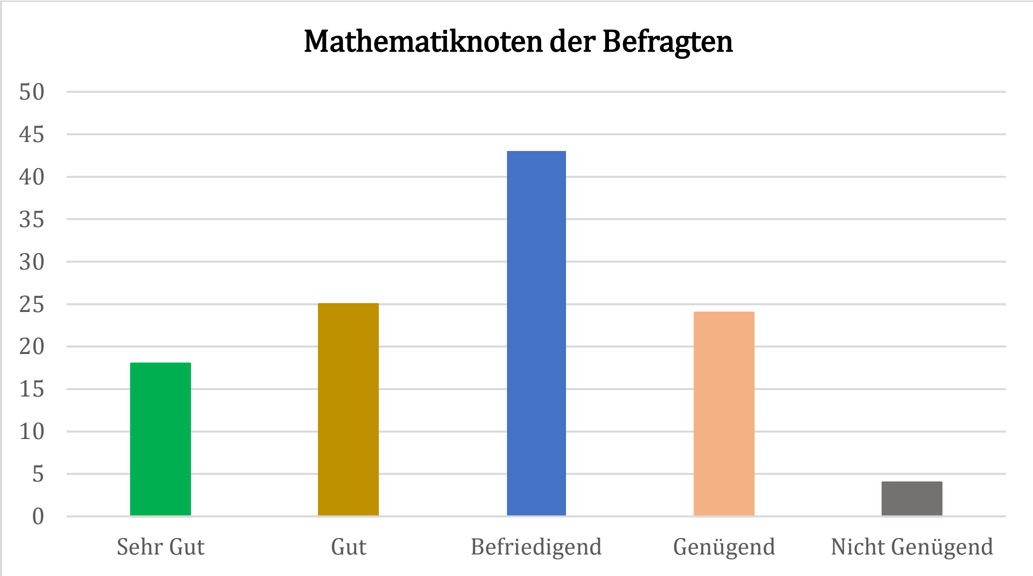


Diagramm 3: Durchschnittliche Mathematiknote der Befragten in den letzten beiden Jahren
Quelle: Eigene Darstellung

Zum Abschluss dieses Unterkapitels wird noch die Interessenslage der befragten Lernenden bezüglich des Themas „Differentialrechnung“ in den Blick genommen. Anzukreuzen war dabei, wie interessant die Schülerinnen und Schüler das Thema „Differentialrechnung“ im Vergleich zum restlichen Lernstoff finden. Die Ergebnisse sind in Diagramm 4 dargestellt:

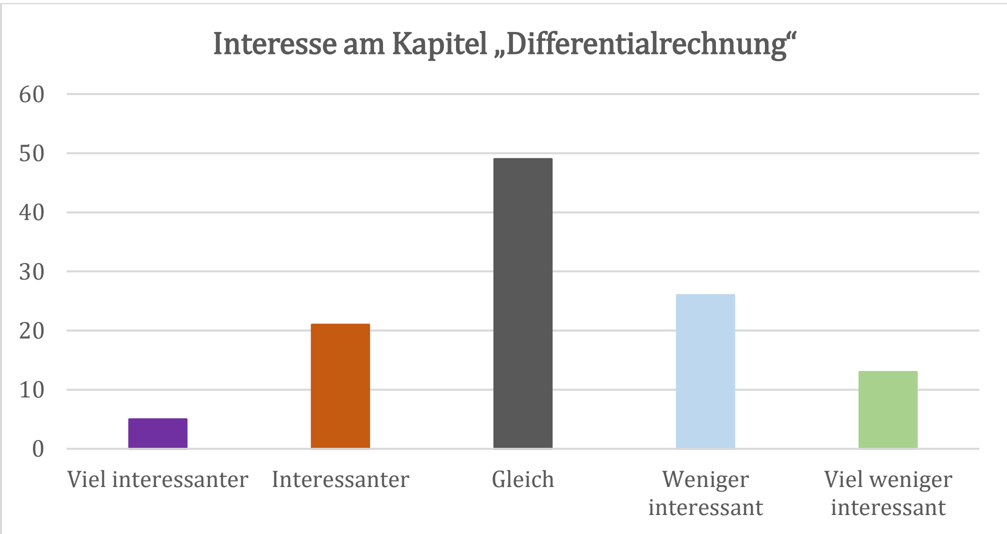


Diagramm 4: Interesse am Thema „Differentialrechnung" im Vergleich zum restlichen Lernstoff
Quelle: Eigene Darstellung

Der Großteil der Befragten findet das Thema gleich interessant wie die restlichen Themen – tendenziell wird das Thema als eher weniger interessant eingestuft.

Die bis dato vorgestellten Ergebnisse werden im weiteren Verlauf von Kapitel 7 noch von großem Interesse sein, wenn diese beispielsweise in Zusammenhang mit Lösungshäufigkeiten oder Ausprägungen von Grundvorstellungen gebracht werden.

7.2. Grundvorstellungen bei Lernenden zum Ableitungsbegriff

In Unterkapitel 7.2. wird geklärt, in welchem Ausmaß die vier Grundvorstellungen der Ableitung bei den Lernenden ausgeprägt sind. Dazu mussten die Befragten keine Aufgaben lösen, sondern mathematische Situationen einschätzen. Insgesamt wurden die Schülerinnen und Schüler mit drei solchen Situationen konfrontiert, wobei jeweils vier passende, den vier Grundvorstellungen entsprechenden Aussagen vorgegeben waren. Die Aufgabe der Probandinnen und Probanden bestand nun darin, auf einer fünfstufigen Skala einzuschätzen, wie sehr die jeweiligen Aussagen ihrer Denkweise entsprechen, wobei 1 die niedrigste und 5 die höchste Zustimmung bedeutete. In Kapitel 7.2.1. werden die drei mathematischen Situationen inklusive der vier Interpretationsmöglichkeiten vorgestellt. Dabei ist zu beachten, dass die Reihenfolge der Grundvorstellungen, die von den jeweiligen vier Interpretationsmöglichkeiten im Anschluss an die Aufgabenstellung angesprochen werden, bei allen drei mathematischen Situationen folgende ist:

1. Lokale Änderungsrate (LÄ)
2. Tangentensteigung (TS)
3. Lokale Linearität (LL)
4. Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen (VF)

Nach jeder Einschätzungsfrage wird das Ergebnis vorgestellt, bevor zum Abschluss ein Durchschnittsergebnis präsentiert und mit bereits durchgeführten Forschungsprojekten verglichen wird.

In den weiteren Unterkapiteln von 7.2. wird ein Zusammenhang zwischen diesen Ergebnissen und Merkmalen wie Noten, Geschlecht, Art des Gymnasiums und Interesse zum Thema „Differentialrechnung“ hergestellt.

7.2.1. Vorstellung der Einschätzungsaufgaben und Ergebnisse

In Abbildung 22 ist die erste der drei Einschätzungsfragen inklusive der vier Interpretationsmöglichkeiten der dargelegten Situation nachzulesen:

Aufgabe 1

Sei f eine differenzierbare Funktion mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$ (a $\in \mathbb{R}$) und t die Tangente von f an der Stelle x_0.

Jede der folgenden Aussagen ist richtig. Schätze ein, wie sehr diese deiner Denkweise entsprechen, wobei 1 „entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise“ und 5 „entspricht genau meiner Denkweise“ bedeutet!

1. Die Steigung des Graphen von f im Punkt $(x_0|f(x_0))$ beträgt a.
2. Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0|f(x_0))$ hat dieselbe Steigung wie der Graph von f in diesem Punkt, nämlich a.
3. Beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung des Punktes $(x_0|f(x_0))$ ist zwischen t und dem Graphen von f kein Unterschied mehr erkennbar.
4. Je größer a ist, umso stärker/schneller ändern sich die Funktionswerte von f in der Nähe von x_0.

Abbildung 22: Einschätzungsfrage 1
Quelle: Eigene Darstellung

Diagramm 5 stellt das arithmetische Mittel des Ausprägungsgrads der vier Grundvorstellungen aller 114 Befragten dar, wobei wie bereits erwähnt 1 die niedrigste und 5 die höchste Ausprägung der jeweiligen Grundvorstellung bedeutet:

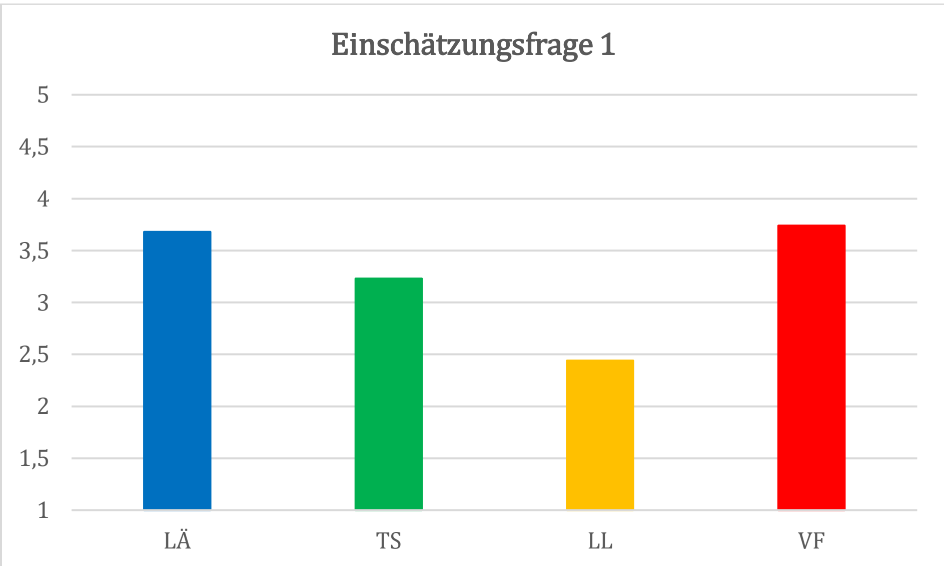


Diagramm 5: Ausprägungen der Grundvorstellungen bei Einschätzungsfrage 1
Quelle: Eigene Darstellung

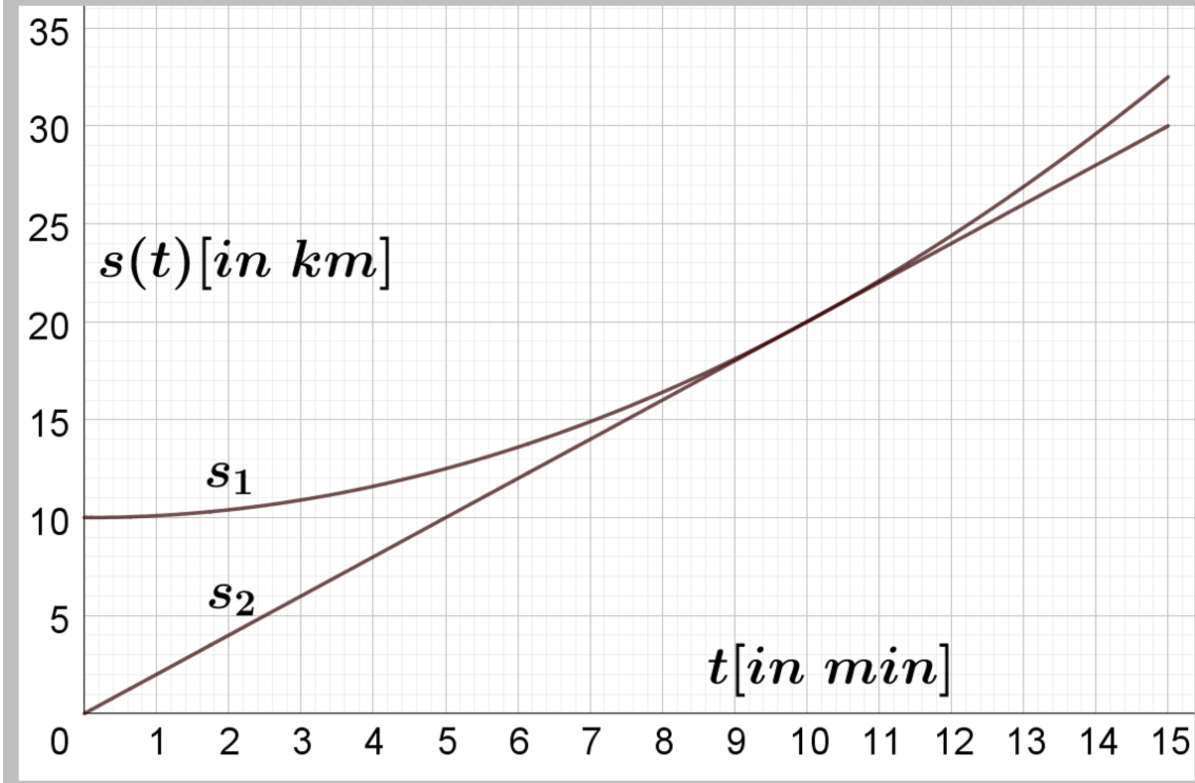
Die beiden bei dieser Frage am stärksten ausgeprägten Grundvorstellungen sind die lokale Änderungsrate (LÄ=3,68) und der Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen

(VF=3,74), wohingegen die Grundvorstellungen der Tangentensteigung (TS=3,23) und der lokalen Linearität (LL=2,44) klar schwächer ausgeprägt sind.

Einschätzungsfrage 2 behandelt den zurückgelegten Weg nach der Zeit t zweier Autos, der durch Funktionsgleichungen angegeben ist. Wieder sind vier verschiedene Deutungsmöglichkeiten dieser Situation angegeben (vgl. Abbildung 23), wobei die Lernenden wieder auf einer Skala von 1 bis 5 einschätzten, wie sehr die jeweilige Aussage ihrer Denkweise entspricht:

Aufgabe 2

In folgender Abbildung sind die Graphen zweier Funktionen s_1 und s_2 im Intervall $[0; 15]$ dargestellt, die den zurückgelegten Weg zweier Autos beschreiben (t in Minuten, $s(t)$ in Kilometer).
Es gilt $s_1(10) = s_2(10)$ und $s_1(t) > s_2(t)$ für $t \in [0; 10) \cup (10; 15]$. Auto 1 hat zum Zeitpunkt $t = 0$ zehn Kilometer Vorsprung auf Auto 2.



Jede der folgenden Aussagen ist richtig. Schätze ein, wie sehr diese deiner Denkweise entsprechen, wobei 1 „entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise" und 5 „entspricht genau meiner Denkweise" bedeutet!

1. Die beiden Autos haben zum Zeitpunkt $t = 10$ die gleiche Geschwindigkeit.
2. Zum Zeitpunkt $t = 10$ ist die Geschwindigkeit von Auto 1 gleich groß wie die Geschwindigkeit von Auto 2 im gesamten Intervall $[0; 15]$.
3. In einer kleinen Umgebung von $t = 10$ bewegen sich beide Autos mit annähernd gleicher Geschwindigkeit.
4. Je größer die Geschwindigkeit von Auto 1, umso stärker/schneller ändern sich die Funktionswerte von s_1.

Abbildung 23: Einschätzungsfrage 2
Quelle: Eigene Darstellung

Die Ergebnisse zu dieser Frage sind in Diagramm 6 dargestellt:

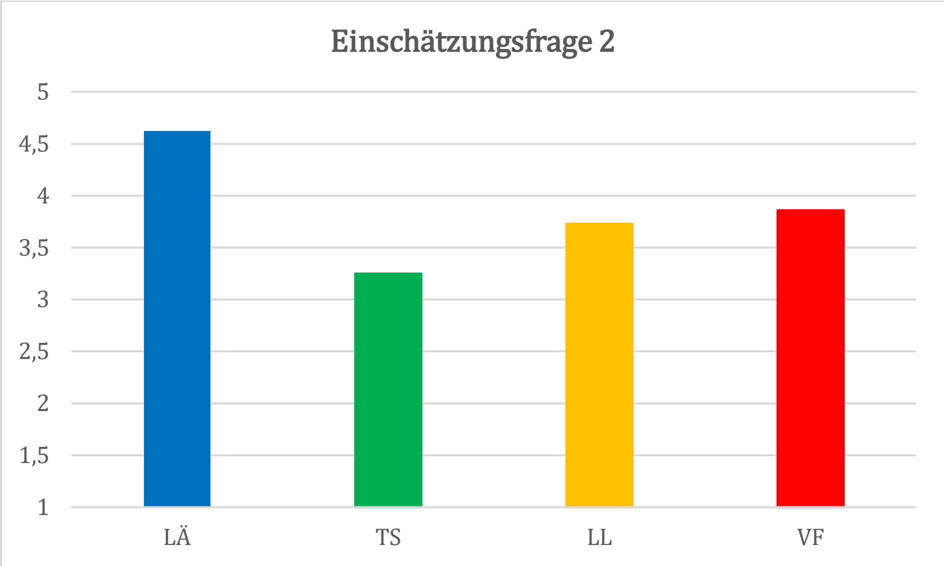


Diagramm 6: Ausprägungen der Grundvorstellungen bei Einschätzungsfrage 2
Quelle: Eigene Darstellung

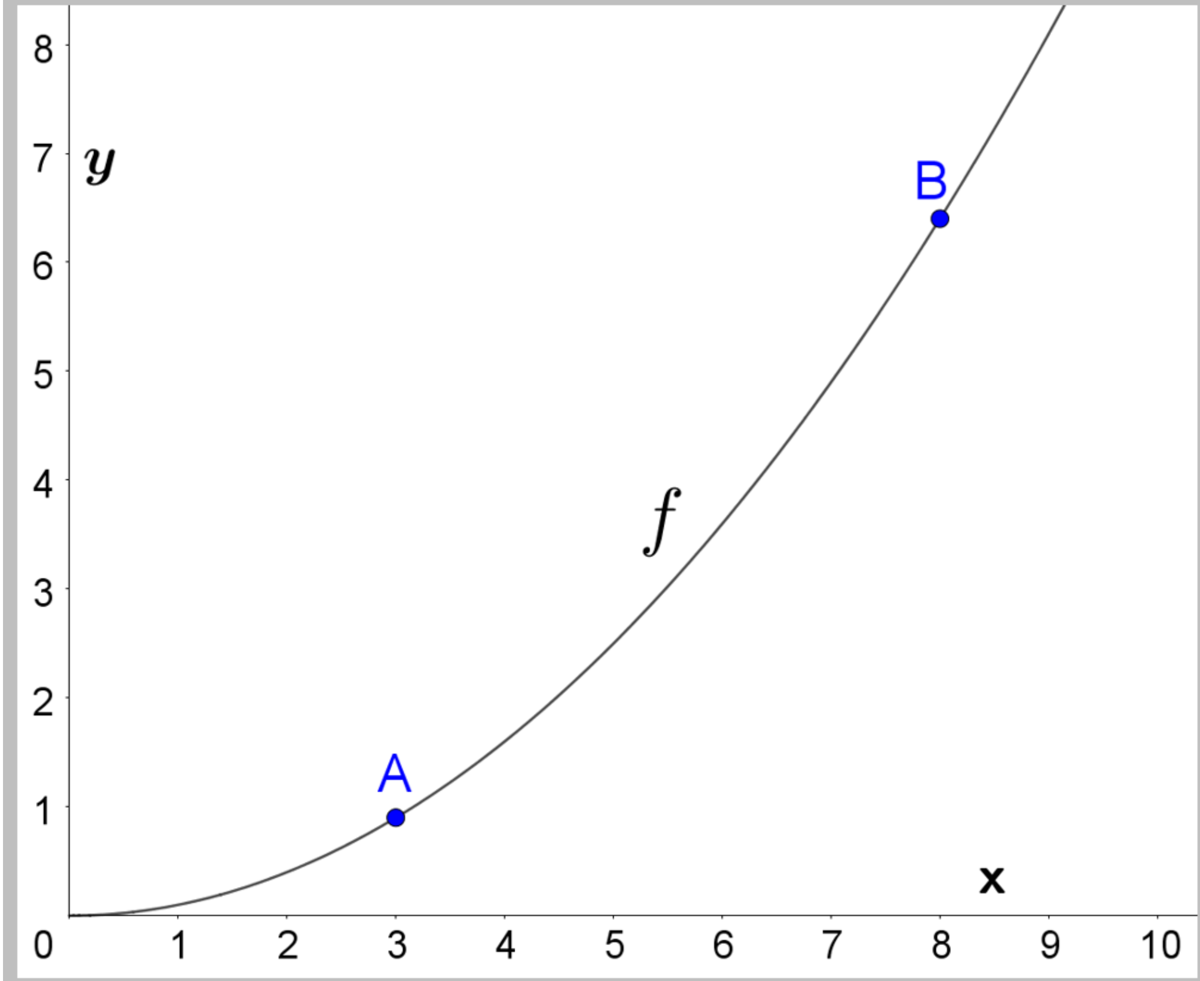
Die lokale Änderungsrate ist mit einem Wert von 4,62 auffallend stark bei den befragten Lernenden ausgeprägt. Ein Grund dafür ist wahrscheinlich, dass in Schulbüchern (vgl. Kapitel 4) und im Unterricht die Ableitung oft über die Momentangeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt eingeführt und in weiterer Folge in Anwendungsaufgaben mit vorgegebener Wegfunktion geübt wird. Die Grundvorstellungen der lokalen Linearität und des Verstärkungsfaktors sind annähernd gleich stark ausgeprägt (LL=3,73, VF=3,86), wohingegen die Grundvorstellung der Tangentensteigung die geringste Ausprägung (TS=3,25) vorweist.

Die dritte und letzte Einschätzungsfrage zur Ermittlung der Ausprägungen der Grundvorstellungen wurde inhaltlich von Greefrath et al. (2021) übernommen[8], wobei der Grafik eine andere Funktionsgleichung für f zugrunde liegt (vgl. Abbildung 24):

[8] In Greefrath et al. (2021) ist diese Aufgabe Beispiel Nr. 6

Aufgabe 3

Gegeben sind der Graph einer Funktion f und die Punkte A und B.



Es kann unterschiedlich erklärt werden, dass der Wert der ersten Ableitung im Punkt A kleiner ist als im Punkt B.

Jede der folgenden Aussagen ist richtig. Schätze ein, wie sehr diese deiner Denkweise entsprechen, wobei 1 „entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise“ und 5 „entspricht genau meiner Denkweise“ bedeutet!

1. Wenn der Graph die Abhängigkeit einer Größe von der Zeit darstellt, ändert sich diese Größe bei B schneller als bei A.
2. Die Tangente im Punkt B hat eine größere Steigung als die Tangente im Punkt A.
3. Wenn man an die Punkte A bzw. B heranzoomt, erscheint der Graph jeweils lokal wie eine Gerade. Beim Punkt B hat diese Gerade eine größere Steigung als im Punkt A.
4. Für jeden Punkt bewirken kleine Änderungen Δx ungefähr proportionale Änderungen $\Delta y \approx m \cdot \Delta x$. Dieser Proportionalitätsfaktor m ist für B größer als für A.

Abbildung 24: Einschätzungsfrage 3
Quelle: Eigene Darstellung

Diagramm 7 bildet die Ergebnisse zu dieser letzten Einschätzungsfrage ab:

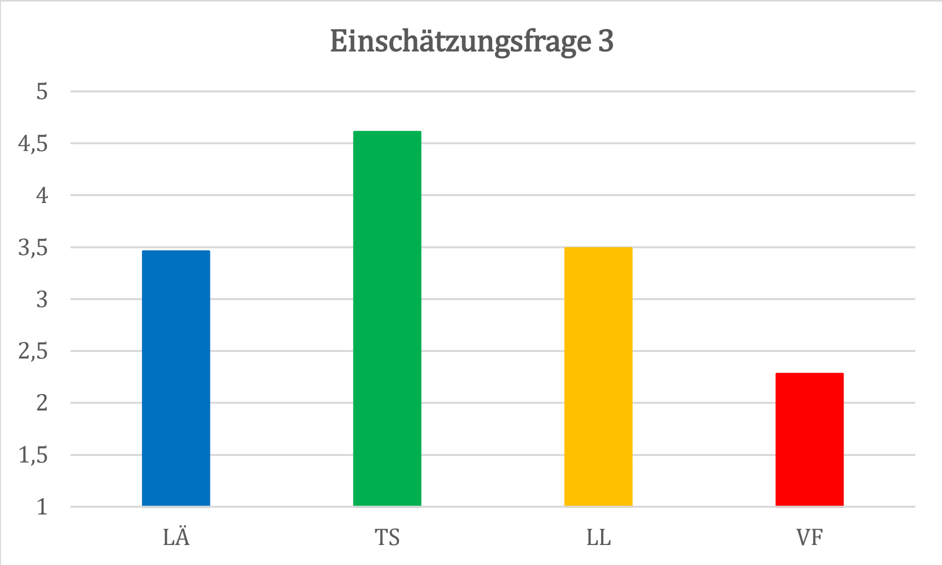


Diagramm 7: Ausprägungen der Grundvorstellungen bei Einschätzungsfrage 3
Quelle: Eigene Darstellung

Verglichen mit den Ergebnissen der vorigen beiden Fragen ist die Grundvorstellung der Tangentensteigung (TS=4,61) sehr stark ausgeprägt. Die Grundvorstellungen der lokalen Änderungsrate (LÄ=3,46) und der lokalen Linearität (LL=3,49) wurden bei Einschätzungsfrage 3 deutlich schwächer angesprochen. Die Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors kleiner Änderungen (VF=2,28) ist verglichen mit den vorigen beiden Aufgaben sehr viel schwächer ausgeprägt.

In Diagramm 8 sind die Mittelwerte der Ergebnisse der bisherigen drei Aufgaben dargestellt:

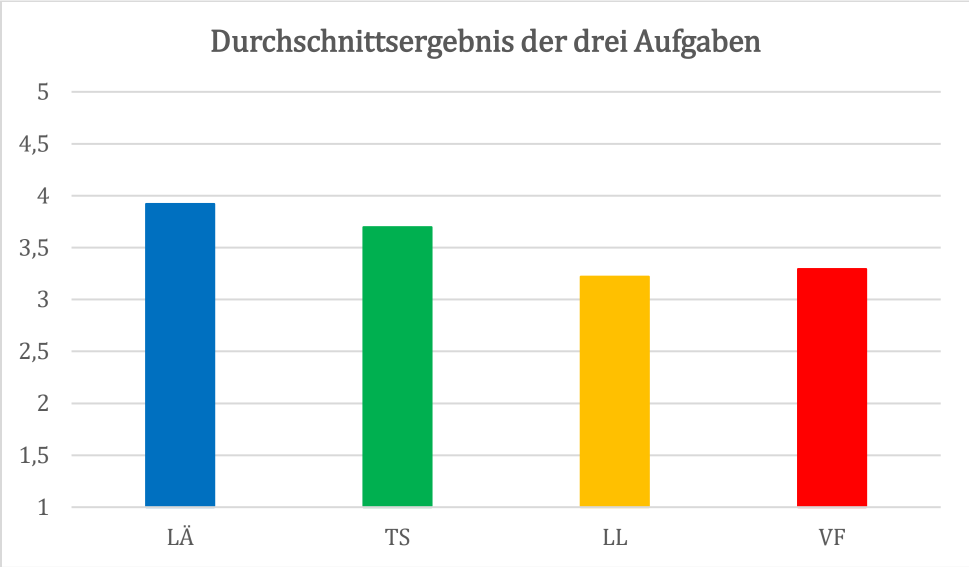


Diagramm 8: Durchschnittliche Ausprägung der Grundvorstellungen
Quelle: Eigene Darstellung

Bevor diese Ergebnisse analysiert und verglichen werden, sind in Tabelle 1 noch die exakten Ergebnisse inklusive Standardabweichung aller vier Grundvorstellungen enthalten:

	LÄ	TS	LL	VF
Mittelwerte	3,92	3,70	3,22	3,29
Standardabweichung	0,50	0,65	0,56	0,72

Tabelle 1: Mittelwerte und Standardabweichungen der Grundvorstellungen

Passend zur Aussage von Oldenburg (2016: 56), dass die Vorstellungen der lokalen Änderungsrate und der Tangentensteigung hauptsächlich im Unterricht gefördert werden, sind diese beiden Grundvorstellungen am stärksten ausgeprägt. Ein ähnliches Bild zeigt sich auch bei den Forschungsergebnissen bei Greefrath et al. (2019), auch wenn dort die Tangentensteigung als dominierende Grundvorstellung auftrat, während die Vorstellung des Verstärkungsfaktors deutlich am schwächsten ausgeprägt war. Bei den Ergebnissen von Drösemeier et al. (2018: 1837) ist ebenfalls die Tangentensteigung die stärkste und der Verstärkungsfaktor die am schwächsten ausgeprägte Grundvorstellung. Ein Unterschied zu Greefrath et al. (2019) besteht darin, dass bei der Untersuchung von Drösemeier et al. (2018: 1837) die Grundvorstellung der lokalen Linearität besser ausgeprägt war als jene der lokalen Änderungsrate.

Auffällig im Vergleich zu den beiden eben zitierten Projekten ist, dass bei den Ergebnissen der in dieser Arbeit vorgestellten Studie die Grundvorstellung der Tangentensteigung vergleichsweise schwach und jene des Verstärkungsfaktors stark ausgeprägt sind. Erklären lässt sich das u.a. damit, dass wegen einer drohenden Ausuferung der Befragungsdauer nur drei Einschätzungsfragen gestellt wurden, wohingegen bei Greefrath et al. (2019) die Befragten 13 Fragen zu beantworten hatten. Dadurch ergibt sich eine geringere Verlässlichkeit der Daten, weil einzelne Fragen dadurch sehr viel Gewicht bekommen. So sind auch die relativ hohen Werte der Standardabweichung bei der Tangentensteigung und des Verstärkungsfaktors dadurch erklärbar, dass Aussagen bei verschiedenen Fragen, die aber die gleiche Grundvorstellung ansprechen, einen unterschiedlichen Komplexitätsgrad aufweisen. Ein Beispiel dafür ist die Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors, bei dem die Aussagen bei den ersten beiden Fragen (vgl. Abb. 22 & 23) intuitiv wohl klarer sind als die Interpretationsmöglichkeit in Frage drei (vgl. Abb. 24).[9]

Vor dem Hintergrund einer intensiveren Beschäftigung mit der lokalen Änderungsrate und Tangentensteigung im Unterricht und in Schulbüchern erscheinen die Ergebnisse allerdings durchaus plausibel und geben einen guten Eindruck über den Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen in der betrachteten Stichprobe.

7.2.2. Grundvorstellungen bei der schriftlichen Reifeprüfung

Die vier befragten Fachdidaktik - Expertinnen und Experten wurden nach ihren Einschätzungen gefragt, wie sehr die jeweiligen Grundvorstellungen bei Lernenden ausgeprägt sein müssen, um Aufgaben dieses Stoffgebiets bei der schriftlichen Reifeprüfung richtig lösen zu können. Dabei bedeutet 1 „muss gar nicht stark ausgeprägt sein“ und 5 „muss sehr stark ausgeprägt sein“. Die Ergebnisse dieser Frage sind in Diagramm 9 dargestellt:

[9] Die Standardabweichungen bei Greefrath et al. (2019) sind allerdings tendenziell noch höher.

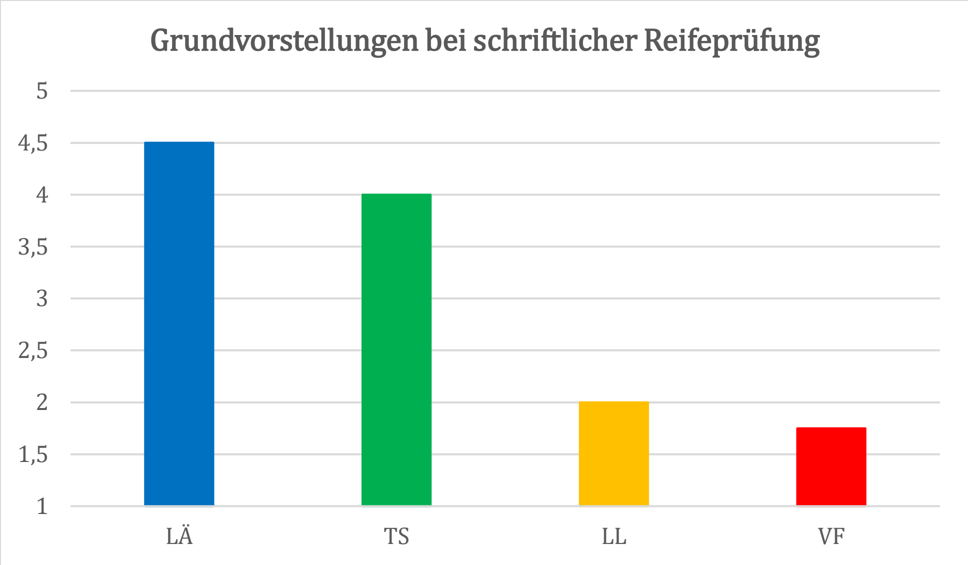


Diagramm 9: Benötigte Grundvorstellungen für die schriftliche Reifeprüfung
Quelle: Eigene Darstellung

Es zeigt sich deutlich, dass die Grundvorstellungen der lokalen Änderungsrate und der Tangentensteigung als viel wichtiger in Bezug auf die schriftliche Reifeprüfung eingestuft werden als die anderen beiden. Setzt man dieses Ergebnis mit jenem aus Diagramm 8 in Beziehung, wird deutlich, dass die Ausprägungen der Grundvorstellungen bei den befragten Lernenden sehr gut zu den Anforderungen der schriftlichen Reifeprüfung passen (Korrelationskoeffizient $r \approx 0{,}98$).

7.2.3. Zusammenhang zwischen Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen und Noten

Für die folgenden kurzen Unterkapitel wurde berechnet, wie stark die vier Grundvorstellungen bei den einzelnen Schülerinnen und Schülern durchschnittlich ausgeprägt sind.[10] Dadurch können die Ergebnisse in Beziehung zu anderen Merkmalen gesetzt werden, wodurch Aussagen zum Einfluss dieser Merkmale auf die Stärke des Ausprägungsgrads der Grundvorstellungen gemacht werden können.

Aus Diagramm 10 ist abzulesen, in welchem Ausmaß die vier Grundvorstellungen bei den Befragten je nach durchschnittlicher Mathematiknote der letzten beiden Jahre ausgeprägt sind:

[10] Dabei wurde für alle Lernenden bei jeder Grundvorstellung jeweils der Mittelwert der Ergebnisse der drei Einschätzungsfragen berechnet.

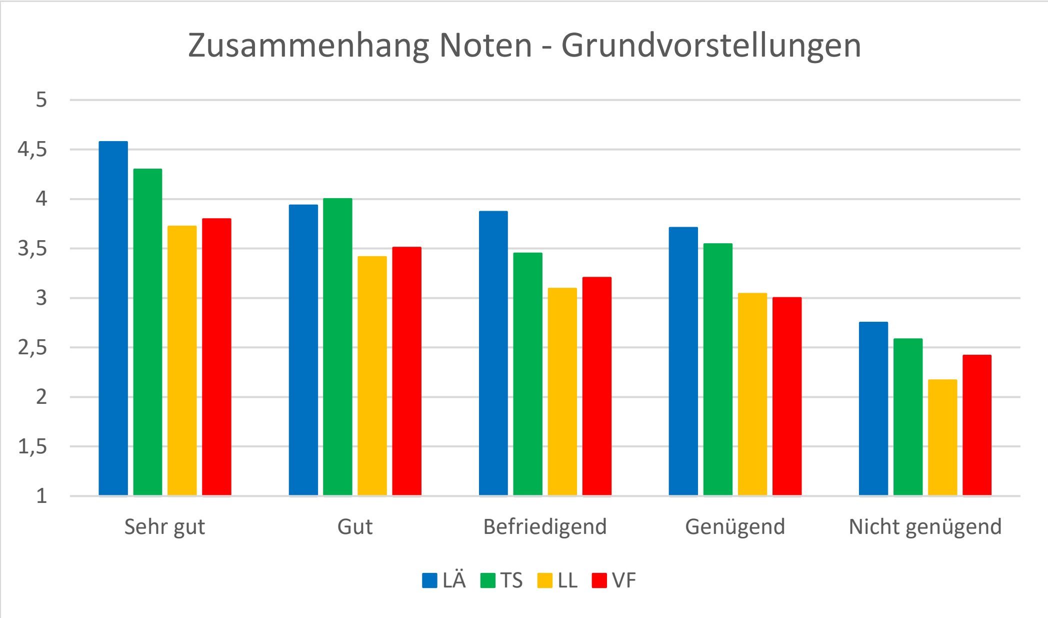


Diagramm 10: Grad der Ausprägung der vier Grundvorstellungen nach Mathematiknoten
Quelle: Eigene Darstellung

Diagramm 10 ist die wenig überraschende Erkenntnis zu entnehmen, dass die Grundvorstellungen umso besser ausgeprägt sind, je besser die Mathematiknote ist. Diese Aussage gilt für alle vier Grundvorstellungen, wobei die einzige kleine Ausnahme die Tangentensteigung bildet: Bei Lernenden mit einem „Genügend" in Mathematik ist die Grundvorstellung der Tangentensteigung minimal besser ausgeprägt als bei Lernenden mit einem „Befriedigend".

7.2.4. Zusammenhang zwischen Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen und Geschlecht

Nun wird untersucht, ob sich Unterschiede bei der Ausprägung der Grundvorstellungen bezüglich des Geschlechts ermitteln lassen. Zu erwähnen ist dabei, dass die Person, die bei der Frage nach dem Geschlecht „keine Angabe" angekreuzt hat, aufgrund nicht gegebener Aussagekraft und zu Gunsten einer besseren Übersichtlichkeit von Diagramm 11 in diesem Unterkapitel nicht in der Stichprobe enthalten ist:

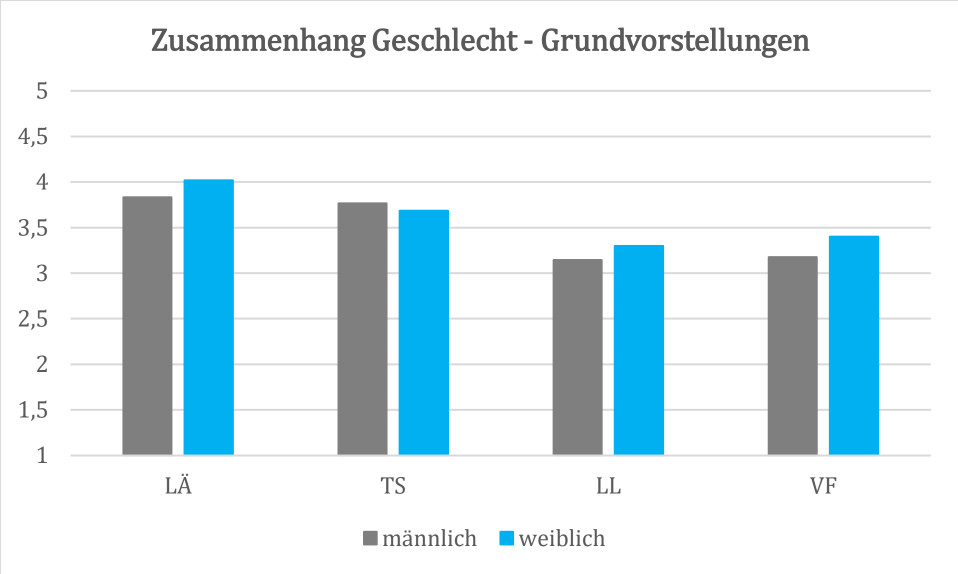


Diagramm 11: Grad der Ausprägung der vier Grundvorstellungen nach Geschlecht
Quelle: Eigene Darstellung

Drei der vier Grundvorstellungen sind bei den weiblichen Befragten besser ausgeprägt, einzig bei der Grundvorstellung der Tangentensteigung haben die männlichen Lernenden einen leicht höheren Wert erreicht. Als Erklärung für das bessere Abschneiden der weiblichen Befragten muss dazu gesagt werden, dass die durchschnittliche Mathematiknote bei den befragten Schülerinnen (≈2,58) deutlich besser als bei den befragten Schülern (≈2,98) ist.

7.2.5. Zusammenhang zwischen Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen und Art des Gymnasiums

Die Befragung fand an Klassen in Realgymnasien und Gymnasien statt. Vor dem Hintergrund, dass an Klassen in Realgymnasien üblicherweise ein bis zwei Wochenstunden mehr Mathematik über die gesamte Oberstufe verteilt unterrichtet werden, wird überprüft, ob es Unterschiede bei den beiden Schularten in Bezug auf die Ausprägung der Grundvorstellungen gibt. Die Ergebnisse sind in Diagramm 12 dargestellt:

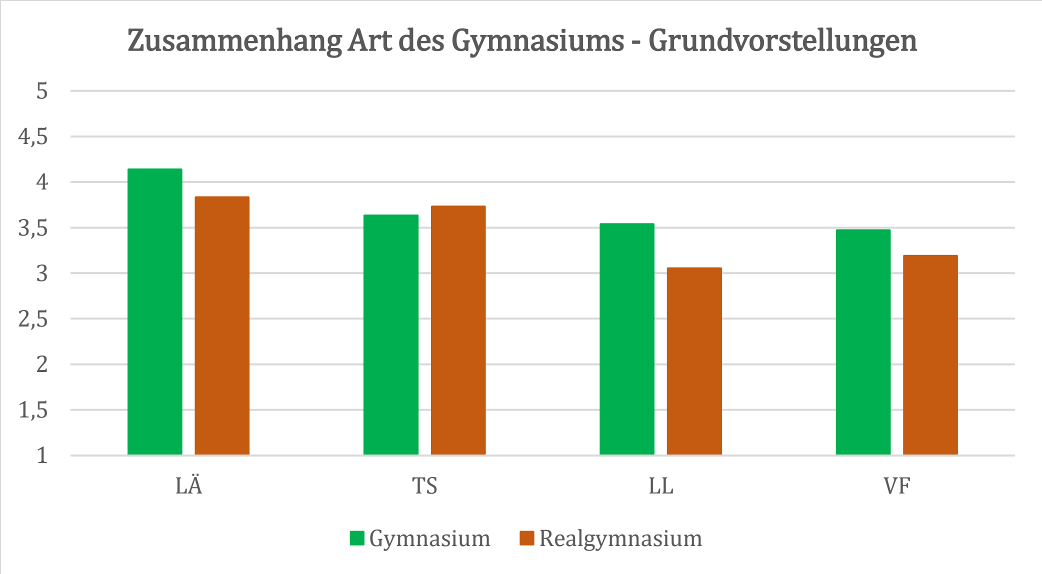


Diagramm 12: Grad der Ausprägung der vier Grundvorstellungen nach Art des Gymnasiums
Quelle: Eigene Darstellung

Es ist festzustellen, dass mit Ausnahme der Grundvorstellung der Tangentensteigung die Lernenden aus dem Gymnasium besser ausgeprägte Grundvorstellungen haben als Schülerinnen und Schüler des Realgymnasiums. Einerseits mag das aufgrund des naturwissenschaftlichen Schwerpunkts im Realgymnasium verwundern, andererseits ist dieses Ergebnis eng an die Geschlechterverteilung gekoppelt: Wie bereits erläutert, weisen in dieser Stichprobe die Schülerinnen durchschnittlich eine deutlich bessere Mathematiknote und auch stärker ausgeprägte Grundvorstellungen auf als die Schüler. Da der Anteil weiblicher Lernender im Gymnasium (≈71%) deutlich höher als im Realgymnasium (≈56,7%) ist, lassen sich die Ergebnisse aus Diagramm 12 wohl auch auf die unterschiedlichen Geschlechterverteilungen in den beiden Gymnasiumarten zurückführen. Auch die zusätzlichen Wochenstunden in Mathematik in der Oberstufe im Realgymnasium machen bei dieser sehr spezifischen Thematik wohl keinen Unterschied, weil es üblich ist, dass in 7. Klassen sowohl im Gymnasium als auch im Realgymnasium drei Wochenstunden Mathematik unterrichtet werden.

7.2.6. Zusammenhang zwischen Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen und Interesse

Zum Abschluss dieses Unterkapitels wird noch der Einfluss des Interesses der Lernenden für das Thema „Differentialrechnung" im Vergleich zum restlichen Lernstoff im Fach Mathematik auf den Grad der Ausprägung der Grundvorstellungen untersucht. Diagramm 13 gibt eine Übersicht über die dabei erzielten Ergebnisse:

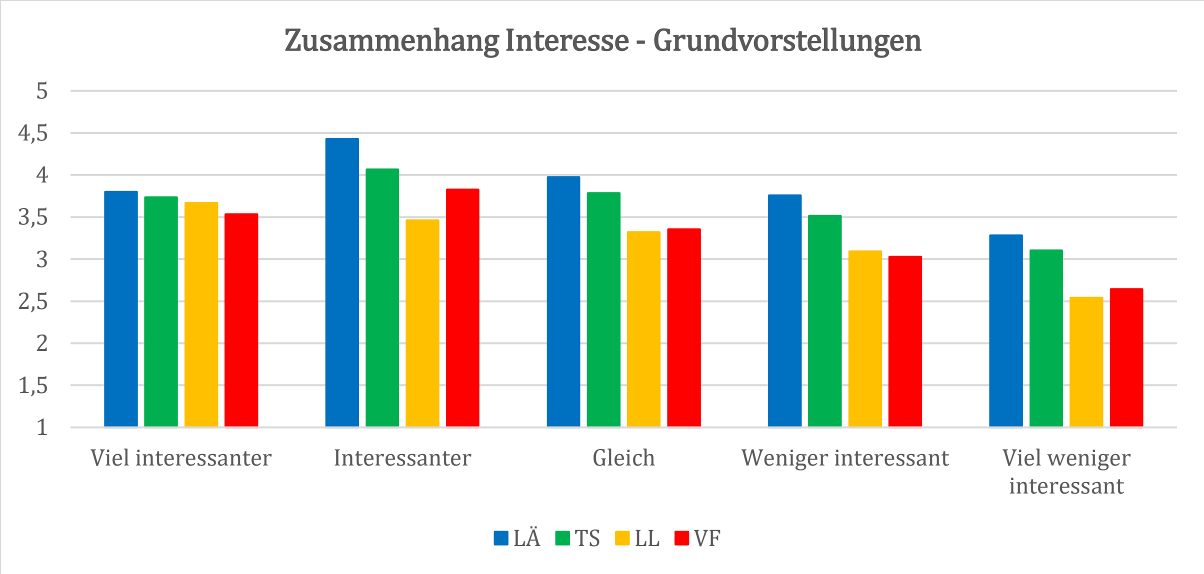


Diagramm 13: Grad der Ausprägung der vier Grundvorstellungen nach Interesse für das Thema „Differentialrechnung" im Vergleich zu anderen Kapiteln in Mathematik
Quelle: Eigene Darstellung

Auffallend bei der Analyse von Diagramm 13 ist, dass die Grundvorstellungen jener Lernenden, die „Viel interessanter“ angekreuzt haben, zum Großteil schwächer ausgeprägt sind als bei den Lernenden die „Interessanter“ bzw. „Gleich“ angekreuzt haben. Der Grund für dieses nicht naheliegende Ergebnis liegt u.a. darin, dass lediglich fünf Schülerinnen und Schüler „Viel interessanter“ angekreuzt haben, sodass einzelne „Ausreißer“ die Mittelwerte stark beeinflussen können. Dadurch ist dieses Ergebnis nicht aussagekräftig und lässt nicht zu, eine allgemeinere Gültigkeit zu vermuten.

Abgesehen davon legen die Ergebnisse sehr wohl nahe, dass Lernende, die größeres Interesse am Thema „Differentialrechnung“ haben, tendenziell auch stärker ausgeprägte Grundvorstellungen ausbilden.

7.3. Vier Typ-1-Aufgaben im Check

Nachdem in Kapitel 7.2. der Fokus auf den Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen gelegt wurde, werden in diesem Unterkapitel die Lösungsfähigkeiten der Lernenden in Bezug auf die vier Grundvorstellungen im Zentrum der Betrachtung stehen. Dafür wurden den Befragten vier Typ-1-Aufgaben (Format 1 aus 6) gestellt, die aufgrund der Einschätzungen der Expertinnen und Experten jeweils einer Grundvorstellung zugeordnet werden können, auch wenn eine Aufgabe meist nicht nur eine Grundvorstellung anspricht. In den ersten Unterkapiteln von 7.3. werden jeweils die Aufgaben, die Lösungshäufigkeiten und kurze Interpretationen dargelegt, worauf in

Kapitel 7.3.5. eine detailliertere Analyse stattfindet, die auch die Ausprägungsgrade der Grundvorstellungen aus Kapitel 7.2. miteinbezieht. Danach wird untersucht, wie stark die Grundvorstellungen bei jenen Lernenden ausgeprägt sind, die eine Aufgabe richtig bzw. falsch beantwortet haben. Dadurch kann analysiert werden, ob besser ausgeprägte Grundvorstellungen auch zu einer höheren Lösungshäufigkeit bei Typ-1-Aufgaben führen. Zum Abschluss werden die Zusammenhänge zwischen einigen Merkmalen und den Lösungshäufigkeiten analysiert, wodurch für die vorliegende Stichprobe der Einfluss dieser Merkmale auf die Lösungsfähigkeit diskutiert werden kann.

7.3.1. Typ-1-Aufgabe Nr. 1

In Abbildung 25 ist die erste der vier Typ-1-Aufgaben, die die Lernenden im Fragebogen zu bearbeiten hatten, inklusive der sechs Antwortmöglichkeiten A1-A6, zu sehen. Bei allen folgenden Aufgaben ist die erste Antwortmöglichkeit die richtige, bei der Befragung der Schülerinnen und Schüler wurde die Reihenfolge der Antwortmöglichkeiten zufällig gewählt:

Typ-1-Aufgabe Nr. 1

Die Funktion f beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf der Einwohner*innenzahl einer Kleinstadt im Zeitraum von 1980-2021, wobei $t = 0$ den 1. Jänner 1980 markiert (t in Jahre, $f(t)$ in 100 Einwohner). Es ist bekannt, dass $f'(14{,}5) = 8$ gilt. Kreuze die richtige Aussage an!

A1. Mitte des Jahres 1994 beträgt das momentane Bevölkerungswachstum 800 Menschen pro Jahr.

A2. Das durchschnittliche Bevölkerungswachstum im Zeitraum 1980-2021 beträgt 800 Menschen pro Jahr.

A3. Im Jahr 1994 beträgt das Bevölkerungswachstum 800 Menschen.

A4. Ab Mitte des Jahres 1994 beträgt das Bevölkerungswachstum 800 Menschen pro Jahr.

A5. Mitte des Jahres 1994 beträgt das Bevölkerungswachstum 8 Menschen pro Jahr.

A6. In der zweiten Hälfte des Jahres 1994 war das Bevölkerungswachstum größer als in der ersten Hälfte dieses Jahres.

Abbildung 25: Typ-1-Aufgabe Nr. 1 (Format 1 aus 6)
Quelle: Eigene Darstellung

Damit im weiteren Verlauf die Ergebnisse dieser Frage in Beziehung zu den Grundvorstellungen gesetzt werden können, wurden die Expertinnen und Experten nach ihren Einschätzungen gefragt, wie sehr die jeweiligen Grundvorstellungen für das Lösen der Aufgabe benötigt werden. In Tabelle 2 sind die Ergebnisse dargestellt, wobei 1 „wird überhaupt nicht benötigt" und 5 „wird sehr stark benötigt" bedeutet:

Lokale Änderungsrate (LÄ)	4
Tangentensteigung (TS)	1
Lokale Linearität (LL)	1
Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen (VF)	1

Tabelle 2: Wichtigkeit der Grundvorstellungen bei Typ-1-Aufgabe Nr. 1

Die lokale Änderungsrate ist also bei dieser Frage laut Expertinnen- und Expertenmeinung die einzige Grundvorstellung, die für das richtige Lösen der Aufgabe benötigt wird. Deswegen wird bei der weiteren Analyse diese Frage als jene aufgefasst, die auf die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate abzielt.

Dadurch, dass die lokale Änderungsrate die am besten ausgeprägte Grundvorstellung ist (vgl. Diagramm 8 bzw. Tabelle 1), sollte diese Aufgabe den Lernenden eigentlich besonders gut liegen. Eine Bewertung, ob die Ergebnisse aus Diagramm 14, in dem das Antwortverhalten der Lernenden bei dieser Aufgabe dargestellt ist, diese These stützen, erfolgt erst in Kapitel 7.3.5. nach Vorstellung aller Ergebnisse der vier Aufgaben:

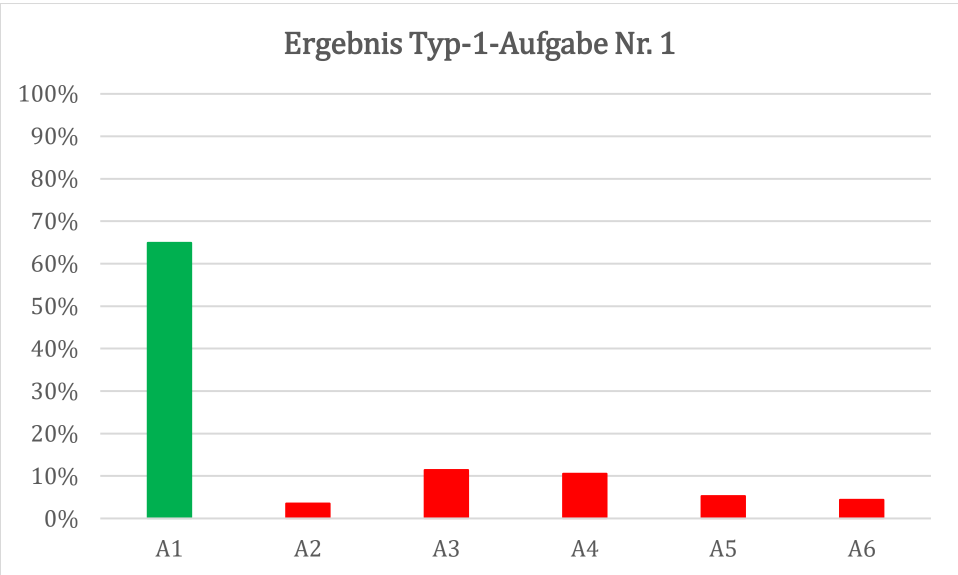


Diagramm 14: Lösungshäufigkeit bei Typ-1-Aufgabe Nr. 1
Quelle: Eigene Darstellung

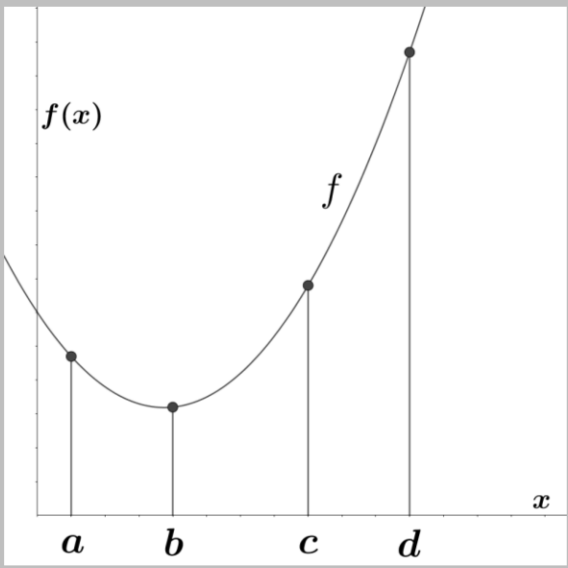
Knapp zwei Drittel der Befragten konnten diese Aufgabe richtig lösen. Die falschen Antwortmöglichkeiten wurden jeweils ungefähr gleich häufig angekreuzt. Die höchste Zustimmung der falschen Antwortmöglichkeiten erfuhren A3 und A4 mit jeweils knapp über 10%. Durchschnittlich benötigten die Befragten bei Typ-1-Aufgabe Nr. 1 eine Minute und 52 Sekunden.

7.3.2. Typ-1-Aufgabe Nr. 2

Typ-1-Aufgabe Nr. 2 mit Antwortmöglichkeiten B1-B6 ist in Abbildung 26 zu sehen:

Typ-1-Aufgabe Nr. 2

Nachstehend ist der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades abgebildet. Zusätzlich sind vier Punkte auf dem Graphen mit den x-Koordinaten a, b, c und d eingezeichnet.



Kreuze die richtige Aussage an!

B1. Der Differenzenquotient im Intervall $[a; b]$ ist größer als der Differentialquotient an der Stelle a.

B2. Der Differenzenquotient im Intervall $[b; d]$ ist größer als der Differentialquotient an der Stelle d.

B3. Der Differenzenquotient im Intervall $[a; c]$ ist kleiner als der Differentialquotient an der Stelle b.

B4. Der Differenzenquotient im Intervall $[c; d]$ ist kleiner als der Betrag des Differentialquotienten an der Stelle a.

B5. Der Betrag des Differenzenquotienten im Intervall $[a; b]$ ist kleiner als der Differentialquotient an der Stelle b.

B6. Der Differenzenquotient im Intervall $[b; c]$ ist größer als der Differentialquotient an der Stelle c.

Abbildung 26: Typ-1-Aufgabe Nr. 2 (Format 1 aus 6)
Quelle: Eigene Darstellung

Die vier Expertinnen und Experten schätzten wiederum ein, wie sehr die einzelnen Grundvorstellungen für das Finden der richtigen Lösung bei dieser Aufgabe benötigt werden – die Mittelwerte der Expertinnen- und Expertenmeinungen sind Tabelle 3 zu entnehmen:

Lokale Änderungsrate (LÄ)	3
Tangentensteigung (TS)	4,75
Lokale Linearität (LL)	1,5
Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen (VF)	1

Tabelle 3: Wichtigkeit der Grundvorstellungen bei Typ-1-Aufgabe Nr. 2

Diese Aufgabe spricht hauptsächlich die Grundvorstellung der Tangentensteigung und in abgeschwächter Form auch jene der lokalen Änderungsrate an. Die restlichen beiden Grundvorstellungen werden von den Expertinnen und Experten als vernachlässigbar für das Finden der richtigen Lösung dieser Aufgabe eingeschätzt. Weil der Grundvorstellung der Tangentensteigung die höchste Bedeutung beigemessen wird, wird Typ-1-Aufgabe Nr. 2 in weiterer Folge als jene Aufgabe angesehen, die auf die Grundvorstellung der Tangentensteigung abzielt.

Anhand der Ausprägungen der Grundvorstellungen der Lernenden dieser Stichprobe (vgl. Diagramm 8 bzw. Tabelle 1) sollte Typ-1-Aufgabe Nr. 2 gut zu den Grundvorstellungen der Befragten passen, weil die beiden dafür benötigten Grundvorstellungen (LÄ & TS) auch am besten ausgeprägt sind. Diagramm 15 gibt eine Übersicht über die Häufigkeiten, mit der die Befragten die sechs Antwortmöglichkeiten B1-B6 gewählt haben:

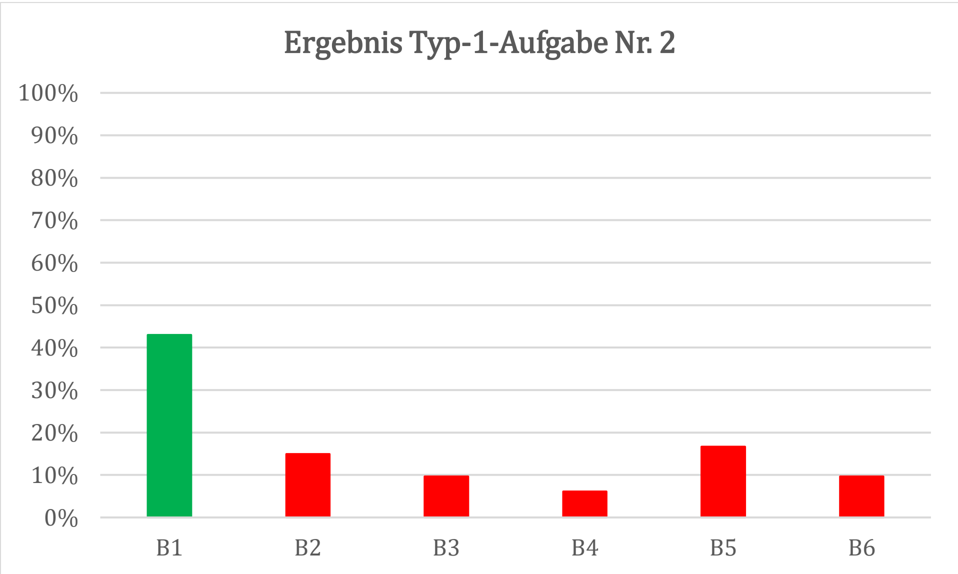


Diagramm 15: Lösungshäufigkeit bei Typ-1-Aufgabe Nr. 2
Quelle: Eigene Darstellung

Auch bei Typ-1-Aufgabe Nr. 2 war die richtige Antwortmöglichkeit B1 jene, die am häufigsten angekreuzt wurde, allerdings fällt die Lösungshäufigkeit im Vergleich zu Typ-1-Aufgabe Nr. 1 um rund 22 Prozentpunkte geringer aus und liegt bei ca. 43%. Die falschen fünf Antwortmöglichkeiten erfuhren zwischen 6% (B4) und knapp 17% (B5) Zustimmung. Mit einer durchschnittlichen Bearbeitungsdauer von zwei Minuten und 15 Sekunden ließen sich die Lernenden bei dieser Frage eine knappe halbe Minute länger Zeit als bei Typ-1-Aufgabe Nr. 1.

7.3.3. Typ-1-Aufgabe Nr. 3

Abbildung 27 zeigt Typ-1-Aufgabe Nr. 3 mit den Antwortmöglichkeiten C1-C6:

Typ-1-Aufgabe Nr. 3

Sei f eine Polynomfunktion vom Grad ≤ 2 und t jene lineare Funktion, deren Graph die Tangente an den Graphen von f im Punkt $\left(x_0 \middle| f(x_0)\right)$ ist. Kreuze die richtige Aussage an!

C1. Ist $h > 0$ sehr klein, so gilt: $f(x_0 + h) \approx t(x_0 + h)$

C2. Es gibt genau eine Funktion f, sodass für $h > 0$ gilt: $f(x_0 + h) = t(x_0 + h)$

C3. Es gibt keine Funktion f, sodass für $h > 0$ gilt: $f(x_0 + h) = t(x_0 + h)$

C4. Für $h > 0$ ist $|t(x_0 + h) - f(x_0 + h)|$ umso kleiner, je größer h ist.

C5. Es gibt eine lineare Funktion $g \neq t$ mit $g(x_0) = f(x_0)$, sodass für $h > 0$ gilt: $|g(x_0 + h) - f(x_0 + h)| < |t(x_0 + h) - f(x_0 + h)|$

C6. Für jede lineare Funktion $g \neq t$ mit $g(x_0) = f(x_0)$ und $h > 0$ gilt: $|g(x_0 + h) - f(x_0 + h)| < |t(x_0 + h) - f(x_0 + h)|$

Abbildung 27: Typ-1-Aufgabe Nr. 3 (Format 1 aus 6)
Quelle: Eigene Darstellung

In Tabelle 4 ist nachzulesen, für wie notwendig die Expertinnen und Experten die jeweiligen Grundvorstellungen für das Finden der richtigen Lösung dieser Aufgabe halten:

Lokale Änderungsrate (LÄ)	2,5
Tangentensteigung (TS)	4,25
Lokale Linearität (LL)	4,5
Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen (VF)	1

Tabelle 4: Wichtigkeit der Grundvorstellungen bei Typ-1-Aufgabe Nr. 3

Die Grundvorstellungen der Tangentensteigung und der lokalen Linearität werden als beinahe gleich wichtig eingeschätzt, wobei zweitere einen knapp höheren Wert erzielt hat. Darum wird im Folgenden Typ-1-Aufgabe Nr. 3 als jene Aufgabe charakterisiert, die hauptsächlich die Grundvorstellung der lokalen Linearität anspricht.

In Bezug auf die Grundvorstellungen der Befragten ist aufgrund der vergleichsweise gering ausgeprägten Vorstellung der lokalen Linearität (vgl. Diagramm 8 bzw. Tabelle 1) anzunehmen, dass Typ-1-Aufgabe 3 weniger gut zu den Vorstellungen der Lernenden passt als beispielsweise die ersten beiden Aufgaben. Diagramm 16 zeigt, wie häufig Antwortmöglichkeiten C1-C6 von den Befragten angekreuzt wurden:

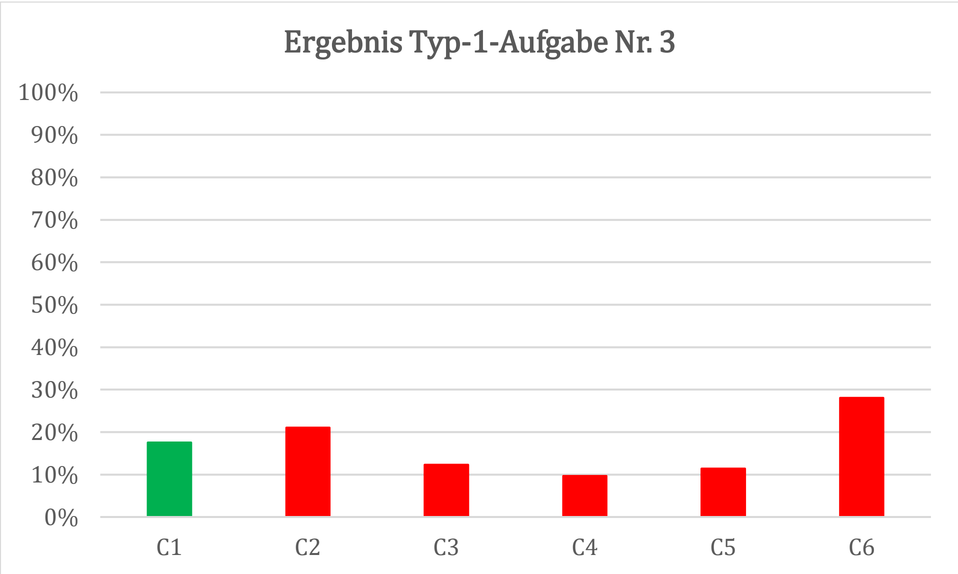


Diagramm 16: Lösungshäufigkeit bei Typ-1-Aufgabe Nr. 3
Quelle: Eigene Darstellung

Aus den Ergebnissen wird ersichtlich, dass die richtige Antwortmöglichkeit C1 nicht am häufigsten gewählt wurde und lediglich rund 17,5% der Lernenden die Frage richtig beantworten konnten. Das ist ein sehr niedriger Wert, vor allem in Anbetracht dessen, dass sogar bei zufälligem Ankreuzen aller Lernenden eine Lösungshäufigkeit von ca. 16,6% zu erwarten wäre. Zwei Antwortmöglichkeiten (C2 & C6) wurden häufiger angekreuzt, wobei insbesondere die Tatsache, dass ca. 28% der Befragten Antwortmöglichkeit C6 wählten, ein Indiz dafür ist, dass die Idee der Tangente als best-approximierende Gerade im Sinne von Greefrath et al. (2016: 158–159) keine gängige Vorstellung bei Schülerinnen und Schülern ist. Die geringe Lösungshäufigkeit kann nicht auf fehlendes Bemühen der Befragten bei dieser Aufgabe zurückgeführt werden, weil die durchschnittliche Bearbeitungsdauer mit zwei Minuten und elf Sekunden eher lang ist.

7.3.4. Typ-1-Aufgabe Nr. 4

Die vierte und letzte Typ-1-Aufgabe inklusive den sechs Antwortmöglichkeiten D1-D6 ist in Abbildung 28 zu sehen:

Typ-1-Aufgabe Nr. 4

Jemand möchte die Volumina von n paarweise verschieden großer Würfel berechnen. Die Kantenlänge x_i $\{i \in 1,2,\dots,n\}$ des jeweiligen Würfels wurde mit einem Maßband gemessen, wodurch jeweils eine Messunsicherheit Δx besteht.
V_i $\{i \in 1,2,\dots,n\}$ bezeichnet die tatsächlichen Volumina der Würfel, ΔV_i die daraus resultierende Unsicherheit bei der Berechnung der Volumina. Kreuze die richtige Aussage an!

D1. Es gilt: $\Delta \mathrm{V_i} \approx 3\mathrm{x_i}^2 \Delta \mathrm{x}$

D2. ΔV_i ist unabhängig von den Kantenlängen der Würfel.

D3. Es gibt einen Faktor $a \in \mathbb{R}$, sodass für alle Würfel gilt: $\Delta V_i = V_i \cdot a$

D4. Es gilt: $\Delta \mathrm{V_i} \approx \mathrm{x_i}^3 \Delta \mathrm{x}$

D5. Je größer x_i, desto kleiner ist ΔV_i.

D6. Je größer x_i, desto größer ist der Quotient $\frac{\Delta V_i}{V_i}$.

Abbildung 28: Typ-1-Aufgabe Nr. 4 (Format 1 aus 6)
Quelle: Eigene Darstellung

Wie sehr die einzelnen Grundvorstellungen aus Expertinnen- und Expertensicht bei Typ-1-Aufgabe Nr. 4 benötigt werden, ist Tabelle 5 zu entnehmen:

Lokale Änderungsrate (LÄ)	2,25
Tangentensteigung (TS)	1
Lokale Linearität (LL)	3
Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen (VF)	4,5

Tabelle 5: Wichtigkeit der Grundvorstellungen bei Typ-1-Aufgabe Nr. 4

Für die richtige Bearbeitung dieser Frage ist – im Gegensatz zu den vorigen drei Aufgaben – eine gut ausgeprägte Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors kleiner Änderungen sehr wichtig und erreicht in Tabelle 5 sogar den mit Abstand höchsten Wert. Deswegen wird Typ-1-Aufgabe Nr. 4 als jene Aufgabe eingestuft, die auf die Grundvorstellung des

Verstärkungsfaktors kleiner Änderungen abzielt. Ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe sprechen die Grundvorstellungen der Schülerinnen und Schüler (vgl. Diagramm 8 bzw. Tabelle 1) nicht dafür, dass diese Aufgabe den Befragten entgegenkommt, weil die beiden für diese Fragestellung wichtigsten Grundvorstellungen am schwächsten ausgeprägt sind. Diagramm 17 gibt Aufschluss über die Verteilung der Antwortmöglichkeiten D1-D6 der Befragten bei Typ-1-Aufgabe Nr. 4:

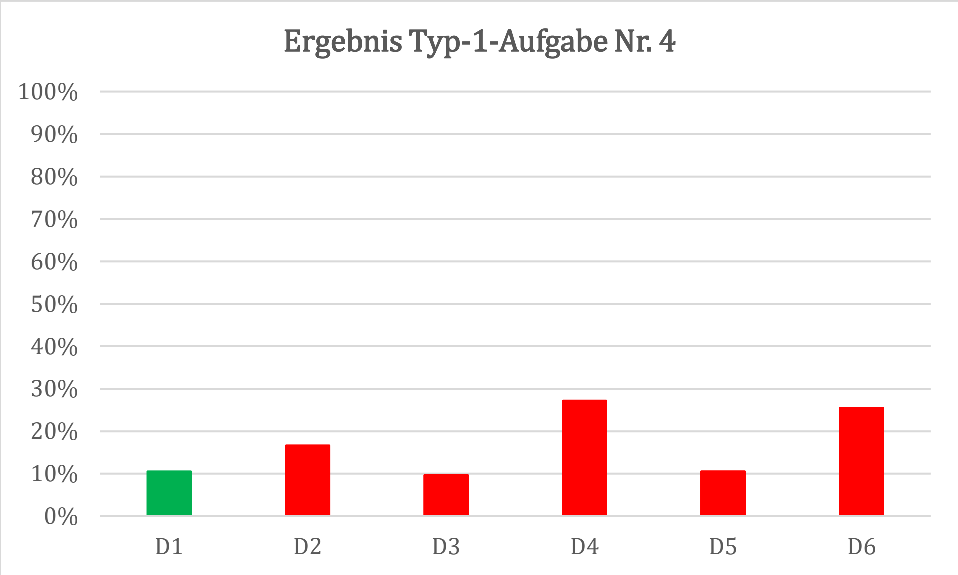


Diagramm 17: Lösungshäufigkeit bei Typ-1-Aufgabe Nr. 4
Quelle: Eigene Darstellung

Nur 10,5% konnten Typ-1-Aufgabe Nr. 4 richtig lösen, sodass sogar durch zufälliges Ankreuzen aller Befragten mit rund 16,6% erwarteten richtigen Lösungen eine deutlich bessere Lösungsrate anzunehmen wäre. Die Antwortmöglichkeiten D4 und D6 wurden beinahe dreimal so oft angekreuzt wie die richtige Antwortmöglichkeit D1. Im Gegensatz zu den vorigen Aufgaben beträgt die durchschnittliche Bearbeitungsdauer der Lernenden bei dieser Aufgabe lediglich eine Minute und 37 Sekunden, also deutlich kürzer. Es kann davon ausgegangen werden, dass die kurze Bearbeitungsdauer nicht an zu wenig Engagement der Befragten festzumachen ist, sondern in vielen Fällen wohl eher an einer Aussichtslosigkeit bei der Bearbeitung der Frage in Folge einer Überforderung liegt.

7.3.5. Vergleich und Analyse der Ergebnisse der vier Aufgaben

Wie auf den vorigen Seiten dargelegt, wird jeder Typ-1-Aufgabe aufgrund der Expertinnen- und Experteneinschätzungen jeweils eine Grundvorstellung zugeordnet, die für das Lösen der jeweiligen Aufgabe am meisten benötigt wird. Tabelle 6 bietet eine Übersicht, welche Aufgaben welche Grundvorstellungen hauptsächlich ansprechen:

Typ-1-Aufgabe Nr. 1	Lokale Änderungsrate (LÄ)
Typ-1-Aufgabe Nr. 2	Tangentensteigung (TS)
Typ-1-Aufgabe Nr. 3	Lokale Linearität (LL)
Typ-1-Aufgabe Nr. 4	Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen (VF)

Tabelle 6: Am meisten benötigte Grundvorstellung je Typ-1-Aufgabe

Um in weiterer Folge eine Vergleichbarkeit der Lösungshäufigkeiten – auch unter dem Gesichtspunkt der hauptsächlich angesprochenen Grundvorstellungen – übersichtlicher vornehmen zu können, werden in Diagramm 18 die Lösungshäufigkeiten aller vier Typ-1-Aufgaben dargestellt:

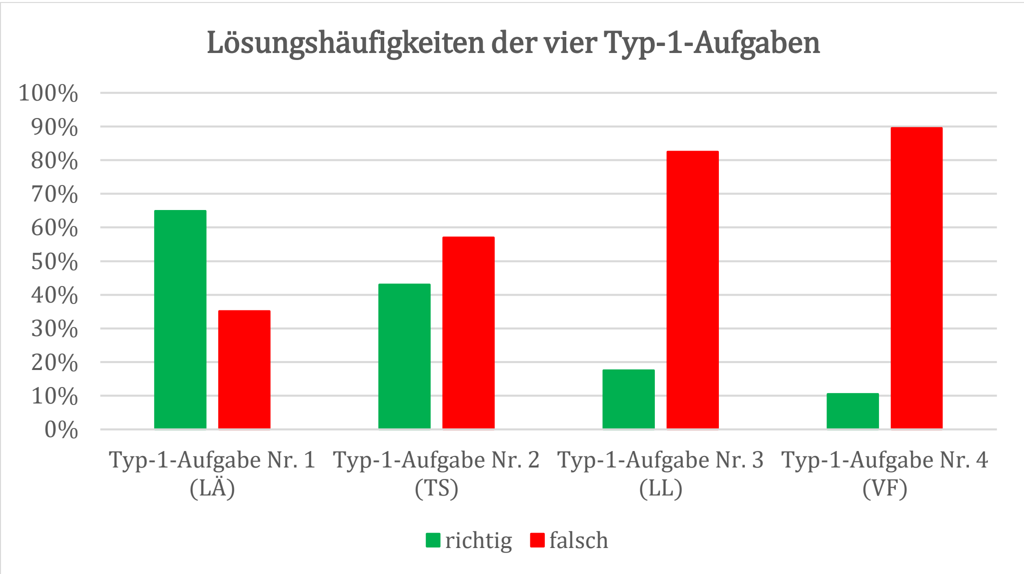


Diagramm 18: Lösungshäufigkeiten der vier Typ-1-Aufgaben im Vergleich
Quelle: Eigene Darstellung

Diagramm 18 liefert die Vermutung, dass Aufgaben, die eine gewisse Grundvorstellung besonders ansprechen, häufiger gelöst werden können, wenn diese Grundvorstellung stärker ausgeprägt ist. So werden Aufgaben Nr. 1 & 2, die die laut Diagramm 8 bzw. Tabelle 1 am stärksten ausgeprägten Vorstellungen der lokalen Änderungsrate und der Tangentensteigung besonders ansprechen, deutlicher häufiger gelöst als Aufgaben Nr. 3 & 4, die auf die deutlich schwächer ausgeprägten Grundvorstellungen der lokalen Linearität und des Verstärkungsfaktors kleiner Änderungen abzielen.

Die These, besser ausgeprägte Grundvorstellungen würden automatisch zu einer höheren Lösungshäufigkeit führen, kann anhand dieser Überlegungen natürlich nicht seriös beurteilt werden. Dazu haben Faktoren, wie beispielsweise der Schwierigkeitsgrad und der Anteil an mathematischer Fachsprache in der Aufgabenstellung eine zu große Auswirkung auf die Lösungshäufigkeit. Typ-1-Aufgaben 3 & 4 sind insofern für die Schülerinnen und Schüler wohl auch schwerer zu beantworten, als im Vergleich zu den ersten beiden Aufgaben ein höheres Maß an mathematischer Fach- und Zeichensprache in den Aufgabenstellungen und Antwortmöglichkeiten enthalten ist, was in diesem Ausmaß im Schulunterricht eher unüblich ist. Weiters hat wohl auch die Art der Fragestellung einen großen Einfluss auf die Ergebnisse, wie man beispielsweise bei Typ-1-Aufgabe Nr. 3 sehen kann: Obwohl die Grundvorstellung der Tangentensteigung von den Expertinnen und Experten bei dieser Aufgabe als sehr wichtig eingeschätzt wird (4,25 von 5), ist die Lösungshäufigkeit sehr gering (17,5%), obwohl die Grundvorstellung der Tangentensteigung relativ stark ausgeprägt ist (TS=3,7). Das ist ein Beispiel für die datengestützte Hypothese von Drösemeier et al. (2018: 1837), dass die Aktivierung von Grundvorstellungen stark von den situativen Eigenschaften einer Aufgabe abhängig ist. Überdies muss betont werden, dass – obwohl den Aufgaben zwar die jeweils am meisten benötigte Grundvorstellung zugeordnet wird – immer mehrere Grundvorstellungen eine Rolle spielen.

Aufgrund dieser Überlegungen ist es notwendig, detailliertere Analysen vorzunehmen, um Aussagen darüber treffen zu können, inwiefern der Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen Einfluss auf die Lösungsfähigkeit hat. Dafür werden nun für alle vier Grundvorstellungen die von den Expertinnen und Experten eingeschätzte Wichtigkeit der jeweiligen Grundvorstellung bei den vier Typ-1-Aufgaben und die Lösungshäufigkeit (in %) in einer Tabelle festgehalten. Der Korrelationskoeffizient dieser beiden Größen gibt Auskunft darüber, wie Wichtigkeit einer gewissen Grundvorstellung und Lösungshäufigkeit zusammenhängen. Werden diese Korrelationskoeffizienten in Beziehung zum Grad der Ausprägung der Grundvorstellungen der Befragten gesetzt, können Rückschlüsse daraus gezogen werden, ob gut ausgeprägte Grundvorstellungen auch für das Lösen von Aufgaben aktiviert werden können.

In Tabelle 7 sind die eben erklärten Werte für die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate eingetragen:

Lokale Änderungsrate (LÄ)	Wichtigkeit der LÄ	Lösungshäufigkeit (in %)
Typ-1-Aufgabe Nr. 1	4	65
Typ-1-Aufgabe Nr. 2	3	43
Typ-1-Aufgabe Nr. 3	2,5	17,5
Typ-1-Aufgabe Nr. 4	2,25	10,5
Korrelationskoeffizient r≈0,982		

Tabelle 7: Zusammenhang zwischen Wichtigkeit der lokalen Änderungsrate und der Lösungshäufigkeit

In Bezug auf die lokale Änderungsrate liegt eine deutlich positive Korrelation zwischen der Wichtigkeit der Grundvorstellung bei den jeweiligen Aufgaben und der Lösungshäufigkeit vor (r≈0,982). Daraus lässt sich folgende Vermutung ableiten: Je mehr die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate für das Lösen einer Aufgabe benötigt wird, umso höher ist auch die Lösungshäufigkeit. Ein Blick auf Diagramm 8 bzw. Tabelle 1 zeigt, dass die lokale Änderungsrate die am stärksten ausgeprägte Grundvorstellung der Lernenden ist (LÄ=3,92). Deswegen kann interpretiert werden, dass die Vorstellung der lokalen Änderungsrate nicht nur stark ausgeprägt ist, sondern auch in hohem Maße zum Lösen der Typ-1-Aufgaben aktiviert werden kann.

Analog werden anhand von Tabelle 8 eine Analyse und mögliche Interpretationen bezüglich der Grundvorstellung der Tangentensteigung vorgenommen:

Tangentensteigung (TS)	Wichtigkeit der TS	Lösungshäufigkeit (in %)
Typ-1-Aufgabe Nr. 1	1	65
Typ-1-Aufgabe Nr. 2	4,75	43
Typ-1-Aufgabe Nr. 3	4,25	17,5
Typ-1-Aufgabe Nr. 4	1	10,5
Korrelationskoeffizient r≈−0,131		

Tabelle 8: Zusammenhang zwischen Wichtigkeit der Tangentensteigung und der Lösungshäufigkeit

Aus Tabelle 8 ist herauszulesen, dass es eine leicht negative Korrelation zwischen der Wichtigkeit der Grundvorstellung der Tangentensteigung bei den Typ-1-Aufgaben und der Lösungshäufigkeit gibt (r≈−0,131), wobei dem Wert eher zu entnehmen ist, dass kein aussagekräftiger Zusammenhang zwischen den beiden Variablen festzustellen ist.

Die Grundvorstellung der Tangentensteigung ist zwar ähnlich stark ausgeprägt wie jene der lokalen Änderungsrate (TS=3,70), kann aber laut Tabelle 8 nicht so gut zum Lösen aktiviert werden. Eine mögliche Erklärung dafür wurde bereits zuvor anhand von Typ-1-Aufgabe Nr. 3 gegeben und bezieht sich auf die Problematik der Aktivierung von Grundvorstellungen, die stark von den situativen Eigenschaften der jeweiligen Aufgabe abhängig ist (vgl. Drösemeier et al. 2018: 1837).

Tabelle 9 beinhaltet die Expertinnen- und Experteneinschätzungen zur Wichtigkeit der Grundvorstellung der lokalen Linearität und die Lösungshäufigkeit aller vier Typ-1-Aufgaben:

Lokale Linearität (LL)	Wichtigkeit der LL	Lösungshäufigkeit (in %)
Typ-1-Aufgabe Nr. 1	1	65
Typ-1-Aufgabe Nr. 2	1,5	43
Typ-1-Aufgabe Nr. 3	4,5	17,5
Typ-1-Aufgabe Nr. 4	3	10,5
Korrelationskoeffizient r≈−0,847		

Tabelle 9: Zusammenhang zwischen Wichtigkeit der lokalen Linearität und der Lösungshäufigkeit

In diesem Fall liegt eine deutlich negative Korrelation (r≈−0,847) vor, sodass die Interpretation nahe liegt, dass je wichtiger die Grundvorstellung der lokalen Linearität bei den Typ-1-Aufgaben ist, desto seltener sie richtig gelöst wird. Diagramm 8 bzw. Tabelle 1 zeigt, dass die lokale Linearität die am schwächsten ausgeprägte Grundvorstellung ist (LL=3,22), was eine mögliche Erklärung der negativen Korrelation bedeuten könnte: Durch die vergleichsweise schwache Ausprägung dieser Grundvorstellung fällt es Lernenden womöglich schwerer, sie zum Lösen von Aufgaben mit verstärktem Fokus auf die Grundvorstellung der lokalen Linearität zu aktivieren.

Der Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen ist die letzte Grundvorstellung, die auf einen Zusammenhang der Wichtigkeit der Grundvorstellung und der Lösungshäufigkeit bei den vier Typ-1-Aufgaben analysiert wird (vgl. Tabelle 10):

Verstärkungsfaktor (VF)	Wichtigkeit des VF	Lösungshäufigkeit (in %)
Typ-1-Aufgabe Nr. 1	1	65
Typ-1-Aufgabe Nr. 2	1	43
Typ-1-Aufgabe Nr. 3	1	17,5
Typ-1-Aufgabe Nr. 4	4,5	10,5
Korrelationskoeffizient $r \approx -0{,}628$		

Tabelle 10: Zusammenhang zwischen Wichtigkeit des Verstärkungsfaktors und der Lösungshäufigkeit

Auch beim Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen liegt eine negative Korrelation ($r \approx -0{,}628$) zwischen der Wichtigkeit der Grundvorstellung und der Lösungshäufigkeit der Aufgaben vor, wenn auch nicht so deutlich wie bei der zuvor behandelten Grundvorstellung der lokalen Linearität. Das lässt zumindest die Vermutung zu, dass Lernende Typ-1-Aufgaben umso seltener lösen können, je wichtiger die Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors kleiner Änderungen bei den Aufgaben ist. Da in diesem Fall Typ-1-Aufagbe Nr. 4 die einzige ist, bei der diese Grundvorstellung überhaupt eine Rolle spielt, ist das Ergebnis auch weniger aussagekräftig und mit Vorsicht zu genießen.

In Bezug auf die Ausprägung der Grundvorstellung der Befragten zeigt sich ein ähnliches Bild wie bei der lokalen Linearität: Lernende können die eher schwach ausgeprägte Vorstellung des Verstärkungsfaktors (VF=3,29) nicht gut zum Lösen von Typ-1-Aufgaben nutzen.

Insgesamt zeigt sich in diesem Unterkapitel die Tendenz, dass der Grad der Ausprägung der Grundvorstellungen einen Einfluss auf die Lösungshäufigkeiten haben dürfte. Bei der lokalen Änderungsrate zeigt sich eine deutlich positive Korrelation zwischen Wichtigkeit der Grundvorstellung und Lösungshäufigkeit bei den vier Aufgaben, sodass aufgrund der sehr starken Ausprägung dieser Grundvorstellung davon ausgegangen werden kann, dass sie zum Lösen von Typ-1-Aufgaben aktiviert werden kann.

Bei den Grundvorstellungen der lokalen Linearität und des Verstärkungsfaktors kleiner Änderungen konnten vergleichbare Ergebnisse erzielt werden: So sind diese beiden Grundvorstellungen bei den Befragten nicht nur am schwächsten ausgeprägt, sondern es liegt auch in beiden Fällen eine negative Korrelation zwischen Wichtigkeit der Grundvorstellungen und Lösungshäufigkeit bei den Typ-1-Aufgaben vor. Dieses Ergebnis spricht dafür, dass schwächer ausgeprägte Grundvorstellungen auch weniger gut zum Lösen von Typ-1-Aufgaben eingesetzt werden können.

Die Tangentensteigung ist die einzige Grundvorstellung, bei der kein Zusammenhang zwischen dem Grad der Ausprägung der Grundvorstellung und der Lösungshäufigkeit hergestellt werden kann.

Allerdings müssen auch die Ergebnisse und Interpretationen bei den anderen drei Grundvorstellungen unter Vorbehalt gesehen werden, weil die Korrelationskoeffizienten aufgrund der geringen Anzahl an Aufgaben und befragten Expertinnen- und Experten stark von verschiedensten Faktoren beeinflusst werden können.

Nichtsdestotrotz konnten einige datengestützte Vermutungen generiert werden, bevor im nächsten Unterkapitel dem Zusammenhang zwischen dem Grad der Ausprägung der Grundvorstellungen und der Lösungshäufigkeit noch einmal im Detail auf den Grund gegangen wird.

7.3.6. Zusammenhang zwischen Lösungshäufigkeit und Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen im Detail

Um in diesem Unterkapitel der Frage auf den Grund gehen zu können, ob besser ausgeprägte Grundvorstellungen Faktoren für eine höhere Lösungsfähigkeit sind, werden wieder die bereits in Kapitel 7.2. zu Rate gezogenen Durchschnittswerte der Grundvorstellungen aller Befragten verwendet, die sich aus den Antworten der drei Einschätzungsfragen ergaben.

Anschließend werden die Mittelwerte der Ausprägung der Grundvorstellungen bei jenen Lernenden berechnet, die eine Aufgabe richtig bzw. falsch gelöst haben. Dieser Vorgang wird bei allen vier Typ-1-Aufgaben durchgeführt, wobei die Ergebnisse jeweils in Diagrammform dargestellt und verglichen werden.

Durch diese Form der Analyse soll herausgefiltert werden, ob diejenigen Schülerinnen und Schüler, die die Aufgaben korrekt bearbeitet haben, auch besser ausgeprägte Grundvorstellungen besitzen und diese somit auch besser zum Lösen aktivieren konnten.

Die eben beschriebene Vorgangsweise wird nun erstmals anhand von Typ-1-Aufgabe Nr. 1 durchgeführt, wobei die Säulen bei der Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate farblich hervorgehoben sind, weil diese Aufgabe speziell darauf fokussiert. In Diagramm 19 sind die Mittelwerte der Ausprägung der Grundvorstellungen derjenigen Lernenden, die Typ-1-Aufgabe Nr. 1 richtig gelöst haben grün, bzw. falsch gelöst haben rot dargestellt:

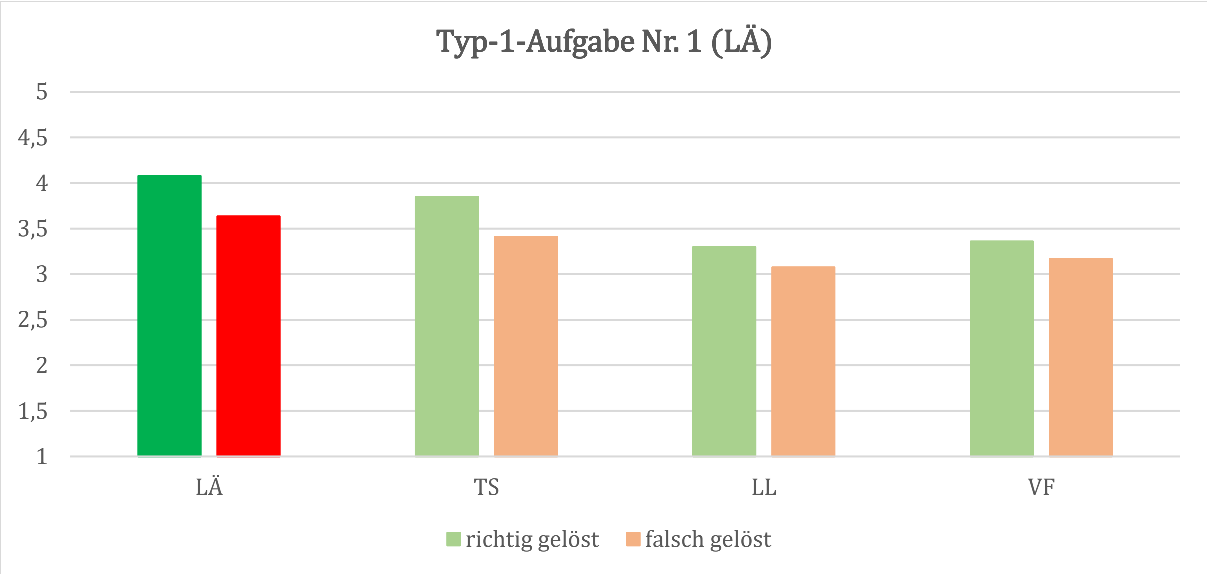


Diagramm 19: Unterscheidung des Ausprägungsgrads der Grundvorstellungen bei Typ-1-Aufgabe Nr. 1 nach Lösungsfähigkeit
Quelle: Eigene Darstellung

Bei der Analyse von Diagramm 19 zeigt sich, dass die Grundvorstellungen jener, die die Aufgabe richtig gelöst haben, allesamt besser ausgeprägt sind als von jenen, die die Aufgabe falsch gelöst haben. Insbesondere die Grundvorstellungen der Tangentensteigung, aber auch die bei dieser Aufgabe besonders wichtige Vorstellung der lokalen Änderungsrate sind bei denjenigen Lernenden, die die Aufgabe richtig gelöst haben, deutlich stärker ausgeprägt. Das spricht dafür, dass besser ausgebildete Grundvorstellungen auch zum Lösen der Aufgabe aktiviert werden konnten.

In Diagramm 20 sind die Ergebnisse für Typ-1-Aufgabe Nr. 2 zu sehen, wobei die Säulen bei der Grundvorstellung der Tangentensteigung farblich hervorgehoben sind, weil diese Aufgabe besonders auf die Vorstellung der Tangentensteigung abzielt:

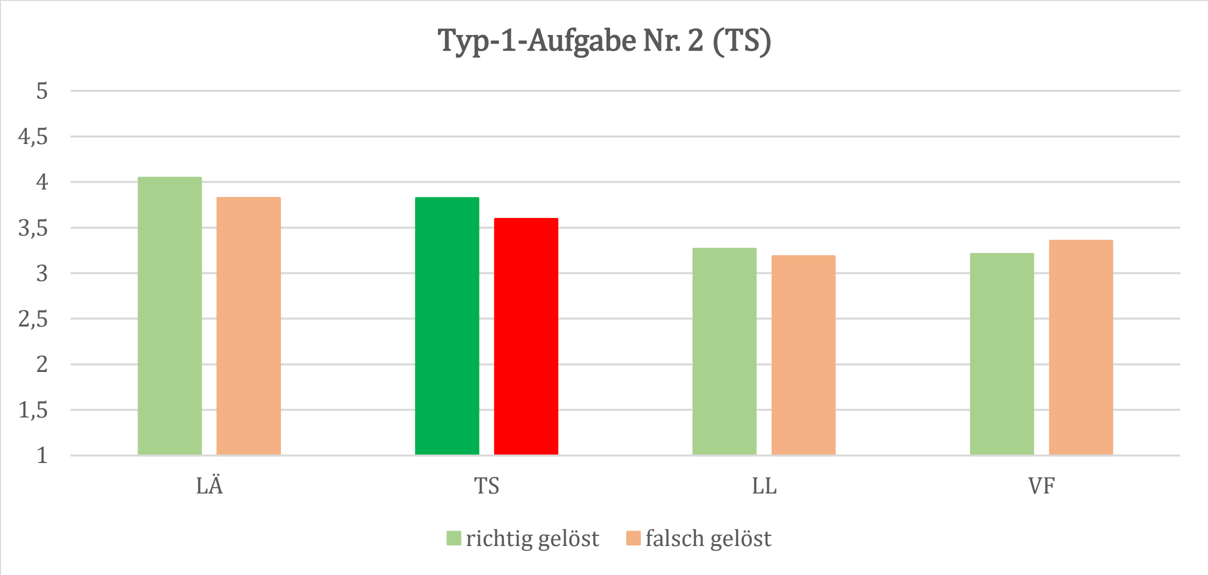


Diagramm 20: Unterscheidung des Ausprägungsgrads der Grundvorstellungen bei Typ-1-Aufgabe Nr. 2 nach Lösungsfähigkeit
Quelle: Eigene Darstellung

Es herrscht ein ähnliches Bild wie bei den Ergebnissen bei Typ-1-Aufgabe Nr. 1 vor, wobei in diesem Fall die Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors eine Ausnahme bildet, weil diese bei jenen Befragten besser ausgebildet ist, die Typ-1-Aufgabe Nr. 2 falsch beantwortet haben. Insgesamt sind die Unterschiede zwischen jenen, die die Aufgabe richtig bzw. falsch gelöst haben hinsichtlich des Ausprägungsgrads der Grundvorstellungen etwas kleiner als zuvor. Nichtsdestotrotz ist gerade die für diese Aufgabe so wichtige Grundvorstellung der Tangentensteigung bei jenen Lernenden merklich besser ausgeprägt, die diese Aufgabe richtig lösen konnten.

Die analog aufbereiteten Ergebnisse für Typ-1-Aufgabe Nr. 3, deren Schwerpunkt die Grundvorstellung der lokalen Linearität bildet, sind in Diagramm 21 abgebildet:

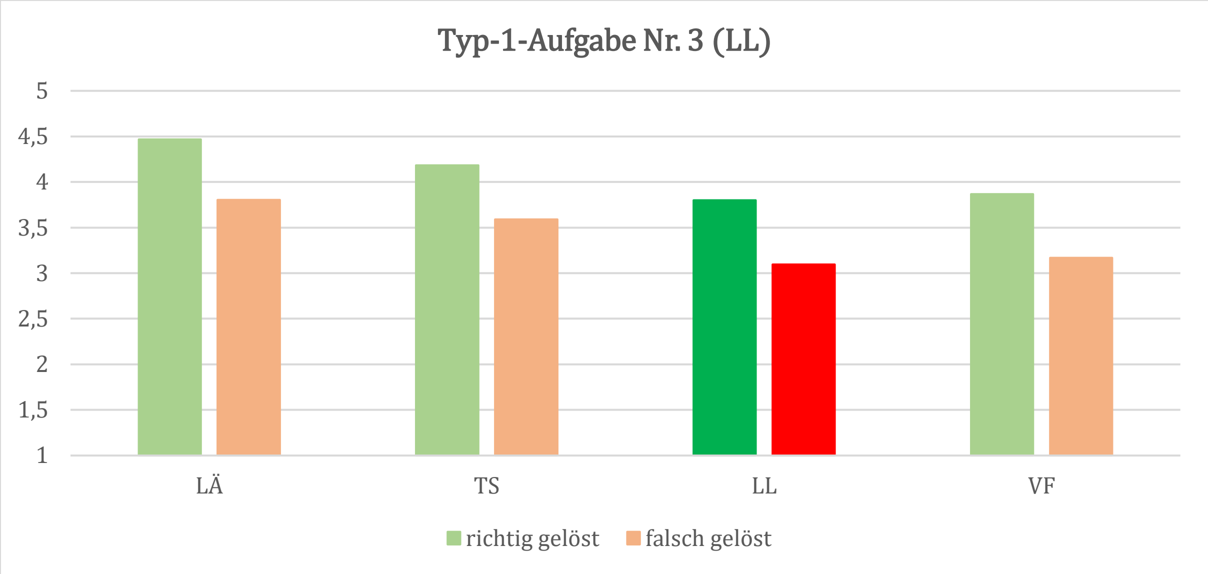


Diagramm 21: Unterscheidung des Ausprägungsgrads der Grundvorstellungen bei Typ-1-Aufgabe Nr. 3 nach Lösungsfähigkeit
Quelle: Eigene Darstellung

Auffällig bei der Analyse von Diagramm 21 ist, dass die Differenzen des Ausprägungsgrads bei allen vier Grundvorstellungen zwischen jenen, die Typ-1-Aufgabe Nr. 3 richtig bzw. falsch gelöst haben, im Vergleich zu den vorigen Aufgaben besonders groß sind. Das ist ein weiteres Indiz dafür, dass Lernende mit besser ausgeprägten Grundvorstellungen Typ-1-Aufgaben eher richtig lösen können als jene Schülerinnen und Schüler mit schwächer ausgeprägten Grundvorstellungen.

Abschließend werden die Ergebnisse von Typ-1-Aufgabe Nr. 4, für deren Lösung besonders die Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors benötigt wird, in Diagramm 22 vorgestellt:

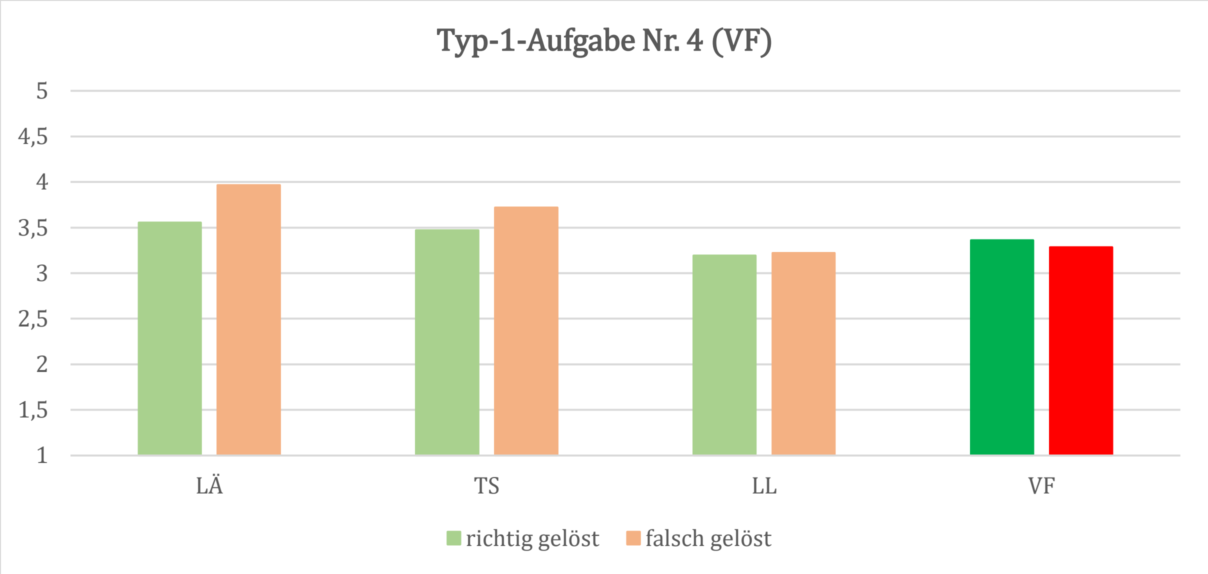


Diagramm 22: Unterscheidung des Ausprägungsgrads der Grundvorstellungen bei Typ-1-Aufgabe Nr. 4 nach Lösungsfähigkeit
Quelle: Eigene Darstellung

Es ist sofort ersichtlich, dass sich die Ergebnisse bei Typ-1-Aufgabe Nr. 4 sehr von jenen der vorigen drei Aufgaben unterscheiden. Bei allen Grundvorstellungen haben diejenigen, die die Aufgabe falsch gelöst haben, einen höheren Ausprägungsgrad, mit Ausnahme der Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors. Diese für Typ-1-Aufgabe Nr. 4 besonders wichtige Grundvorstellung ist also doch bei jenen, die die Aufgabe richtig gelöst haben, höher ausgeprägt, was wiederum dafür spricht, dass eine positive Korrelation zwischen dem Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen und der Lösungsfähigkeit vermutet werden kann.

Das ansonsten überraschende und aus der Reihe tanzende Ergebnis kann dadurch erklärt werden, dass nur zwölf von 114 Befragten die Aufgabe richtig lösen konnten und dadurch wenige Datensätze schon einen großen Einfluss auf die Mittelwerte haben. Geht man überdies davon aus, dass von diesen zwölf Befragten einige die richtige Lösung bei Typ-1-Aufgabe Nr. 4 nur richtig erraten haben, sind die Resultate bei dieser Aufgabe als weniger aussagekräftig einzuschätzen als jene, die zuvor bereits vorgestellt wurden.

Insgesamt ergibt sich aus den Auswertungen und Interpretationen der Ergebnisse der vier Typ-1-Aufgaben die klare Tendenz einer positiven Beeinflussung von besser ausgeprägten Grundvorstellungen auf die Fähigkeit, Typ-1-Aufgaben richtig lösen zu können. Zumeist konnte festgestellt werden, dass nicht nur die für die jeweilige Aufgabe besonders wichtige Grundvorstellung bei jenen Lernenden, die die Aufgabe richtig lösen konnten, besser ausgeprägt war, sondern meist alle vier Grundvorstellungen. Nichtsdestotrotz ist bei der Unterscheidung zwischen jenen Lernenden, die eine Aufgabe richtig bzw. falsch gelöst haben, bei allen vier Aufgaben die Differenz des Ausprägungsgrads derjenigen Grundvorstellung, die für das Lösen der jeweiligen Aufgabe als am wichtigsten eingeschätzt wurde, am größten. Auch das spricht dafür, dass besser ausgebildete Grundvorstellungen einen positiven Einfluss auf die Lösungsfähigkeit der Lernenden haben.

In den abschließenden Unterkapiteln von 7.3. werden Zusammenhänge zwischen einigen Merkmalen (durchschnittliche Mathematiknote, Geschlecht, Schulart & Interesse für das Thema) und der Lösungshäufigkeit herausgearbeitet und kurz analysiert.

7.3.7. Zusammenhang zwischen Noten und Lösungshäufigkeit

Für eine Darstellung des Zusammenhangs zwischen der durchschnittlichen Mathematiknote der letzten beiden Jahre und der Lösungshäufigkeit je Typ-1-Aufgabe wurde für alle vier Aufgaben herausgefiltert, wie viele derjenigen, die angegeben haben, ein „Sehr gut“, „Gut“, „Befriedigend“, „Genügend“ und „Nicht genügend“ in Mathematik erreicht zu haben, die jeweilige Aufgabe richtig lösen konnten. Die Prozentsätze in Diagramm 23 geben die Lösungshäufigkeit derjenigen Befragten pro Aufgabe an, die die jeweils angegebene Note in Mathematik erreicht haben. Ein Beispiel für eine passende Interpretation ist, dass rund 83% derjenigen, die angegeben haben, ein „Sehr gut“ im Fach Mathematik erhalten zu haben, Typ-1-Aufgabe Nr. 1, die sich speziell auf die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate bezieht, richtig lösen konnten:

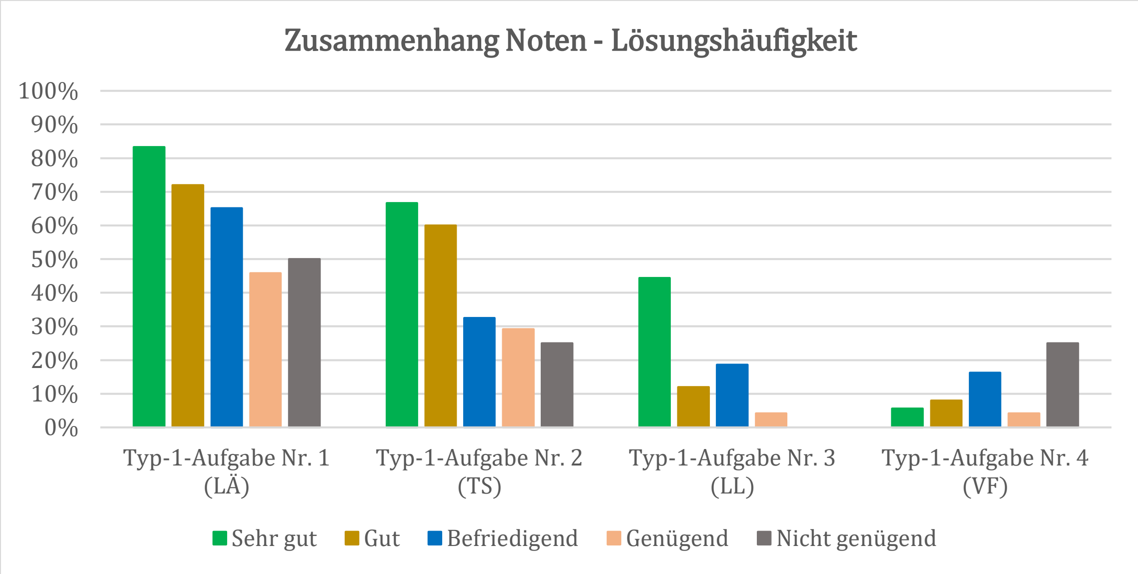


Diagramm 23: Zusammenhang zwischen Mathematiknote und Lösungshäufigkeit pro Typ-1-Aufgabe
Quelle: Eigene Darstellung

Wenig überraschend zeigen die Ergebnisse deutlich, dass Schülerinnen und Schüler mit besseren Noten Typ-1-Aufgaben auch häufiger richtig lösen können. Bei Typ-1-Aufgabe Nr. 1 ist die Lösungshäufigkeit dabei bei allen Noten beinahe 50%, bei Aufgaben Nr. 2 & 3 wird allerdings deutlich, dass Lernende mit einem „Sehr gut" bzw. „Gut" in Mathematik eine deutlich höhere Lösungshäufigkeit erreichen als der Rest. Lediglich die Ergebnisse bei Typ-1-Aufgabe Nr. 4 passen nicht ins Bild, was wiederum auf die geringe Anzahl an Befragten zurückzuführen ist, die diese Aufgabe richtig lösen konnten. Weil auch nur vier Befragte angegeben haben, ein „Nicht Genügend" in Mathematik erhalten zu haben, von denen eine Person Aufgabe Nr. 4 richtig angekreuzt hat, sind die 25% Lösungshäufigkeit der Lernenden mit einem „Nicht genügend" bei dieser Aufgabe irreführend und nicht aussagekräftig.

7.3.8. Zusammenhang zwischen Geschlecht und Lösungshäufigkeit

Bei der Analyse des Zusammenhangs zwischen Geschlecht und Lösungshäufigkeit der Typ-1-Aufgaben wurde analog vorgegangen wie im vorigen Unterkapitel. Diagramm 24 gibt Auskunft darüber, wie viel Prozent der männlichen bzw. weiblichen Lernenden die jeweilige Aufgabe richtig lösen konnten:

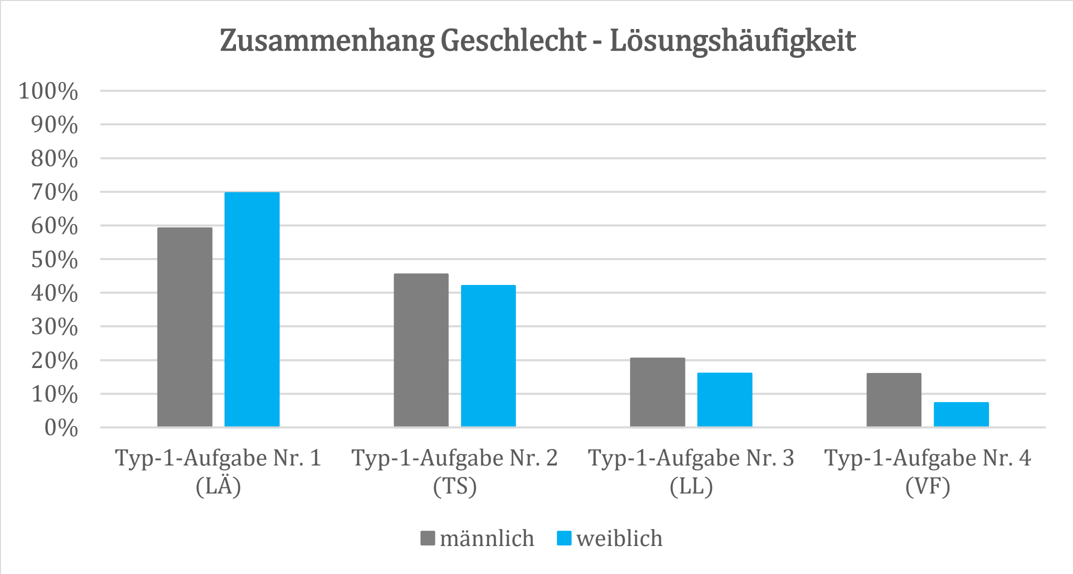


Diagramm 24: Zusammenhang zwischen Geschlecht und Lösungshäufigkeit pro Typ-1-Aufgabe
Quelle: Eigene Darstellung

Bei Aufgabe Nr. 1 konnten die Schülerinnen eine höhere Lösungshäufigkeit erreichen, bei der zweiten Aufgabe die Schüler. Mit Blick auf den geschlechterspezifischen Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen (vgl. Diagramm 11) lässt sich deshalb ein positiver Zusammenhang zwischen höher ausgeprägten Grundvorstellungen und Lösungshäufigkeit vermuten.

Anders ist die Situation bei Typ-1-Aufgabe Nr. 3 & 4, wo die männlichen Lernenden eine leicht höhere Lösungshäufigkeit erreichten, auch wenn die den beiden Aufgaben zugrundeliegenden Grundvorstellungen schwächer ausgeprägt sind als bei den weiblichen Befragten (vgl. Diagramm 11). Allerdings sind die Ergebnisse dieser beiden Aufgaben weniger aussagekräftig als jene der ersten beiden, weil nur sehr wenige Lernende die richtige Lösung angegeben haben und deshalb bereits wenige durch Raten zustande gekommene richtige Lösungen den Zusammenhang zwischen Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen und Lösungshäufigkeit verfälschen können.

7.3.9. Zusammenhang zwischen Art des Gymnasiums und Lösungshäufigkeit

Diagramm 25 bietet eine Übersicht über mögliche Unterschiede zwischen den Lösungshäufigkeiten der vier Typ-1-Aufgaben in Bezug auf die Art des Gymnasiums:

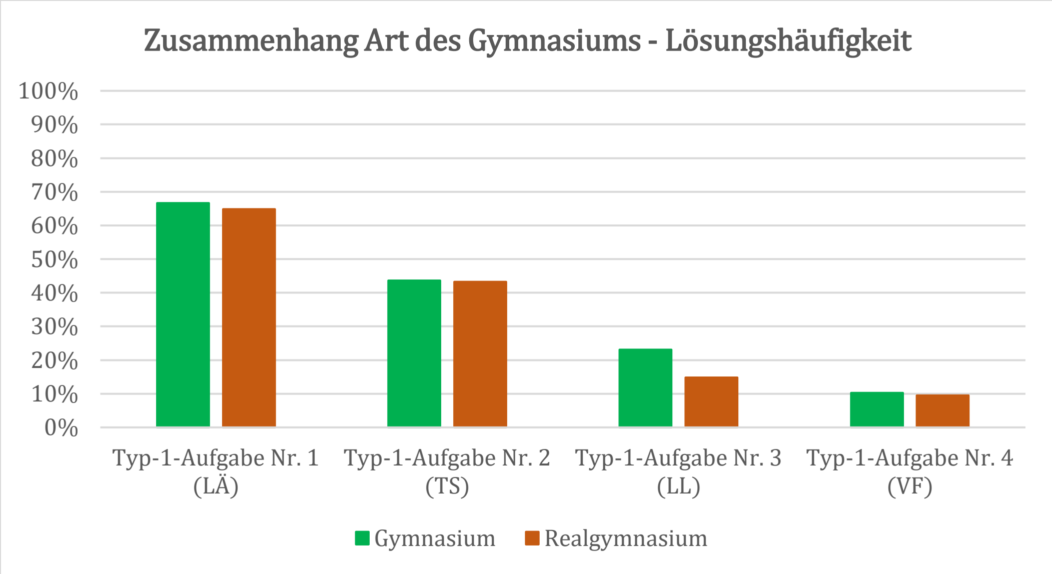


Diagramm 25: Zusammenhang zwischen Schultyp und Lösungshäufigkeit pro Typ-1-Aufgabe
Quelle: Eigene Darstellung

Es wird ersichtlich, dass die Lösungshäufigkeiten sehr ähnlich sind und kaum nennenswerte Unterschiede bestehen. Lediglich bei Aufgabe 3 besteht ein Unterschied von mehr als zwei Prozentpunkten: Rund 23% der Lernenden, die ein Gymnasium besuchen, konnten diese Aufgabe richtig lösen, während dies von jenen Befragten, die Mathematik im Realgymnasium lernen, nur rund 15% schafften. Insgesamt deuten die Ergebnisse auf eine sehr ähnliche Leistungsfähigkeit der Lernenden bezüglich der verschiedenen Arten des Gymnasiums bei Typ-1-Aufgaben zu diesem Thema hin.

7.3.10. Zusammenhang zwischen Interesse und Lösungshäufigkeit

Zum Abschluss von Kapitel 7 wird der Zusammenhang zwischen dem Interesse der Lernenden für das Kapitel „Differentialrechnung“ im Vergleich zu anderen Themengebieten und der Lösungshäufigkeit bei den vier Typ-1-Aufgaben analysiert. Diagramm 26 gibt einen Überblick über die Ergebnisse, wobei die Säulenhöhe jeweils dem relativen Anteil (in %) derjenigen entspricht, die aus der jeweiligen Gruppe (Viel interessierter, interessierter, etc.) die angegebene Aufgabe richtig lösen konnten:

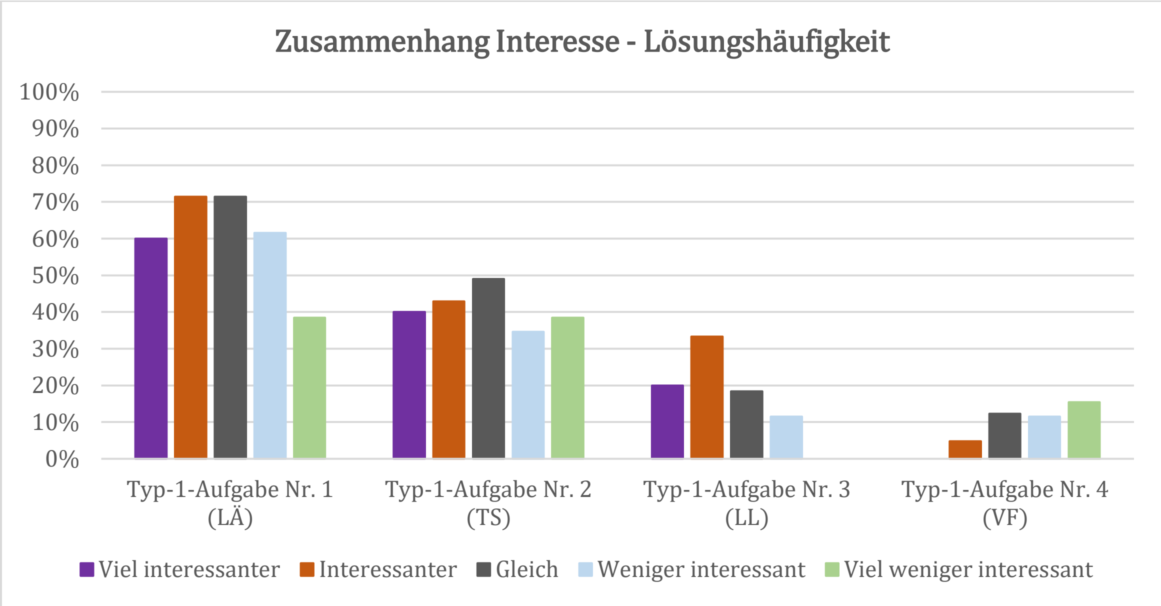


Diagramm 26: Zusammenhang zwischen Interesse und Lösungshäufigkeit pro Typ-1-Aufgabe
Quelle: Eigene Darstellung

Diagramm 26 zeigt, dass kein deutlich positiver Zusammenhang zwischen Interesse und Lösungsfähigkeit besteht. Bei keiner Frage erreichten diejenigen Schülerinnen und Schüler, die „Viel interessanter" angekreuzt haben, die höchste relative Lösungshäufigkeit. Diese Erkenntnis ist zwar mit Vorsicht zu genießen, da lediglich fünf Lernende angaben, das Kapitel „Differentialrechnung" viel interessanter zu finden, doch auch diejenigen, die „Interessanter" angekreuzt haben, schnitten nicht bzw. kaum besser ab als die restlichen Befragten. Verglichen mit den durchschnittlichen Mathematiknoten der Schülerinnen und Schüler (vgl. Kapitel 7.3.7.) spielt der Parameter Interesse also eine viel kleinere bzw. gar keine Rolle bezüglich der Lösungsfähigkeit bei Typ-1-Aufgaben.

8. Abschlussbetrachtungen

Nach der umfangreichen Darlegung der Ergebnisse des Forschungsprojekts dient Kapitel 8 dazu, die wichtigsten Ergebnisse in Kürze zusammenzufassen (Kapitel 8.1.), auf Limitationen der Studie hinzuweisen (Kapitel 8.2.) und zu guter Letzt eine Bewertung der Ergebnisse in Bezug auf die Anforderungen an Mathematikstudierende vorzunehmen.

8.1. Die wichtigsten Ergebnisse in Kürze

Zu Beginn von Kapitel 7 wurden hauptsächlich Daten präsentiert, die ausschließlich für diese Stichprobe relevant sind. Ein Ergebnis, das möglicherweise auch über diese Stichprobe hinausgehend als eine Art Stimmungsbarometer für Lernende in 7. Klassen AHS gesehen werden kann, ist jenes nach der Frage des Interesses für das Thema

„Differentialrechnung" im Vergleich zum restlichen Lernstoff. Zwar gab der Großteil der Befragten an, das Thema gleich interessant zu finden wie die restlichen Kapitel – tendenziell wird die Differentialrechnung allerdings als eher weniger interessant empfunden.

Die Befragungsergebnisse hinsichtlich des Ausprägungsgrads der vier Grundvorstellungen decken sich mit den Einschätzungen der Literatur, die einen sehr starken Fokus des Mathematikunterrichts auf lokale Änderungsrate und Tangentensteigung ortet (z.B. Oldenburg 2016: 56), denn diese beiden Grundvorstellungen sind auch jene, die bei den Lernenden am besten ausgeprägt sind. Vergleicht man den Ausprägungsgrad der vier Grundvorstellung der Lernenden dieser Untersuchung mit jenen von Drösemeier et al. (2018) und Greefrath et al. (2019), lassen sich durchaus Parallelen finden, auch wenn bei den beiden zitierten Projekten die Tangentensteigung die dominierende Grundvorstellung war. Gute Noten in Mathematik und ein hohes Interesse für das Thema „Differentialrechnung" beeinflussen den Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen positiv. Die Grundvorstellungen weiblicher Lernenden in dieser Stichprobe waren tendenziell etwas besser ausgeprägt, wodurch durch den hohen Schülerinnenanteil an Gymnasien auch die Lernenden des Gymnasiums etwas höhere ausgeprägte Grundvorstellungen nachweisen konnten als jene, die ein Realgymnasium besuchten.

Kapitel 7.3. befasste sich mit dem Zusammenhang zwischen dem Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen und der Lösungsfähigkeit der Lernenden. Eine Analyse der Kapitel 7.3.1. bis 7.3.6. zeigt, dass besser ausgeprägte Grundvorstellungen auch in einem höheren Ausmaß zum Lösen aktiviert werden können. Belegbar ist diese Vermutung u.a. damit, dass Typ-1-Aufgaben Nr. 1 & 2 deutlich häufiger gelöst werden konnten als die anderen beiden. Diese Aufgaben sprechen die bei den Lernenden am besten ausgeprägten Grundvorstellungen der lokalen Änderungsrate und Tangentensteigung besonders an. Dadurch kann vermutet werden, dass diese beiden Grundvorstellungen auch in hohem Maß zum Lösen eingesetzt werden können, auch wenn die Grundvorstellung der Tangentensteigung nicht immer zum Lösen aktiviert werden konnte (vgl. Kapitel 7.3.5.). Außerdem ergibt sich bei der Unterscheidung der Befragten zwischen jenen, die eine Aufgabe richtig bzw. falsch lösen konnten, die deutliche Tendenz, dass Lernende, die die richtige Antwort ankreuzten, auch besser ausgeprägt Grundvorstellungen besitzen.

Erwartungsgemäß konnten die Befragten Typ-1-Aufgaben häufiger lösen, je besser ihre Mathematiknote ist. Verglichen damit hat – ebenso wie das Geschlecht und die Art des Gymnasiums – das Interesse am Kapitel „Differentialrechnung“ viel weniger Einfluss auf die Lösungsfähigkeit.

8.2. Limitationen des Projekts

Neben diesen interessanten Erkenntnissen ist es dennoch im Sinne einer ehrlichen, wissenschaftlichen Arbeit notwendig, Schwächen und daraus folgende Limitationen des Projekts in Kürze darzulegen. Die vorgestellten Ergebnisse und gezogenen Schlussfolgerungen gelten vollumfänglich nur für die der Befragung zugrundeliegenden Stichprobe, es lassen sich jedoch trotzdem allgemeinere Thesen und Vermutungen davon ableiten.

Bei der Thematik der Bestimmung des Ausprägungsgrades der vier Grundvorstellungen liegt eine Schwäche der Befragung darin, dass aus Zeitgründen lediglich drei Einschätzungsaufgaben gestellt wurden. Dadurch könnten sich beispielsweise durch den Austausch einer einzigen Frage die Ergebnisse doch recht deutlich ändern, was zeigt, dass die Verlässlichkeit der erzielten Ergebnisse nicht optimal ist. Eine ähnliche Problematik ist bei der Befragung der Expertinnen und Experten zu beobachten, da die Einschätzungswerte aufgrund von lediglich vier Teilnehmerinnen und Teilnehmern auch einer gewissen Unsicherheit unterliegen. Überdies ist es manchmal nur schwer möglich, dass eine Interpretationsmöglichkeit einer mathematischen Situation genau nur eine Grundvorstellung anspricht – für die Vermeidung dieses Problems stellten die Aufgaben von Greefrath et al. (2021) eine gute Inspirationsquelle dar.

Auch bezüglich der Lösungsfähigkeit der befragten Lernenden bei Typ-1-Aufgaben gibt es Aspekte der Studie, die bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden müssen. Manche Problematiken sind dabei unausweichlich, wie beispielsweise der Einfluss der Aufgabenstellung auf die Lösungshäufigkeiten. So spielen Faktoren wie z.B. der Anteil mathematischer Fachsprache in der Aufgabenstellung und den Antwortmöglichkeiten auch eine Rolle in Bezug auf die Lösungsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler. Ein weiterer Faktor, der für Ungenauigkeiten im Ergebnis sorgen könnte, ist, dass einer Aufgabe nicht genau eine Grundvorstellung zugeordnet werden kann, so wie es allerdings aus praktischen Gründen gehandhabt wurde. Dies muss mitgedacht werden bei der Analyse und Interpretation des Zusammenhangs zwischen dem Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen und der Lösungsfähigkeit. Nichtsdestotrotz kann aufgrund einer detaillierten, vielschichtigen Analyse der erhobenen Daten ein positiver Zusammenhang zwischen Ausprägungsgrad der Grundvorstellungen und Lösungsfähigkeit vermutet werden.

8.3. Bewertung der Ergebnisse mit Blick auf die Fachmathematik

Abschließend werden einige Ergebnisse des Projekts in Beziehung zu den Anforderungen an Studierende der Mathematik im ersten Semester gesetzt, wobei auch die Rolle der zentralen Reifeprüfung kritisch diskutiert wird.

Der Mathematikunterricht an AHS Oberstufen bereitet viele Schülerinnen und Schüler auf ein Mathematikstudium bzw. auf Studienrichtungen mit großem mathematischen Anteil vor. Deshalb stellt sich die Frage, was diese Schülerinnen und Schüler in Mathematik lernen sollen, um bestmöglich auf eine universitäre Ausbildung vorbereitet zu sein.

In Bezug auf das in dieser Arbeit vorgestellte Befragungsprojekt kann festgehalten werden, dass deutlich erkennbar ist, welche Art von Aufgaben von den Lernenden in der Schule geübt wurden und welche nicht. So sind Typ-1-Aufgaben Nr. 1 & 2 Beispiele, die in ähnlicher Form auch bei einer schriftlichen Reifeprüfung gestellt werden könnten, sehr häufig richtig gelöst worden. Bei den Typ-1-Aufgaben Nr. 3 & 4, die auf die weniger thematisierten Grundvorstellungen der lokalen Linearität und des Verstärkungsfaktors abzielen, ist die Lösungshäufigkeit auffallend gering, obwohl die Aufgaben aus fachmathematischer Perspektive wohl nicht bzw. kaum schwieriger sind. Weder Lehrende noch Lernende sollen dabei kritisiert werden – Beispiele solcher Art lösen zu können ist schlichtweg nicht notwendig für die Reifeprüfung, die für Lehrende und Lernende gleichermaßen das übergeordnete Ziel markiert. Deswegen wird es beispielsweise die Regel sein, dass Mathematikstudierende für das Lehramt Ende des vierten Semesters damit überrascht werden, dass die Ableitung auch ohne den Aspekt des Grenzwerts des Differenzenquotienten gebildet werden kann. Als weiteres Beispiel lässt sich die Behandlung des Konzepts der Stetigkeit anführen, das in der Schule wie in meinem Fall oft mit dem „Nicht-absetzen-müssen“ des Bleistifts beim Zeichnen des Graphen einer Funktion gleichgesetzt wird. Auch damit soll keiner Lehrperson ein Vorwurf gemacht werden, weil Stetigkeit durch die curricularen Vorgaben und den zu erreichenden Kompetenzen für die Reifeprüfung kaum mehr im Schulunterricht vorkommt (Greefrath et al. 2016: 140).

Bei den bisherigen Ausführungen wird klar, dass es einen Widerspruch zwischen dem Hintrainieren auf die Matura und der bestmöglichen Vorbereitung der Lernenden auf eine universitäre Ausbildung gibt. Genau diese Meinung äußerte auch Mathematikprofessor und ÖVP Bildungssprecher Dr. Rudolf Taschner in einem Interview 2018, in dem er das vermehrte „teaching to the test“ im Fach Mathematik kritisiert, weil das Mathematikwissen darunter leide (Neuhauser 2018).

Andererseits ist eine Ausdehnung und Erschwerung des Lehrstoffs in Mathematik sicherlich kein anzustrebendes Ziel, wenn man bedenkt, dass Mathematik bereits in der aktuellen Form Angstfach Nummer eins in der Schule ist. Das deutsche Modell der Grund- und Leistungskurse könnte dazu beitragen, dass talentierte und interessierte Lernende mehr und schwierigeren Stoff lernen, um die Differenz des geforderten Leistungsniveaus zwischen Schule und Universität zu minimieren. Eine bereits bestehende Möglichkeit für Lernende ist, Mathematik als zweijährigen Wahlpflichtgegenstand zu wählen, um sich noch besser auf einen Studiengang mit Mathematikschwerpunkt vorbereiten zu können.

Weitere Argumente, die gegen mehr und schwierigere Mathematik in der AHS Oberstufe sprechen, sind die teilweise erschreckend schwachen Ergebnisse bei Studienanfängerinnen und Studienanfängern in Mathematik. Offenbar bestehen bereits in der elementaren Mathematik erhebliche Defizite, sodass zusätzlicher, komplexerer Lernstoff kontraproduktiv sein dürfte. Abel & Weber (2014) geben beispielsweise an, dass nur die Hälfte der Befragten Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Hochschule Esslingen im Sommersemester 2012 die richtige Lösung der Aufgabe „$2^{-3} = ?$“ in Dezimaldarstellung angeben konnte.

Die womöglich realistischste und effektivste Möglichkeit, Lernende auf ein Mathematikstudium vorzubereiten, sind Vorkurse, in denen zentrale Kapitel des Schulstoffs noch einmal wiederholt und Fehler ausgemerzt werden können. Die Ergebnisse eines solchen Vorkurses, der an der Fachhochschule Technikum Wien durchgeführt wurde, werden von Embacher & Heiss (2016) vorgestellt. Es zeigt sich, dass die Studierenden beim Test nach dem Kurs in beinahe allen Themenbereichen wesentlich besser abgeschnitten haben als vor dem Kurs (Embacher & Heiss 2016: 285).

Insgesamt zeigt sich mit Blick auf das Befragungsprojekt zum Thema Ableitung, dass sehr einseitige Vorstellungen bei den Befragten ausgeprägt sind und verständlicherweise wohl meist typische, bei der Reifeprüfung zu erwartende Aufgabenstellungen geübt wurden. Eine intensivere Beschäftigung mit alternativen Vorstellungen und weniger gängigen Aufgaben zu diesem wäre zwar in Anbetracht einer möglichen weiterführenden universitären Ausbildung wünschenswert, ist aber aufgrund der bereits genannten Argumente weder möglich noch zielführend. Möglichkeiten für Lernende, sich noch besser auf ein Studium mit Mathematikschwerpunkt vorzubereiten, sind mit dem zweijährigen Wahlpflichtgegenstand Mathematik und möglichen Vorkursen an Hochschulen vor dem Beginn des ersten Semesters immerhin gegeben.

Fazit

Nach einleitenden Kapiteln, in denen u.a. die historische Entwicklung des Analysis-Unterrichts und die Entstehung der beiden Aspekte der Ableitung skizziert wurden, konnten in Kapitel 4 bei der Analyse dreier gängiger Schulbücher interessante Ergebnisse erzielt werden. Ein Abgleich mit aktueller fachdidaktischer Literatur ermöglichte es, Stärken, Schwächen und Besonderheiten der jeweiligen Bücher in den Kapiteln, die sich mit Differentialrechnung beschäftigen, herauszuarbeiten.

In Kapitel 5 wurde die theoretische Basis für das Befragungsprojekt gelegt, indem die Aspekte und Grundvorstellungen der Ableitung mit Hilfe einer breiten Auswahl an theoretischen und praktischen Forschungen erläutert wurden. In Form von möglichen Fehlvorstellungen der Lernenden zu den einzelnen Grundvorstellungen und konkreten Unterrichtsvorschlägen zum Aufbau ebendieser sind in Kapitel 5 auch zahlreiche professionsrelevante Aspekte enthalten.

Die Ergebnisse des Befragungsprojekts wurden in Kapitel 7 im Detail dargelegt – eine Zusammenfassung der wichtigsten Erkenntnisse erfolgte bereits in Kapitel 8.1. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle lediglich die Beantwortung der beiden in der Einleitung formulierten Forschungsfragen vorgenommen.

Für die Beantwortung von Forschungsfrage 1 werden die Ergebnisse aus Tabelle 1 bzw. Diagramm 8 zu Rate gezogen. Dabei ist festzustellen, dass die Grundvorstellungen der lokalen Änderungsrate und der Tangentensteigung besonders gut ausgeprägt sind, während jene der lokalen Linearität und des Verstärkungsfaktors kleiner Änderungen deutlich niedrigere Werte erreichten. Dieses Ergebnis deckt sich – abgesehen von einigen kleinen Unterschieden – mit jenen Studien von Greefrath et al. (2021) und Drösemeier et al. (2018).

Forschungsfrage 2 kann für die vorhandene Stichprobe eindeutig beantwortet werden: Bei den vier analysierten Typ-1-Aufgaben zeigte sich die klare Tendenz, dass Lernende, die eine Frage richtig beantworten konnten, zumeist auch deutlich stärker ausgeprägte Grundvorstellungen besitzen. Außerdem sind die Lösungshäufigkeiten bei den Aufgaben, die auf die besonders gut ausgeprägten Grundvorstellungen abzielen, besonders hoch und bei jenen Aufgaben, die auf die schlechter ausgeprägten Grundvorstellungen fokussieren, besonders niedrig. Es zeigt sich also, dass besser ausgeprägte Grundvorstellungen förderlich für die Lösungsfähigkeit der Lernenden bei Typ-1-Aufgaben sind. Dass eine mögliche Aktivierung einer Grundvorstellung auch stark von den situativen Eigenschaften der Aufgabe abhängt (Drösemeier et al. 2018: 1837), konnte bei dieser Untersuchung ebenso bestätigt werden und wurde anhand eines Beispiels (TS bei Typ-1-Aufgabe Nr. 3) in Kapitel 7.3.5. dargelegt.

Insgesamt bestätigen die Ergebnisse der Befragung die Vermutung, dass der Ableitungsbegriff im Unterricht sehr eindimensional behandelt und nicht in seiner kompletten Bandbreite erfahrbar gemacht wird. Umso interessanter wären zukünftige Forschungsprojekte, die den Erfolg alternativer Zugänge zur Ableitung untersuchen würden. Eine mögliche Fragestellung für ein zukünftiges Forschungsprojekt wäre beispielsweise, ob bzw. inwieweit ein auf dem Aspekt der lokalen linearen Approximation beruhender unterrichtlicher Zugang zur Ableitung Lernende befähigt, ähnliche Aufgaben wie jene, die in den Kapiteln 7.3.1., 7.3.2., 7.3.3. & 7.3.4. vorgestellt wurden, zu lösen. Besonders spannend wäre ein Vergleich mit den Ergebnissen des in dieser Arbeit vorgestellten Projekts, um Rückschlüsse darüber gewinnen zu können, ob der gegenwärtig praktizierte Unterrichtszugang zur Ableitung der einzig praktikable ist.

Referenzen

Literaturverzeichnis

Abel, H. & Weber, B. (2014). 28 Jahre Esslinger Modell – Studienanfänger und Mathematik. In I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P.R. Fischer, R. Hochmuth & W. Koepf et al. (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven* (S. 9–19). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Barzel, B. (2012). *Computeralgebra im Mathematikunterricht. Ein Mehrwert – aber wann?* Münster: Waxmann.

Bauer, L. (2011). Mathematik, Intuition, Formalisierung: eine Untersuchung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen zu $0,\overline{9}$. *Journal für Mathematik-Didaktik, 32*(1), 79–102.

Blum, W. & Kirsch, A. (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht, 25*(1), 6–24.

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte, 32*(2), 195–232.

Blum, W. (1995). Quo vadis Analysisunterricht? Aktuelle Entwicklungen und Perspektiven für das Jahr 2000. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), 24,* 3–19.

Blum, W. & vom Hofe, R. (2016). "Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 225–254.

Blum, W., Griesel, H. & vom Hofe, R. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik, 40*(1), 123–133.

Brand, C., Dorfmayr, A., Lechner, J., Mistlbacher, A. & Nussbaumer, A. (2015). *Thema Mathematik 7.* 5. Aufl. Linz: Veritas-Verlag.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2015). Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 19–49). Berlin: Springer Spektrum.

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF). (01.09.2018). *Lehrplan AHS-Oberstufe Mathematik*. BGBl. II Nr. 71/2018. Wien. Abgerufen am 10.05.2021 von https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2018-09-01

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF). (Februar 2021a). *Mathematische Grundkompetenzen für die SRP in Mathematik (AHS).* Wien. Abgerufen am 14.05.2021 von https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=4827&token=ddec5415c590424ff8b29e9256efb30e0730c5b9

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF). (Februar 2021b). *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS).* Wien. Abgerufen am 18.05.2021 von https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=4826&token=4574fed24b889f914a68a7411172dbce06459c69

Cauchy, A.-L. (1836). *A. L. Cauchy´s Vorlesungen über die Differenzialrechnung, mit Fourier´s Auflösungsmethode der bestimmten Gleichungen verbunden.* Braunschweig: G. C. E. Meyer.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). Analysis verständlich unterrichten. In F. Padberg (Hrsg.), *Mathematik Primar- und Sekundarstufe.* Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Daume, P. & Dennhard, J. (2017). *Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht Band 2. Optionen und Ökonomische Funktionen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Dorfmayr, A., Mistlbacher, A., Sator, K. & Zillner, M. (2019a). *Thema Mathematik 7. 1. Semester.* Linz: Veritas-Verlag.

Dorfmayr, A., Mistlbacher, A., Sator, K. & Zillner, M. (2019b). *Thema Mathematik 7. 2. Semester.* Linz: Veritas-Verlag.

Dörr, J., Rolfes, T., Schmerenböck, D. & Weber, R. (2015). Gestaltungselemente in Lernpfaden zur Unterstützung des selbstgesteuerten Lernens: Ein Unterrichtsversuch am Beispiel der Einführung in die Differentialrechnung. In J. Roth, E. Süss-Stepancik & H. Wiesner (Hrsg.), *Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade als Weg zum Ziel* (S. 137–156). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Drösemeier, A., Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.G. (2018). Grundvorstellungen zur Ableitung und Integralen – eine theoretische Konzeption und empirische Überprüfung. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018.* Münster: WTM-Verlag.

Eberle, S. & Lewintan, P. (2019). Ein Vorschlag zur konsistenten Einführung der Ableitung mit der Zoom-in-Methode. *Mathematische Semesterberichte, 66*(2), 203–217.

Elschenbroich, H.-J. (2015). Die interaktive Funktionenlupe – Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung von Grundvorstellungen der Analysis. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag. Abgerufen am 25.09.2021 von https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/34574/1/BzMU15_Elschenbroich_FLupe.pdf
GeoGebra-Datei Funktionenlupe: https://www.geogebra.org/m/QxeVkgpf
GeoGebra-Datei Funktionenmikroskop: https://www.geogebra.org/m/uvxfh6pw

Embacher, F. & Heiss, C. (2016). Effizienz von Mathematik-Vorkursen an der Fachhochschule Technikum Wien – ein datengestützter Reflexionsprozess. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 277–293), Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Feudel, F. (2015). Die Ableitung als absolute Änderung? – Unterschiedliches Begriffsverständnis in Mathematik und Wirtschaftswissenschaften. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015,* Band 2. Münster: WTM-Verlag.

Freiler, P., Marsik, J., Olf, M. & Wittberger, M. (2016). *Lösungswege 7*. 2. Auflage Wien: ÖBV.

Gundlach, A. (2006). Berücksichtigung neuer Technologien im Mathematikunterricht am Beispiel des Tangentenproblems in der Differentialrechnung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 27*(1), 3–27.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. In A. Büchter & F. Padberg (Hrsg.), *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II.* Berlin: Springer Spektrum.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2021). *Test zur Erfassung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen (GV-AI), Empirische Erfassung von Grundvorstellungen zur ersten Ableitung einer Funktion an einer Stelle und zum bestimmten Integral.* Online veröffentlicht bei Archive ouverte HAL (https://hal.archives-ouvertes.fr)

Griesel, H. (1971). *Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten: 1, Mengen, Zahlen, Relationen, Topologie.* Hannover: Schroedel.

Hauke, F. (2001). Eine Kategorie zur Beschreibung möglicher Ursachen für Probleme mit dem Grenzwertbegriff. *Journal für Mathematik-Didaktik, 22*(3–4), 207–230.

Henn, H.-W. (2004). Computer-Algebra-Systeme – junger Wein oder neue Schläuche? *Journal für Mathematik-Didaktik, 25*(3–4), 198–220.

Henn, H.-W. (2018). Änderungsraten als Zugang zu den zentralen Begriffen und Resultaten der Analysis. In W. Blum, G. Greefrath & H.-S. Siller (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4. 25 Jahre ISTRON-Gruppe – eine Best-of-Auswahl aus der ISTRON-Schriftenreihe* (S. 145–160). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Herrmann, D. (2016). *Mathematik im Mittelalter. Die Geschichte der Mathematik des Abendlands mit ihren Quellen in China, Indien und im Islam.* Berlin: Springer Spektrum.

Heugl, H. (1995). Der Einfluss von Computeralgebrasystemen auf das Lehren und Lernen von Mathematik. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), 24,* 35–52.

Jahnke, H-N. (Hrsg.), Archibald, T., Bottazzini, U., Epple, M., Fraser, C., Guicciardini, N., … Thiele, R. (1999). *Geschichte der Analysis*. Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Kapper, G. (1998). *Die mathematische Unterrichtsreform am Anfang des 20. Jahrhunderts in Österreich: Die Einführung der Infinitesimalrechnung in Österreichs Mittelschulen* (Unveröffentlichte Diplomarbeit). Graz: Universität Wien.

Kirsch, A. (1979). Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung zum Ableitungsbegriff. *Der Mathematikunterricht, 25*(3), 25–41.

Kirsch, A. (1995). Pathologische Funktionen unter dem Funktionenmikroskop. *Didaktik der Mathematik, 23*, 18–28.

Klika, M., Tietze,U.-P. & Wolpers, H. (1982). *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*. Braunschweig: Vieweg.

Klika, M., Tietze, U.-P. & Wolpers, H. (1997). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis.* Braunschweig: Vieweg.

Körle, H.-H. (2012). *Die phantastische Geschichte der Analysis. Ihre Probleme und Methoden seit Demokrit und Archimedes. Dazu die Grundbegriffe von heute*. 2., verbesserte Aufl. München: Oldenbourg.

Kutleša, P. (2018). *Standardisierte Reifeprüfung. Ein Vergleich ausgewählter Staaten mit dem Schwerpunkt auf der österreichischen standardisierten Reifeprüfung im Fach Mathematik* (Unveröffentlichte Diplomarbeit). Graz: Karl-Franzens-Universität Graz.

Lenné, H. (1969). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Lotz, J., Salle, A. & Vom Hofe, R. (2015). Analysis: Leitidee Zuordnung und Veränderung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 149–184). Berlin: Springer Spektrum.

Malle, G., Koth, M., Malle, S., Salzger, B., Ulovec, A. & Woschitz, H. (2019). *Mathematik verstehen 7.* Wien: ÖBV.

Malle, G. (n. d.). Grundvorstellungen im Mathematikunterricht. Abgerufen am 08.08.2021 von https://www.imst.ac.at/imst-wiki/images/8/83/Langfassung_Grundbildung_Malle.pdf

Mamolo, A. & Zazkis, R. (2012). Stuck on convention: a story of derivative relationships. *Educational Studies in Mathematics, 81*(2), 161–177.

Marx, A. (2013). Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen – Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. *Journal für Mathematik-Didaktik, 34*(1), 73–97.

Neuhauser, J. (2018, 2. November). Rudolf Taschner: „Studienanfänger haben immer öfter unverzeihliche Rechenschwächen". *Die Presse.* Abgerufen von https://www.diepresse.com/5523369/rudolf-taschner-studienanfanger-haben-immer-ofter-unverzeihliche-rechenschwachen am 18.09.2021.

Neumann, R. (2018). *Zum Einfluss von Computeralgebrasystemen auf mathematische Grundfertigkeiten: Eine empirische Bestandsaufnahme* (Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Oldenburg, R. (2016). Differentiale als Prognosen. Eine Grundvorstellung als Ausgangspunkt analytischer Begriffsbildung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 55–82.

Roth, J. (n. d.). *Didaktik der Analysis. Kapitel 3: Ableitungsbegriff* [Vorlesungsfolien]. Universität Koblenz-Landau. Abgerufen am 20.06.2021 von https://www.juergen-roth.de/lehre/skripte/did_analysis/did_analysis_3_ableitungsbegriff.pdf

Sonar, T. (2016a). 3000 Jahre Analysis. Geschichte – Kulturen – Menschen. 2., korrigierte Aufl. In H.-W. Alten, K.-J. Förster, K.-H. Schlote & H. Wesemüller-Kock (Hrsg.), *Vom Zählstein zum Computer*. Berlin: Springer Spektrum.

Sonar, T. (2016b). Die Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton. Geschichte – Kulturen – Menschen. Mit einem Nachwort von Eberhard Knobloch. In H.-W. Alten, K.-J. Förster, K.-H. Schlote & H. Wesemüller-Kock (Hrsg.), *Vom Zählstein zum Computer*. Berlin: Springer Spektrum.

Steinbauer, R. & Süss-Stepancik, E. (2018). *Kapitel E §4 – Aspekte und Grundvorstellungen zur Differentialrechnung* [Vorlesungsfolien]. Universität Wien. Abgerufen am 10.07.2021 von https://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/WS1819/aspekte_grundvorstellungen_diffrechnung20190124.pdf

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert – Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. Eine Fallstudie aus dem computergestützten Analysisunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*(4), 257–291.

Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002). Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. In: F. Padberg (Hrsg.), *Mathematik Primar- und Sekundarstufe.* Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Weigand, H.-G. (2016). Zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs unter stoffdidaktischer Perspektive. *Mathematische Semesterberichte, 63*(1), 135–154.

Abbildungsverzeichnis

Diagrammverzeichnis

Tabellenverzeichnis