MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Entwicklung und Implementierung von Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht der AHS“

verfasst von / submitted by

Irene Baldauf, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2020 / Vienna 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 520 523 02
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) UF Mathematik UF Physik
Betreut von / Supervisor:	Doz. Dr. Franz Embacher

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich herzlichst bei allen Personen bedanken, die mich beim Schreiben der Masterarbeit und dem Finden des Themas unterstützt haben.

Meiner Familie danke ich für ihre uneingeschränkte Unterstützung während des ganzen Studiums. Meinen Studienkolleginnen und Studienkollegen möchte ich für die gemeinsame Zeit danken, in der wir oft lustige, und gleichzeitig produktive Diskussionen über die Inhalte des Studiums führten, und auch für die vielen Unternehmungen dazwischen, die Kraft und Energie schenkten. Genauso möchte ich meinen jetzigen und ehemaligen Mitbewohnerinnen und Mitbewohnern danken, die immer ein offenes Ohr für meine Ideen hatten und mir gerne helfend zur Seite standen, wenn ich kleine Experimente ausprobieren wollte.

Auslöser für den Wunsch meine Masterarbeit im mathematikdidaktischen Bereich zu schreiben, war eine Lehrveranstaltung in Physik, geleitet von Michael Malvern Hull, PhD. Er stellte mit sogenannten *Open Source Tutorials* einen speziellen Zugang zum Physikunterricht vor, was bei mir die Neugierde für ähnliche Konzepte im Mathematikunterricht weckte. Ich bedanke mich für die aufschlussreichen und ermutigenden Diskussionen über mögliche Umsetzungen.

Insbesondere gilt mein Dank auch Univ.-Prof. Dr. Michael Eichmair, der mich in meinem Vorhaben bestärkte, ein Auslandssemester anzutreten. Ich danke für das Engagement, das er Lehramtsstudierenden entgegenbringt und den konstruktiven Austausch über Ideen und Visionen.

Mein Auslandssemester absolvierte ich schließlich am Mercy College in New York. Ich möchte allen Lehrenden danken, die mich in ihren Kursen aufnahmen. Besonderer Dank gilt Dr. William Farber mit dem ich außerhalb der Kurszeiten über mathematische Themen und Anwendungen philosophieren konnte und dafür, dass er mir zum Abschluss ein Buch schenkte, welches auch in diese Arbeit eingeflossen ist. Weiterer Dank gilt Dr. Amanda Gunning und Dr. Elena Nitecki, die mich für jenes Semester in das *STEM Master Teacher Fellow Program* aufgenommen haben. Beides sind sehr hilfsbereite und inspirierende Persönlichkeiten, von denen ich mir viel über das Unterrichten von Naturwissenschaften mitnehmen konnte, was die Basis für diese Arbeit geschaffen hat.

Ein großes Dankeschön gilt außerdem meinem Betreuer Doz. Dr. Franz Embacher für die gute Zusammenarbeit. Er reagierte stets flexibel und lösungsorientiert auf aktuelle Ereignisse und half mir immer wieder mit seinen Inputs und Literaturvorschlägen Struktur in meine Arbeit zu bringen.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

„Warum muss ich in der Schule Mathematik lernen?“ Oft werden Mathematiklehrpersonen mit dieser Frage konfrontiert. Im Buch *„100 Commonly Asked Questions in Math Class“* ist dies die erste Frage, die thematisiert wird. Bei grundlegender Algebra ist die Notwendigkeit im alltäglichen Leben oft noch recht klar ersichtlich, besonders in Situationen, in denen Geld eine Rolle spielt. Doch schwieriger wird es bei fortgeschrittener Mathematik, wo die Anwendung im Alltag etwas verborgener ist. Es wird die Problematik beschrieben, dass die in der Schule vergleichsweise simple Mathematik ein falsches Bild für die Bedeutung der Mathematik in der heutigen modernen Welt vermitteln könnte.[1]

In dieser Arbeit werden Unterrichtsszenarien für den Mathematikunterricht der AHS vorgestellt, durch die Schülerinnen und Schüler ein stärkeres Gefühl für die Relevanz von Mathematik im Alltag und in der Gesellschaft entwickeln können.[2] Es soll dabei ein Bewusstsein für die Präsenz von Mathematik in den verschiedensten Berufen geschaffen werden, sodass Schülerinnen und Schüler das Beherrschen von Mathematik als wichtige Voraussetzung für viele Karrierewege verstehen lernen.

Im Fokus der vorgestellten Unterrichtssequenzen steht jeweils eine Aufgabe, in der die Schülerinnen und Schüler ein Objekt herstellen sollen, das gewisse Voraussetzungen erfüllt. Um dies zu erreichen, müssen die Schülerinnen und Schüler zwangsläufig Mathematik anwenden. Es soll nicht möglich sein, dass die Aufgabe durch reines Probieren zum Erfolg führt.

Aus der Aufgabenstellung soll nicht hervorgehen, dass Mathematik angewendet werden muss. Die für eine solche Unterrichtssequenz grundlegende Aufgabe soll so gestaltet sein, dass mathematische Berechnungen im Laufe des Entwicklungsprozesses unumgänglich werden. Der Unterschied zu ähnlichen Unterrichtsstrategien, in denen ebenfalls realistische Anwendungen in den Mathematikunterricht eingebunden werden, besteht also darin, dass nicht nur berechnet wird, wie etwas konstruiert werden müsste, sondern das tatsächliche Erstellen des Prototyps an erster Stelle steht.

Es gibt einige Unterrichts- beziehungsweise Aufgabenkonzepte, die ähnliche Ziele verfolgen. Hier wurden vor allem Konzepte aus dem deutsch- und englischsprachigen Raum als Inspiration herangezogen. Aus englischsprachiger Literatur wurde der Grundgedanke der heutzutage immer wichtiger werdenden *engineering*-Komponente aufgegriffen, die häufig fächerübergreifend mit Mathematik oder anderen Naturwissenschaften vernetzt wird. In der deutschsprachigen Literatur können wertvolle Erkenntnisse über *Modellierungs-* und sogenannte *eingekleidete Aufgaben* gewonnen werden. Zusätzlich wurden Methoden des Technik- oder Werkunterrichts für die Entwicklung der Aufgabenformate berücksichtigt. Die *Fertigungsaufgabe im Technikunterricht* diente als Ausgangspunkt für die Entwicklung des Aufgabenformats, das in dieser Arbeit vorgestellt wird. Da die Fertigungsaufgabe nicht nur in der Schule eingesetzt, sondern überwiegend auch in der Berufsausbildung relevant ist, lassen sich damit authentische Aufgaben stellen. Für den Technikunterricht in der Schule müssen die Aufgaben modifiziert werden, da oftmals die benötigten Ressourcen fehlen beziehungsweise der schulische Kontext automatisch Rahmenbedingungen schafft, die nicht zu umgehen sind. Für den Mathematikunterricht muss dieser Aufgabentyp noch weiter modifiziert werden. Diese Arbeit beschäftigt sich also mit einer möglichst profitablen Umsetzung von *Fertigungsaufgaben* im Mathematikunterricht.

[1] Vgl. Posamentier, 2013, S. 1ff

[2] Diese Behauptung wurde aufgrund von theoretischen Überlegungen getroffen. Aufgrund der aktuellen Ereignisse betreffend COVID-19 waren Forschungen in Schulklassen nicht möglich. Dies wäre jedoch eine wünschenswerte Ergänzung zu dieser Arbeit, wie im Kapitel „Forschungsdesiderate“ beschrieben.

Die Unterrichtssequenzen sind so gestaltet, dass sie in zwei beziehungsweise maximal drei Unterrichtsstunden durchführbar sind. Außerdem wird hinsichtlich Kosteneffizienz und Einfachheit der Umsetzung darauf geachtet, dass nur wenige und wenn möglich nur alltägliche Materialien benötigt werden, sodass die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Planungen auch wirklich im Regelunterricht umgesetzt werden können.

Nach der Vorstellung bereits existierender Unterrichtsverfahren und Aufgabentypen für den Mathematik- und Technikunterricht, werden allgemeine theoretischen Konzepte angeführt, die zu einem gelingenden Unterricht beitragen. Schließlich folgt die genaue Beschreibung der entwickelten *Fertigungsaufgabe für den Mathematikunterricht der AHS*. Es werden Beispielplanungen vorgestellt, die genau dieses Format umsetzen. Dabei geht es primär darum, die Kernidee der *Fertigungsaufgaben für den Mathematikunterricht* zu vermitteln und um die Inspiration für neue Aufgaben dieser Art. In den Planungen wird zur Vereinfachung das Kürzel „SuS“ für „Schülerinnen und Schüler“ verwendet. Anschließend folgt eine kurze Reflexion, sowie Forschungsdesiderate, die diese Masterarbeit ergänzen würden.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden unterschiedliche Unterrichtsverfahren und Aufgabentypen vorgestellt, die bereits im Mathematik- oder Technikunterricht Anwendung finden. Zuerst wird dem Unterschied von *Modellierungsaufgaben* zu *eingekleideten Aufgaben* Aufmerksamkeit geschenkt. Einige Konzepte aus dem Technikunterricht werden genauer betrachtet und dienen später als Basis für die Anwendung im Mathematikunterricht. Schließlich folgt ein Einblick in ein fächerübergreifendes Unterrichtsverfahren mit dem Namen *STEM-infusion*, welches ebenso eine grundlegende Idee mitbringt, die für *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* hilfreich ist. Außerdem wird das *5E Modell* vorgestellt, das Unterstützung bei der Strukturierung von Unterrichtsplanungen bietet. Am Ende wird noch eine Analyse zu den Themen Motivation und Interesse angehängt. Die Erkenntnisse werden bei den in dieser Arbeit vorgestellten Unterrichtssequenzen beachtet.

2.1 Eingekleidete Aufgaben

Sogenannte *eingekleidete Aufgaben* zählen zu den *Modellierungsaufgaben*. Jedoch sind die Zuordnungen nicht immer einheitlich. So bemängeln Humenberger und Bracke etwa, dass der Begriff *Modellieren* in der Literatur *„nicht eindeutig definiert [ist]. Manche Quellen sprechen von Modellieren, sobald „Übersetzungen“ zwischen Sachkontext und Mathematik notwendig sind“* [3]. Im Prinzip zählen zwei Aufgabentypen zu den Modellierungsaufgaben:

1. *„Ein reales Problem steht im Vordergrund bzw. im Mittelpunkt des Interesses, die Kontexte sind authentisch. Mit welcher Art Mathematik das klappen wird, ist dabei a priori gar nicht klar, nur: Mathematik kann helfen, das Problem zu analysieren, strukturieren und im besten Fall zu lösen.“* [4]

2. *„Die Mathematik steht im Vordergrund, ein dazu (mehr oder weniger) passender Kontext wurde erfunden („geschaffen“), primär zu Übungszwecken für ein bestimmtes mathematisches Teilgebiet (z.b. Gleichungen).“* [5]

In der ISTRON-Schriftenreihe wird die Einteilung in sogenannte *eingekleidete Aufgaben* und *Modellierungsaufgaben* bevorzugt. Der hier als zweites angeführte Aufgabentyp entspricht den *eingekleideten Aufgaben*. Diese findet man besonders in Schulbüchern, wenn man nach Mathematikaufgaben mit realistischen Kontext sucht. Sie werden oft als *Textaufgaben* bezeichnet. Der Realitätsbezug dieser Aufgaben ist jedoch nicht ganz lupenrein. [6]

„Das Sachproblem bzw. dessen Lösung steht nicht ernsthaft im Mittelpunkt des Interesses; es sind nur Texteinkleidungen einer Formel oder eines Kalküls („Textgleichungen“), so dass diese zur gerade durchgenommenen Mathematik passen (um diese mathematischen Inhalte geht es primär!).“ [7]

Greefrath gibt als Beispiel folgende Aufgabenstellung: *„In den zylinderförmigen Behälter im Wasserturm von Norderney passen 500000 Liter Wasser. Der Durchmesser beträgt 8,80 m. Berechne die maximale Füllhöhe!“* [8] Der hier beschriebene Wasserturm existiert tatsächlich, und verfügt über exakt die hier angegebenen Daten. Es handelt sich also um eine Aufgabe mit Realitätsbezug.

[3] Humenberger & Bracke, 2017, S. V
[4] Ebd.
[5] Ebd.
[6] Vgl. ebd., S. 109
[7] Ebd.
[8] Greefrath, 2007, S. 27

Jedoch wird sie dadurch nicht automatisch zur *Modellierungsaufgabe*. Schließlich ist der Realitätsbezug für die Lösung der Aufgabe vollkommen belanglos. Wären dieselben Daten in einem anderen Kontext gegeben, würde sich an der Lösung der Aufgabe nichts ändern. Sie unterscheidet sich auch nicht von der Aufgabe, wenn sie gänzlich ohne Kontext wäre und einfach der Durchmesser und das Volumen eines Zylinders angegeben sind, wovon dann die Höhe des Zylinders berechnet werden soll. Da es hier also nicht nötig ist ein Realmodell (siehe Modellierungskreislauf auf Seite 8) zu bilden, wird diese Aufgabe als *eingekleidete Aufgabe* bezeichnet.[9]

Auch wenn die dargestellte realistische Situation in Wahrheit relativ künstlich konstruiert ist oder für die Aufgabe nicht relevant ist, gibt es trotzdem Gründe solche Aufgaben im Mathematikunterricht anzuwenden. Einerseits beanspruchen diese *eingekleideten Aufgaben* im Vergleich zu authentischeren Aufgaben weniger Zeit in der Durchführung. Es können im Normalfall also gleich mehrere Aufgaben dieser Art in einer einzigen Unterrichtsstunde behandelt werden und eignen sich deshalb besonders als „Übungsaufgaben". Außerdem fördern diese Aufgaben die Flexibilität der Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf das Übersetzen von sprachlichen Zusammenhängen in mathematische Formulierungen, und umgekehrt.[10]

Eingekleidete Aufgaben haben also durchaus Berechtigung im Mathematikunterricht. Je nachdem, wie sie eingesetzt werden, kann der Mehrwert dieser Aufgaben gesteigert werden. So soll im Unterricht zum Beispiel direkt angesprochen werden zu welchem Zweck *eingekleidete Aufgaben* bearbeitet werden. Dabei soll mit den Schülerinnen und Schülern offen diskutiert werden, dass es sich bei *eingekleideten Aufgaben* nicht um realistische Probleme handelt, die genau in dieser Form in der Realität anzutreffen sind. Jedoch eignen sie sich sehr gut für Übungszwecke und fördern die Fähigkeit Text in mathematische Sprache zu übersetzen. Die Lehrperson sollte allerdings beachten, dass *eingekleidete Aufgaben* nicht der einzige Aufgabentyp mit Realitätsbezügen bleibt, sondern hin und wieder im Unterricht Aufgaben einfließen lassen, die tatsächlich in der Realität vorkommen. Nur mit authentischen Aufgaben verstehen die Schülerinnen und Schüler Mathematik als nützliches und wichtiges Hilfsmittel, das in der Realität und somit im späteren (Berufs-)Leben oft Verwendung findet.[11]

2.2 Modellierungsaufgaben

„Bei Modellierungsaufgaben steht die authentischere Realsituation im Mittelpunkt, das Strukturieren der Aufgabe, das tiefere und analysierende Nachdenken über: Wie kann Mathematik helfen, das Problem zu beschreiben, zu strukturieren, zu analysieren,..., zu lösen?[12]. Ein *Modellierungskreislauf* veranschaulicht in idealisierter Art, wie die Realsituation mathematisch aufgearbeitet werden kann. Den Kern des Modells bildet die Übersetzung der realen Situation in ein reales Modell, welches schließlich in ein mathematisches Modell überführt wird und daraus auch das mathematische Resultat erhalten wird. Dieses Ergebnis muss schließlich im Kontext der realen Situation gedeutet werden.[13] Die Details des siebenschrittigen Modellierungskreislaufes nach Blum und Leiß können in Abbildung 1 auf Seite 8 eingesehen werden[14].

Das oben beschriebene Wasserturm-Beispiel würde also zu einer *Modellierungsaufgabe* werden, wenn die Aufgabenstellung so verändert wird, dass der Inhalt der Aufgabe nicht mehr beliebig austauschbar wäre. Dies erreicht man zum Beispiel, wenn die Schülerinnen und Schüler ein Foto

[9]Vgl. ebd., S. 27f
[10]Vgl. Humenberger & Bracke, 2017, S. 109
[11]Vgl. ebd.
[12]Ebd., S. 109f
[13]Vgl. Eilerts & Skutella, 2018, S. 100
[14]Blum & Leiß, 2005, zitiert nach Eilerts & Skutella, 2018, S. 133

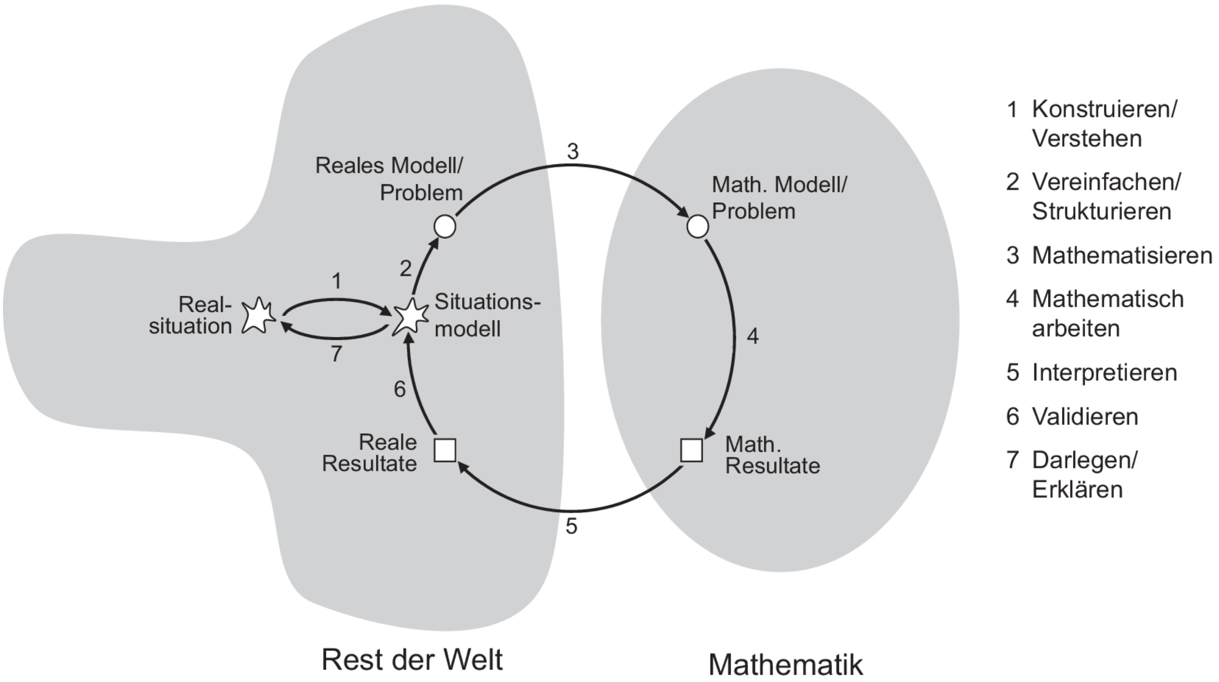


Abbildung 1: Modellierungskreislauf

eines Schildes vor dem Wasserturm, auf dem die Eckdaten des Turms grafisch abgebildet sind, interpretieren sollen. Der Realitätsbezug ist durch das Foto klar ersichtlich. Um Aussagen über die Situation treffen zu können, muss die reale Situation, wie etwaige Wölbungen, Zu- oder Abflüsse des Turms, vereinfacht werden um anschließend im mathematischen Modell arbeiten zu können und beispielsweise das Volumen des als Quader oder Zylinder modellierten Wasserturms zu berechnen. Wesentlich bei *Modellierungsaufgaben* ist, dass die Berechnungen Einfluss auf die Realität haben könnten. In diesem Falle könnte etwa bei einer falschen Angabe auf dem Schild ein Brief an die Leitung des besagten Wasserwerks geschrieben werden um auf den Fehler hinzuweisen.[15]

Analysen von Unterrichtssequenzen, in denen *Modellierungsaufgaben* von den Schülerinnen und Schülern selbstständig bearbeitet wurden, haben gezeigt, dass beim Bearbeiten der Aufgaben wichtige Erkenntnisse gewonnen werden. Durch die Charakteristik des Aufgabentyps werden die Schülerinnen und Schüler folgende *Erfahrungen* machen:

- **Erfahrung 1:** *„In Modellierungssituationen kann es einerseits viele richtige Ergebnisse geben, andrerseits können richtige Ergebnisse falsch sein.“* [16]
- **Erfahrung 2:** *„Mathematische Modelle ermöglichen die Berechnung von Prognosen, machen aber den Rückbezug zur Wirklichkeit notwendig, ein „Passendmachen“ der Ergebnisse ist ein Modellierungsfehler.“* [17]
- **Erfahrung 3:** *„Wenn die schmutzige Welt im Spiel ist, passen meist unterschiedliche Modelle mit entsprechend differierenden Prognosen. Gute Passung zu den Messpunkten ist nicht alleiniges Kriterium, es sollten durch die Realsituation gegebene Nebenbedingungen berücksichtigt werden. Es gibt Gütekriterien für Modelle.“* [18]

[15] Vgl. Greefrath, 2007, S. 28f
[16] Henn & Meyer, 2014, S.18
[17] Ebd., S.22
[18] Ebd., S.23

- **Erfahrung 4:** *„Es gibt unterschiedliche Qualitäten der Modellierung. Gelingt es, innere Wirkmechanismen zu erfassen, ist dies besser als eine alleinige Beschreibung. Ein Modell kann besser sein, obwohl es schlechter zu den Daten passt als ein Konkurrent. Nicht erwartete oder auch erhoffte Konsequenzen eines Modells für die Realität sind kein Falsifikator.“*[19]

Je nachdem, welche Art von Realitätsbezügen in den *Modellierungsaufgaben* gewählt werden, können damit unterschiedliche Ziele erreicht werden. Diese verschiedenen *Perspektiven* des Modellierens erfordern dementsprechend auch unterschiedliche Aufgaben. Folgende Liste nach Siller, Greefrath und Blum gibt einen Überblick darüber: [20]

- *„angewandtes Modellieren“*
  - Ziel: besseres Verständnis der Welt
  - Beispiele: konkret und authentisch (wie z.B. Mathematik im Kontext von Einkaufen, Zeitungslesen, Ampelschaltungen, Briefpapierdesign, Aktienkursen, Straßentrassierungen, Computertomographie, Sportwetten, Regenbogen oder Tests)
- *„didaktisches Modellieren“*
  - Ziel: Kompetenzerwerb
  - Beispiele: kognitiv reichhaltig
- *„sozio-kritisches Modellieren“*
  - Ziel: Verständnis und kritische Beleuchtung der Rolle der Mathematik in der Gesellschaft
  - Beispiele: authentisch (wie z.B. die Preisgestaltung des öffentlichen Verkehrs oder die Abwägung zwischen Bahn- und Autofahren)
- *„epistemologisches Modellieren“*
  - Ziel: besseres Verständnis der Mathematik als Wissenschaft
  - Beispiele: erkenntnistheoretisch reichhaltig (wie z.B. die Muster in Kleidungsstücken unterschiedlicher Völker
- *„pädagogisches Modellieren“*
  - Ziel: mit Realitätsbezügen Begeisterung für Mathematik wecken
  - Beispiele: ansprechende Textaufgaben (die auch erkennbar eingekleidet sein dürfen)
- *„konzeptuelles Modellieren“*
  - Ziel: besseres Verständnis mathematischer Inhalte
  - Beispiele: mathematisch reichhaltig (wie z.B. Taxitarife auf Sekundarstufen-I-Niveau, Wachstum von Populationen auf Sekundarstufen-II-Niveau oder wie optimale Verpackungen oder Fußballgeometrie auf allen Niveaus)

[19] Ebd., S.26
[20] Vgl. Siller, Greefrath & Blum, 2018, S. 6f

Grob zusammengefasst zeichnen sich *Modellierungsaufgaben* also dadurch aus, dass die Schülerinnen und Schüler einen Sachverhalt beschreiben und analysieren lernen, um passende mathematische Modelle zu wählen. Dabei steht die Realsituation im Mittelpunkt und es kann ein besseres Verständnis im innermathematischen Bereich, sowie der Anwendungen im Alltag und der Rolle der Mathematik in der Gesellschaft erreicht werden. Trotz authentischem Realitätsbezug kann jedoch nicht sichergestellt werden, dass die Schülerinnen und Schüler die behandelte Aufgabe als interessant oder *lebensrelevant* wahrnehmen (mehr dazu im Kapitel *Motivation und Interesse*). Die Wichtigkeit könnte von Schülerinnen und Schülern stärker wahrgenommen werden, wenn sie durch eine andere Aufgabe verleitet sind, mathematische Modellierungen vorzunehmen. So entstand die Idee eine *Fertigungsaufgabe* im Mathematikunterricht einzusetzen, da dort zur Herstellung des Produkts zuerst einige Annahmen und Überlegungen getroffen werden müssen und schließlich Berechnungen durchgeführt werden, die einer *Modellierungsaufgabe* ähneln.

2.3 Technikspezifische Unterrichtsverfahren

Es gibt einige Unterrichtsverfahren beziehungsweise Aufgabentypen, die speziell für den Technikunterricht entwickelt wurden. Henseler und Höpken unterscheiden sieben Unterrichtsverfahren, wobei vier davon auch in anderen Unterrichtsfächern eingesetzt werden, nämlich die **technische Analyse**, das **technische Experiment**, die **technische Erkundung** und die **technische Bewertung**. In anderen Unterrichtsfächern nicht vertreten sind die **Konstruktionsaufgabe**, die **Herstellungsaufgabe** und die **Konstruktions- und Herstellungsaufgabe**.[21] Genau diese drei Aufgabentypen werden nun aber relevant und es wird analysiert, wie diese im Mathematikunterricht eingesetzt werden könnten. Hierfür sei als Ausgangspunkt die Beschreibung der Aufgabentypen im Technikunterricht angeführt.

Die **Konstruktionsaufgabe** ist eine *„wesentliche Methode im Technikunterricht [...]; sie entspricht einer wesentlichen technischen Handlung, dem Konstruieren. Im technischen Problemlösungsprozeß betont sie das Erfinden, Entwerfen und Gestalten, wobei dem Schüler zur Lösung der Aufgabe eine große Selbständigkeit eingeräumt wird. Diese Methode fördert beim Schüler schöpferisches Problemlösen und Kreativität und erlaubt eine Bewertung des Ergebnisses anhand von Kriterien, die der Schüler selbst am Anfang des Lösungsprozesses aufgestellt hat.“* [22]

Die **Herstellungsaufgabe** ist ein *„wichtiges Unterrichtsverfahren des Technikunterrichts, bei der der Schüler planvoll und gezielt eine gegenständliche Lösung zu einem vorgegebenen Problem fertigt. Sie entspricht einer wesentlichen technischen Handlung, dem Produzieren. Der Schüler plant und organisiert zunehmend selbständig, den Fertigungsablauf, führt ihn durch und bewertet anschließend.“* [23]

Die **Konstruktions- und Herstellungsaufgabe** *„verknüpft die didaktischen Eigenschaften der Konstruktionsaufgabe und der Herstellungsaufgabe. Der Schüler plant, entwirft und stellt einen technischen Gegenstand her. Anschließend überprüft er, ob der von ihm gebaute Gegenstand die in der Aufgabe gestellten Funktionen erfüllt. Sowohl das Ergebnis als auch der eingeschlagene Weg können beurteilt werden. Diese Methode entspricht zwei wesentlichen technischen Handlungen, dem Konstruieren und dem Produzieren.“* [24]

Die **Konstruktions- und Herstellungsaufgabe** wird als eines der komplexeren Unterrichtsverfahren bezeichnet, da zwei technische Handlungen kombiniert werden. Das Herstellen stellt sich

[21] Vgl. Henseler & Höpken, 1996, S. 53
[22] Ebd., S. 66
[23] Ebd., S. 73
[24] Ebd., S. 79

als Evaluation des Konstruktionsprozesses heraus. Wurden beim Konstruieren gewisse Aspekte nicht berücksichtigt oder der falsche Ansatz gewählt, erhält man durch das hergestellte Produkt meist noch im Herstellungsprozess Rückmeldung darüber. Gemachte Fehler, die hier entdeckt werden, können also als Chance gesehen werden, die Konstruktion gezielt zu verbessern. Dieses Aufgabenformat weist Ähnlichkeiten mit den Tätigkeiten auf, die Personen in handwerklichen Berufen ausführen, deren Aufgabe es ist, Gegenstände zu entwerfen und diese anschließend zu realisieren. Die Implementierung einer solchen Aufgabe im Unterricht veranschaulicht den Zusammenhang zwischen Kopf- und Handarbeit. Damit wirkt es dem Bild entgegen, dass diese Arbeiten unabhängig voneinander sind, welches in unserer Gesellschaft weit verbreitet ist.[25]

Im Technikunterricht wird die Konstruktions- und Herstellungsaufgabe zur Erreichung fachspezifischer Ziele eingesetzt. Diese werden in drei Kategorien eingeteilt. Zu *Bewältigung des technischen Alltags* zählen unter anderem das Bedienen von Maschinen oder der Beachtung von notwendigen Sicherheitsvorkehrungen bei allen Arbeitsschritten. *Technische Mündigkeit* beschäftigt sich vor allem mit der Berücksichtigung von Normen während des ganzen Prozesses. Erst bei dem *technischen Grundverständnis* werden Lernziele angesprochen, die auch für den Mathematikunterricht relevant sein könnten. So ist das Erkennen und Anwenden von allgemeinen Strukturen des technischen Prozesses ein mathematischer Vorgang. Außerdem soll die Wahrnehmung über die Bedeutung der Technik beim Erlernen und Ausüben von Berufen gestärkt werden.[26] Dies würde also einen guten Ausgangspunkt für Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht darstellen, wenn mathematische Inhalte zur erfolgreichen Konstruktion des Produkts angewendet werden müssen.

Im Kompendium von Pahl, welches 59 verschiedene Ausbildungs- und Unterrichtsverfahren umfasst, lässt sich von den sieben Unterrichtsverfahren von Henseler und Höpken nur die **Konstruktionsaufgabe** wiederfinden. Allerdings weist die sogenannte **Fertigungsaufgabe** Ähnlichkeiten zur **Herstellungsaufgabe** beziehungsweise **Konstruktions- und Herstellungsaufgabe** von Henseler und Höpken auf. Es wird auch angemerkt, dass die **Fertigungsaufgabe** im schulischen Kontext oft mit **Herstellungsaufgabe** oder **Werkaufgabe** bezeichnet wird. Werfen wir also wieder einen Blick auf die Beschreibungen dieser Aufgabentypen:

Bei der **Konstruktionsaufgabe** wird *„ein typisches technisches Problem mittels problemorientierter Aufgabenstellung in Form eines Modells, einer Skizze oder einer Zeichnung als Konstruktion gelöst werden. Neben der Aufgabenstellung werden die benötigten Eingangsdaten, gegebenenfalls Zeichnungen sowie Literatur zur Verfügung gestellt.“* [27]

Bei der **Fertigungsaufgabe** liegt der Fokus auf der *„Herstellung von technischen Bauteilen, Baugruppen oder Geräten und Anlagen. Die Fertigungsaufgabe beginnt mit dem Erkennen und Analysieren eines Fertigungsauftrages und hat die Herstellung eines Produktes zum Ziel. Sie schließt eine Fertigungsplanung ebenso ein, wie die anschließende Überprüfung und Bewertung des Produktes unter ökologischen wie ökonomischen Aspekten.“* [28]

Pahl betont, dass es bei einer Fertigungsaufgabe der Schwerpunkt auch direkt beim Fertigungsprozess liegen kann. Dies wird besonders deutlich, wenn der Fertigungsprozess beispielsweise simuliert wird und nicht selbst durchgeführt wird. Es handelt sich laut Pahl also auch um eine Fertigungsaufgabe, wenn der Gegenstand oder das Produkt in der Realität gar nicht hergestellt wird. Dies stellt eine der Möglichkeiten dar, wie Fertigungsaufgaben im Gegensatz zur Anwen-

[25] Vgl. ebd.
[26] Vgl. ebd., S. 79f
[27] Pahl, 2007, S. 204
[28] Ebd., S. 122

dung in der Berufsausbildung für die Schule modifiziert werden können, sodass sie im Rahmen der schulischen Ressourcen umsetzbar sind.[29]

Es können zwei Typen von Fertigungsaufgaben unterschieden werden. Die *„**ausführende Fertigungsaufgabe** stellt eine Ausformung dar, bei der die Fertigungsplanung weitgehend vorgegeben ist. Das Lernen wird deutlich rezeptiv, und der Akzent wird auf die Vorbereitung und Durchführung der Fertigung gelegt. Die Verlaufsstruktur wird im praktischen Vollzug reduziert. Bei **stärker problembezogen angelegten Fertigungsaufgaben** werden dagegen alle Etappen ganz entfaltet. Wenn die Auszubildenden bzw. Schüler auch die Phasen der Planung reflektieren, kann ihnen die methodische Struktur der Fertigungsaufgabe selbst bewusst werden."* [30]

Die Lernziele, die durch das Ausführen einer Fertigungsaufgabe erreicht werden, sind hauptsächlich technischer Natur. Chronologisch geordnet erreichen die Lernenden die Kompetenzen einen Fertigungsauftrag erfassen und verstehen zu können, die Fertigung des Produkts dann detailliert planen zu können und dabei auch mögliche auftretende Probleme schon zu beachten, sowie bei der Fertigung an sich gleichzeitig zu kontrollieren, ob das gewünschte Ergebnis erreicht wird. Schließlich soll die Durchführung der Fertigungsaufgabe Ausgangslage für eine Reflexion bezüglich zukünftiger Fertigungsabläufe sein, um diese optimieren und auf andere Produkte übertragen zu können.[31]

2.4 STEM-infusion

STEM-infusion beschreibt ein aus den USA stammendes Unterrichtskonzept zur Verknüpfung verschiedener Unterrichtsfächer. Bei dem Wort *STEM* handelt es sich um ein Akronym, das sich aus den Begriffen *Science*, *Technology*, *Engineering* und *Mathematics* zusammensetzt. Der Ausgangspunkt einer Unterrichtssequenz nach diesem Konzept ist eine sogenannte *design challenge*. Hierfür sollen Ereignisse aufgegriffen werden, die sich gesellschaftlich oder politisch aktuell ereignen. Reagan führt als Beispiel für eine Implementierung in der Primarstufe folgende Frage an: „Sollte die Keystone-Pipeline erlaubt sein?" Das Beispiel ist zwar nicht mehr aktuell, eignet sich aber sehr gut, um daran die *design challenge* zu erklären.[32]

Die Lernenden sollen einen umfassenden Einblick in die Thematik erhalten. Dazu gehört das Verständnis der politischen Strukturen, wirtschaftliche Vor- und Nachteile, die der Bau der Pipeline mit sich ziehen würde, sowie mögliche Umwelteinflüsse. Es kann zu diesem Zeitpunkt auch schon Mathematik implementiert werden, wenn die Lernenden Karten zu der bereits bestehenden Pipeline und der geplanten neuen Pipeline erhalten und beispielsweise mit Hilfe von Dreiecksberechnungen den Längenunterschied der beiden möglichen Pipelines berechnen. Nach dieser informativen Einstiegsphase beginnt die eigentliche *design challenge*. Die Lernenden bilden Paare, von denen die beiden Personen möglichst unterschiedliche Meinungen bezüglich dem Bau der Pipeline haben. Schließlich lautet die Aufgabe für die *design challenge*: Baue eine Pipeline, die 200 ml Wasser über eine Distanz von einem Meter von einem Becher in einen anderen führt! [33]

Den Lernenden stehen Materialien wie Holzstäbchen, Styroporbecher, Kartonröhren, Strohhalme, Papier und Klebeband zur Verfügung. Durch die *design challenge* erfahren die Lernenden, dass das *gesamte* Wasser abwärts fließen muss. Dies scheint offensichtlich, doch viele Kinder stechen das Loch seitlich in den Becher, etwas oberhalb der Grundfläche. Eine weitere Herausforderung ist

[29] Vgl. ebd.
[30] Ebd.
[31] Vgl. ebd.
[32] Vgl. Reagan, 2016, S. 2
[33] Vgl. ebd., S. 2f

es, die Pipeline dicht zu halten, sodass keine Flüssigkeit austreten kann. Während des Bauprozesses sollte der Kontext stets präsent bleiben. So treten interessante Diskussionen auf. Besonders zwischen Schülerinnen und Schülern, die unterschiedlicher Meinung sind. Als Beispiel wurde bei einer undichten Leitung die Sorge um Profitverlust auf der einen Seite genannt und die Sorge um Schäden, die dadurch in der Umwelt entstehen, auf der anderen Seite. Diese Unterrichtssequenz stellt also ein Beispiel dar, wie Ursache und Wirkung, Politik, Geometrie und Umwelt in einen realistischen Kontext eingebettet werden können.[34]

Die *STEM-infusion* in dieser Form ist für die Primarstufe gedacht. Mit zunehmendem Alter und komplexeren Inhalten wird es schwieriger, passende vielschichtige Themen zu finden, da die Vereinfachung für den Unterricht mit steigender Komplexität herausfordernder wird. Das Prinzip soll aber weiter verfolgt werden und dient durchaus als Ausgangspunkt um *Fertigungsaufgaben* sinnvoll im Mathematikunterricht einzusetzen. Ziel ist es, eine *design challenge* zu kreieren, die die Herstellung beziehungsweise Fertigung eines Produktes verlangt. Dabei müssen gewisse Aspekte beachtet werden, die nicht von Vornherein angegeben sind. Neben gesellschaftlichen und politischen Aspekten sollen dies, im Falle der *Fertigungsaufgabe im Mathematikunterricht der Sekundarstufe*, besonders Berechnungen sein, die unumgänglich sind.

2.5 5E Modell

Das *5E Modell* ist ein vom Bildungszentrum *Biological Sciences Curriculum Study* entwickeltes Modell zur Strukturierung des Unterrichts. Der Unterricht wird hierfür in fünf Phasen organisiert, die alle eine spezielle Aufgabe erfüllen. Dieser Gliederungsvorschlag trägt dazu bei, dass Unterricht in einer schlüssigen Abfolge durchgeführt wird, die außerdem bewirkt, dass Schülerinnen und Schüler ein tieferes Verständnis über die vermittelten Inhalte und Kompetenzen erlangen.[35]

Vom Grundgedanken des Konstruktivismus geleitet, wird Lernenden die Möglichkeit geboten, deren eigene Konzepte und Sichtweisen zu evaluieren, gegebenenfalls zu verwerfen oder an die neuen Erkenntnisse anzupassen beziehungsweise diese neuen Erkenntnisse in ihr Verständnis der Realität einzubinden.[36] In die Entwicklung dieses Modells flossen Ergebnisse aus Forschungen im Bereich der Erkenntnistheorie ein, die sich vor allem mit Fehlvorstellungen der Lernenden beschäftigten.[37]

Grundlegende Merkmale dieses Modells sind die Erkenntnisgewinnung der Lernenden durch Selbstreflexion und Kooperation mit Mitlernenden. Das *5E Modell* schlägt eine Unterrichtsstruktur vor, deren Abfolge an Instruktionen die Lerndenden ins Zentrum ihrer eigenen Lernerfahrungen rücken lässt. Die Lernenden werden dazu animiert ihre Auffassung wissenschaftlicher Zusammenhänge selbst zu erforschen und zu validieren. Der Ablauf einer Unterrichtsstunde oder auch einer Unterrichtssequenz, die sich über mehrere Unterrichtsstunden erstreckt, ist beim *5E Modell* in die folgenden fünf Phasen aufgeteilt: *engage*, *explore*, *explain*, *elaborate* und *evaluate*.[38]

Die *engage-Phase* soll das Interesse der Lernenden wecken. *„The engagement activity introduces a new problem the students have to solve. [...] Asking a question, defining a problem and acting out a problematic situation are all ways to engage the students and focus them on the instructional activities.“* [39]

[34] Vgl. ebd., S. 3
[35] Vgl. Bybee, 2009, S. 4
[36] Vgl. Ansberry & Morgan, 2007, S. 29
[37] Vgl. Bybee & Landes, 1990, S. 96
[38] Vgl. Ansberry & Morgan, 2007, S. 29
[39] Bybee, 2009, S. 5f

In der *explore-Phase* arbeiten die Lernenden in kleinen Gruppen zusammen. Diese Phase zeichnet sich durch das selbstständige Arbeiten der Lernenden aus. Passende Aktivitäten können unter anderem das Auswerten von Daten, das Bauen von Modellen oder Experimentieren sein. Beim Experimentieren ist es wichitg, dass die Lernenden vor der Durchführung Aussagen über den möglichen Versuchsausgang treffen, um diesen in Folge sinnvoll deuten zu können, und gegebenenfalls neue Voraussagen zu treffen. Dies ist die Basis um realistische wissenschaftliche Herangehensweisen zu vermitteln.[40]

In der *explain-Phase* wird die Aufmerksamkeit der Lernenden auf einen bestimmten Aspekt ihrer Erfahrungen in der *explore-Phase* geleitet. Sie haben nun die Möglichkeit ihre Erkenntnisse zu verbalisieren beziehungsweise ihre gewonnenen Fähigkeiten darzubieten. Neben der Präsentation der Lernenden über ihre eigenen Ergebnisse und Schlüsse ist dies auch die Phase, in der die Lehrperson neue Konzepte, formales Wissen oder eine Arbeitsweise einführen kann.[41]

Das Ziel der *elaborate-Phase* ist einerseits das erneute Evaluieren der Konzepte der Lernenden um eventuelle noch vorliegende Fehlvorstellungen aufzudecken. Andererseits dient die *elaborate-Phase* hauptsächlich dem Anwenden des Gelernten in einem neuen Kontext um das Verständnis noch weiter zu vertiefen.[42]

In der *evaluate-Phase* wird das Verständnis der Lernenden evaluiert. Dies kann auch von den Lernenden selbst durchgeführt werden, um deren eigene Konzepte zu testen. Die *evaluate-Phase* sollte allerdings nicht die einzige Phase sein, in denen der Lernprozess der Lernenden evaluiert wird. Besonders informelle Leistungsfeststellung sollte in allen Phasen durchgeführt werden um auch gelegentlich passende Leitfragen stellen zu können oder die Planung an die Bedürfnisse der Lernenden anpassen zu können.[43]

2.6 Motivation und Interesse

„Affektive Aspekte bestimmen tiefgreifend mit, wie Schülerinnen und Schüler lernen, und ihre Entwicklung ist ein wichtiges Ziel des Unterrichts.“ [44] Es zahlt sich also aus, sich genauer damit zu beschäftigen, wie das *Interesse* von Schülerinnen und Schüler gefördert wird und wie Motivation entsteht.

Es wird grundsätzlich unterschieden zwischen *intrinsischer Motivation* und *extrinsischer Motivation*. Ist eine Person *intrinsisch motiviert*, so macht sie alle Handlungen um ihrer selbst Willen, weil der Inhalt der Aufgabe für sie vielleicht eine persönliche Bedeutung hat oder sie sich einfach gerne mit dem Thema beschäftigt. Eine *extrinsisch motivierte* Person sieht in der Erfüllung der Aufgabe eine Konsequenz, die sie erreichen möchte. Es geht ihr also nicht um die Handlung selbst, sondern um das daraus folgende Resultat. Im schulischen Kontext könnte eine solche erwünschte Konsequenz etwa eine gute Note sein. Auch wenn nach der Vermeidungsstrategie gehandelt wird, spricht man von *extrinsischer Motivation*. Dabei wird die Handlung deshalb ausgeführt, weil dadurch eine unerwünschte Konsequenz wie etwa eine schlechte Note vermieden werden kann.[45]

Ob und wie diese Handlung dann tatsächlich ausgeführt wird, hängt auch davon ab, wie sehr sich Schülerinnen und Schüler in der Lage sehen, die Aufgabe erfüllen zu können. Scheint sie sehr

[40] Vgl. Ansberry & Morgan, 2007, S. 30
[41] Vgl. Bybee & Landes, 1990, S. 96
[42] Vgl. Ansberry & Morgan, 2007, S. 30
[43] Vgl. ebd., S. 30f
[44] Duit, 2010, S. 8
[45] Vgl. ebd., S. 8f

schwierig und die Schülerinnen und Schüler wissen zuerst gar nicht, wo sie anfangen sollen, ist die erforderte Willensanstrengung viel größer als wenn das Ziel erreichbar scheint.[46] Nach der sogenannten „Selbstbestimmungstheorie" sind drei Faktoren erforderlich, damit die Motivation eine bestimmte Handlung durchzuführen überhaupt auftritt. Die Schülerinnen und Schüler müssen in der Erfüllung der Aufgabe Kompetenz, sowie Autonomie erleben. Außerdem sollten sie ihr Lernen selbstbestimmt angehen können.[47]

Die Lernergebnisse fallen in der Regel besser aus, wenn eine Person intrinsisch motiviert ist. Jedoch scheint diese Art der Motivation in der Praxis nur selten vorzukommen. Voraussetzung für intrinsische Motivation ist die Förderung des Interesses von Schülerinnen und Schülern. *Interesse* gibt an, was für eine Beziehung die lernende Person zum Lerninhalt hat. Es wird dann von *Interesse* gesprochen, wenn die Person dem Lerninhalt positive Gefühle und eine gewisse Wertschätzung entgegenbringt. Als Folge entsteht dann eben der Wunsch sich intensiver mit dem Thema auseinanderzusetzen. Das *individuelle Interesse* ist ein Merkmal der Person und gilt als relativ stabiles Persönlichkeitsmerkmal. Die *Interessantheit* ist jedoch auf den Lerngegenstand beziehungsweise die Lernumgebung bezogen. Sie kann bei der lernenden Person ein *zeitlich begrenztes Interesse* auslösen, das das *individuelle Interesse* fördern kann, wenn dann die Möglichkeit besteht, sich mit dem Lerngegenstand autonom und selbstbestimmt auseinanderzusetzen. Die Förderung von *Interesse* sollte also ein wesentliches Ziel der Unterrichtsplanung sein.[48]

Eine Gegenüberstellung von Möglichkeiten zur Förderung des *Interesses* oder Faktoren, die das *Interesse* eher beeinträchtigen, ist in der Tabelle auf Seite 15 angegeben.

Interesse wird beeinträchtigt	**Interesse wird gefördert**
Minutiöses Vorschreiben, wie Schüler Aktivitäten auszuführen haben. Entziehen oder Einengen von Spielräumen und Wahlmöglichkeiten.	Durch Anbieten von Spielräumen und durch Hinweise auf Wahlmöglichkeiten Schülern die Möglichkeit geben, sich als selbstbestimmt handelnd zu erleben.
Rückmeldungen über Lernfortschritte und Defizite, die vom Schüler weniger als Information über den Könnensstand denn als massive Kontrolle empfunden werden müssen.	Durch informierende Rückmeldungen und durch ein Anlegen individueller Bezugsnormen Schülern die Möglichkeit geben, die eigene Kompetenz zu erfahren.
Geringe soziale Einbeziehung oder Einbindung, die Schüler nicht als Person ernst nimmt oder akzeptiert und durch mangelnde Partnerschaftlichkeit und Kooperation gekennzeichnet ist.	Durch partnerschaftlichen und kooperativen Umgang mit Schülern die Möglichkeit geben, sich persönlich als angenommen und sozial eingebunden zu empfinden.

Tabelle 1: Förderung des Interesses (Prenzel, 1994, zitiert nach Duit, 2010, S. 11)

Wie bereits erwähnt, spielt es für die Motivation eine wichtige Rolle, ob sich Schülerinnen und Schüler in der Lage sehen eine gewisse Handlung durchführen zu können. Diese Wahrnehmung

[46] Vgl. ebd., S.9
[47] Deci & Ryan, 1993, zitiert nach Duit, 2010, S.9
[48] Vgl. Duit, 2010, S. 9

über die eigenen Fähigkeiten wird mit dem Begriff *Selbstkonzept* beschrieben. Die Vorstellung über das eigene Können wird automatisch bewertet. Werden diese Fähigkeiten als ausreichend und gut wahrgenommen, ist das Selbstkonzept positiv. *„Je positiver das Selbstkonzept ist, desto eher ist eine Person bereit, sich intensiv mit einer Sache zu befassen und desto länger hält sie, angesichts von Misserfolgen auch durch. Das Selbstkonzept bestimmt weiterhin mit, welche Interessen sich ausbilden"* [49]. Wenn die eigenen Leistungen mit falschen Ursachen hinterlegt werden, kann sich das negativ auf das Selbstkonzept auswirken. Blömeke und Müller schreiben etwa, dass Lehrende im Mathematikunterricht *„die Leistungen der Jungen als Ursache der Fähigkeiten und der Mädchen als Ursache von Anstrengung"* [50] deuten. Im Physikunterricht konnte festgestellt werden, dass diese Meinung auch bei den Schülerinnen und Schülern vorliegt. *„Mädchen begründen gute Leistungen in Physik mit Fleiß und Anstrengung und dem Wohlwollen der Lehrkraft, schlechte Leistungen hingegen mit mangelnden Fähigkeiten. Jungen sehen gute Leistungen als Resultat ihrer Fähigkeiten, schlechte Leistungen haben ihre Ursache darin, dass sie sich zu wenig Mühe gemacht haben."* [51] Dieses schwache Selbstkonzept bei Mädchen könnte aus den niedrigen Leistungserwartungen resultieren, die Mädchen in der Gesellschaft durch Lehrende, Eltern und Medien erfahren.

Möglicherweise spielen aber auch die im Mathematikunterricht vorwiegend behandelten Themen eine Rolle. Eine dazu passende Untersuchung, die den Physikunterricht betrifft, liefert interessante Ergebnisse über die Interessen von Schülerinnen und Schülern. Die im Unterricht behandelten Themen wurden dafür in drei Kategorien eingeteilt: *Physik und Technik*, *Mensch und Natur* und *Gesellschaft*. Es konnte festgestellt werden, dass sich Mädchen viel mehr für die Bereiche *Mensch und Natur*, sowie *Gesellschaft* interessierten. Veranschaulicht mit Beispielen würde das bedeuten, dass sich Mädchen laut der Untersuchung lieber mit Fragestellungen zur gesellschaftlichen Bedeutung von Elektrofahrzeugen oder der Funktionsweise von medizinischen Therapien beschäftigen, als mit dem exakten Aufbau einer Platine. Doch wird im Unterricht sehr häufig nur das erste Interessensgebiet *Physik und Technik* behandelt, wofür sich Jungen mehr interessieren und wodurch dann in weiterer Folge auch das Bild entsteht, dass sich Mädchen nicht für Physik interessieren.[52] Es erscheint nicht unlogisch, dass dieser Aspekt auch im Mathematikunterricht zu tragen kommt. Deshalb sind die in dieser Arbeit vorgestellten Planungen thematisch möglichst vielseitig zusammengesetzt.

[49] Duit, 2010, S. 10
[50] Blömeke & Müller, 2008, zitiert nach Hahn, 2019, S. 57
[51] Duit, 2010, S. 11
[52] Vgl. Hoffmann, Häußler & Lehrke, 1998, S. 19ff

3 Fertigungsaufgaben für den Mathematikunterricht

In diesem Kapitel soll nun ein Konzept entwickelt werden, wie *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* konkret umgesetzt werden können. Es wird erläutert zu welchen Zweck sie eingesetzt werden, wie sie sinnvoll in einer Unterrichtssequenz eingebettet werden und was insbesondere in Bezug auf den Mathematikunterricht beachtet werden soll. Dafür werden die theoretischen Grundlagen aus dem vorherigen Kapitel herangezogen und teilweise mit besonderem Bezug auf den Mathematikunterricht noch weiter ergänzt.

3.1 Zielsetzung

Wie im Vorwort erwähnt, sollen die *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* den Schülerinnen und Schülern Aufschluss darüber geben, warum sie Mathematik lernen müssen. Diese Frage wird vermutlich erst dann nicht mehr gestellt, wenn die Mathematik als Mittel zur Erfüllung eines anderen Zweckes unumgänglich ist und somit zeigt, dass sie im späteren Leben wichtig ist. Bei den *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* soll das Herstellen des Produktes nur durch die Anwendung mathematischer Kenntnisse in der Planungsphase möglich sein, wodurch die Frage nach dem Sinn obsolet wird. Die *Fertigungsaufgaben* sollten außerdem aus möglichst vielfältig gewählten Bereichen des alltäglichen Lebens aufgegriffen werden, um Schülerinnen und Schülern aufzeigen zu können, wie weitläufig die Anwendungen von Mathematik sind. Alles in allem könnte der Einsatz von *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* dafür sorgen, dass Schülerinnen und Schüler die Präsenz und Relevanz von Mathematik im Alltag und in der Gesellschaft stärker wahrnehmen werden. Hier besteht auch ein Wunsch dieser Frage nachzugehen, was im Kapitel „Forschungsdesiderate“ nochmal genauer angeführt wird.

Der Einsatz von *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* dürfte einen weiteren Vorteil mit sich bringen. Es lohnt sich einen Blick auf die sieben Thesen von Heymann zu werfen, in denen Akzente für einen erfolgreichen allgemeinbildenden Mathematikunterricht an Gymnasien gesetzt werden. Sie sind ein guter Ausgangspunkt für die Frage, warum Mathematik an der Schule gelernt wird. Neben der *Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch*, der *Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft*, der *Einübung in Verständigung und Kooperation* und der *Stärkung des Schüler-Ichs* sollen besonders die drei Aspekte *Lebensvorbereitung*, *Stiftung kultureller Kohärenz* und *Weltorientierung* hervorgehoben werden.[53]

Dazu ist in der Literatur folgendes zu lesen: *„Lebensvorbereitung. Ein Mathematikunterricht, der sich auf unmittelbare Lebensvorbereitung zu beschränken sucht, bereitet unzureichend auf das Leben vor. [...] Stiftung kultureller Kohärenz. Das Gymnasium hat dafür zu sorgen, dass eine Verständigung zwischen den Generationen möglich bleibt [...] Weltorientierung. Hiermit ist gemeint, dass Mathematik ein Teil unserer Welt ist und zugleich in ihr verborgen. Der Ausschnitt der Welt, den Schulmathematik im Normalfall repräsentiert, besteht lediglich aus ihr selbst: der Schulmathematik. Dieser Ausschnitt ist zudem noch so unzureichend von den Schülern wahrgenommen worden, daß eine Orientierung bei bestimmten Sachfragen (Ratenkauf, Kredit, Zinsrechnung, Hochrechnung) mit Hilfe des Schulwissens problematisch geworden ist.“* [54]

Alle diese drei Aspekte werden in den *Fertigungsaufgaben für den Mathematikunterricht* beachtet. Die verschiedenen Beispielplanungen stammen aus den unterschiedlichsten Bereichen des Lebens, nicht aber zwangsläufig aus der *unmittelbaren Lebensvorbereitung*. Sie zielen vielmehr darauf ab, den Schülerinnen und Schülern aufzuzeigen, wo sich mathematische Anwendungen verstecken,

[53] Vgl. Heymann, 1996 zitiert nach Ludwig, 1997, S.63f
[54] Ebd., S.63

ohne dass dies auf den ersten Blick offensichtlich ist. Dies deckt sich auch mit dem Gedanken der *Weltorientierung*. Obwohl die Mathematik uns dauernd umgibt, ist es uns nicht immer bewusst. Oft hätten wir es aber auch mit Mathematik zu tun, die mit dem Wissen der Schulmathematik nicht zu verstehen ist. In den Beispielplanungen für die *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* wird versucht, die Schulmathematik etwas vernetzter anzuwenden, um den Schülerinnen und Schülern besser verdeutlichen zu können, wie vielfältig die Schulmathematik ausgeweitet wird. Da sich unsere Umwelt ständig verändert, ist dies auch eine wichtige Komponente um verstehen zu können, wie sich die mathematischen Anforderungen mitverändern und ist somit ein Faktor für eine gelingende Verständigung zwischen den Generationen.

3.2 Anforderungen

Bei der *Fertigungsaufgabe für den Mathematikunterricht* liegt der von der Lehrperson gesetzte Fokus darauf, dass für die Herstellung beziehungsweise den Planungsprozess für die Herstellung Mathematik angewendet werden muss. Dies wird jedoch nicht direkt mit den Schülerinnen und Schülern kommuniziert. Vielmehr sollen sie selbst erfahren, dass Mathematik ein hilfreiches Werkzeug zur Lösung von Problemen ist. Das offen kommunizierte Ziel mit den Schülerinnen und Schülern ist lediglich die *Fertigungsaufgabe* an sich, also welches Produkt sie herstellen sollen und welche Anforderungen es zu erfüllen hat.

Statt der anschließenden Überprüfung und Bewertung des Produktes, wie es bei der Implementierung von *Fertigungsaufgaben im Technikunterricht* üblich ist, wird im Mathematikunterricht mit der mathematischen Analyse des Planungsprozesses abgeschlossen. Dabei sollen die einzelnen Gruppen mit der gesamten Klasse teilen, welche Ansätze sie gewählt haben. Dieser Vorgang kann zeigen, dass Mathematik keineswegs starr ist, sondern ein Ziel auf mehrere Arten erreicht werden kann. Und vor allem zeigt die anschließende Diskussion über die mathematischen Anwendungen, dass in alltäglichen Gegenständen öfters Mathematik steckt, als viele Schülerinnen und Schüler auf den ersten Blick vermuten würden. Des weiteren sollen die Aufgaben auch möglichst realistisch gestaltet sein. Die Anforderungen an die *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* können also folgendermaßen zusammengefasst werden:

1. **Produkt herstellen:** Das alles umschließende Ziel sollte die Herstellung beziehungsweise Fertigung eines Produktes sein, welches gewissen Anforderungen erfüllt, die in der Aufgabenstellung angegeben sind.

2. **Mathematik nötig:** Es soll nicht möglich sein, die Aufgaben durch reines Ausprobieren lösen zu können. Es muss zwangsläufig Mathematik verwendet werden.
   Möglichkeiten dies zu erreichen, sind unter anderem eine limitierte Bearbeitungszeit (Beispielplanung 1: Infusionstherapie), zu hohe Zahlen (Beispielplanung 2: Spieleentwicklung), zu viele Möglichkeiten, die nicht alle durchprobiert werden können beziehungsweise dafür plastische Objekte notwendig wären (Beispielplanung 4: Spirograph) oder zu wenig Information (Beispielplanung 6: Hologramm). Der in der Realität wichtigste Grund kann in der Schule leider nur schlecht umgesetzt werden. Dies wäre die Notwendigkeit genaue Berechnungen vor der Herstellungsphase durchzuführen, um garantieren zu können, dass das Objekt die nötigen Anforderungen erfüllt. Hinsichtlich dem Bau von Brücken ist es beispielsweise sofort einleuchtend, dass es nicht möglich ist, diese zuerst zu bauen und dann zu testen, ob sie den Belastungen standhalten kann. Dies muss im Vorhinein schon abgeklärt sein. Im schulischen Unterricht lässt sich eine solche Situation aber schwer simulieren. Vor allem, wenn die Notwendigkeit der mathematischen Berechnungen in der Aufgabenstellung nicht direkt kommuniziert werden soll.

3. **Realistische Aufgaben:** Die Aufgaben sollten in ähnlicher Art und Weise tatsächlich im realen Leben vorkommen. Damit ist gemeint, dass es den Schülerinnen und Schülern einsichtig ist, dass eine Rechnung dieser Art mit großer Wahrscheinlichkeit schon mal von jemand anderem in nur schwach abgewandelter Form gerechnet wurde. Hier eignen sich keine *eingekleideten Aufgaben*. Das Ziel der Vermittlung von Relevanz der Mathematik im Alltag würde nicht erreicht werden, wenn die Aufgabe lauten würde, wie groß ein Einkaufswagen sein müsste, damit 56 Wassermelonen hineinpassen. In so einem Fall wäre es den Schülerinnen und Schülern bewusst, dass es sich nicht um eine realistische Aufgabe handelt und könnte dazu führen, dass sie nur noch stärker hinterfragen, warum Mathematik in der Schule gelernt werden muss. Im Optimalfall starten die *Fertigungsaufgaben* also mit einer Aufgabenstellung aus Bereichen der echten Arbeitswelt, so wie sie dort gestellt sind. Die Vereinfachungen sollten so gestaltet werden, dass der Zusammenhang mit der realistischen Situation noch sichtbar ist. Bei der Umsetzung der Aufgabe, also dem hergestellten Produkt, darf es durchaus zu Vereinfachungen kommen, wenn die dahintersteckende realistische Anwendung noch sichtbar ist.

4. **Komplexität gering halten:** Die Aufgaben sollen wenn möglich nur auf eine mathematische Kompetenz abzielen. Die Aufgaben sollten wenig Zeit in Anspruch nehmen und wenig außergewöhnliche Materialien benötigen. Die Planungen sollten für Lehrpersonen sehr leicht in den Unterricht implementierbar sein.

3.3 Orientierung am 5E Modell

Die in dieser Arbeit vorgestellten Beispielplanungen sind am *5E Modell* orientiert. Alle Planungen beginnen mit einer *engage-Phase*. Ziel dieser *engage-Phase* soll es sein, das Interesse und den Wissensdrang der Lernenden zu wecken. Die *engage-Phase* soll vorwiegend dem Zweck dienen, die Lernenden zu motivieren ein bestimmtes Produkt herzustellen. Zu diesem Zeitpunkt soll den Lernenden noch nicht klar sein, dass mathematische Berechnungen ein notwendiges Hilfsmittel für die Erfüllung der Aufgabe sind. In den folgenden Beispielplanungen wird darauf geachtet, dass die Aktivitäten der *engage-Phase* nicht auf mathematische Inhalte hinweisen.

Die *explore-Phase* ist das Kernstück der in dieser Arbeit vorgestellten Planungen. Ziel all dieser Planungen soll es sein, dass die Lernenden eine konkrete Aufgabenstellung erhalten, die sie mit der Herstellung eines bestimmten Produkts erfüllen können. Hier wird also die Aufgabenstellung der *Fertigungsaufgabe* mitgeteilt. Zunächst gibt es noch keine Hinweise dafür, dass zur Lösungsfindung Mathematik angewandt wird. Die Entwicklung des Modells soll allerdings nur unter Verwendung von Mathematik möglich sein.

Analog zur Theorie sollen auch in den in dieser Arbeit vorgestellten Beispielplanungen die *explain-Phase* dazu dienen, dass die Lernenden ihre Ergebnisse präsentieren. Ein besonderer Fokus wird dabei auf den Entwicklungs- und Herstellungsprozess des Produkts gelegt. Dies soll den Lernenden schon während der *explore-Phase* bewusst sein.

Der Ablauf dieser ersten drei Phasen ist für alle Beispielplanungen konkret vorgegeben. Die *elaborate-* und *evaluate-Phase* sollen eher als Orientierung dienen, wie diese Unterrichtssequenzen fortgeführt werden können. Jede Lehrperson kennt ihre eigene Klasse am besten und weiß, welche mathematischen Grundlagen schon vorhanden sind, wie sehr sie in die Tiefe gehen kann oder auch einfach, wo differenziert werden muss. Differenzierung ist in der *explore-Phase* schon möglich. So können beispielsweise *gestufte Lernhilfen* verwendet werden, um die nötigen Schritte vorzugeben, damit ein selbstbestimmtes und autonomes Lernen möglich ist. Je nach Zeitpunkt der Implementierung der in dieser Arbeit vorgestellten *Fertigungsaufgaben* kann von der Lehrperson eine andere Zielsetzung oder Schwerpunktsetzungen verfolgt werden.

Es gibt Ansätze, die das *5E Modell* mit zwei weiteren Phasen auf ein *7E Modell* ergänzen. Im *7E Modell* wird vor der *engage-Phase* zur Erhebung des Vorwissens der Schülerinnen und Schüler eine *elicit-Phase* eingeschoben. Oft bringen Schülerinnen und Schüler schon Vorwissen mit, welches teilweise nur hervorgelockt werden muss.[55] Diese Phase ist nur dann sinnvoll, wenn auf die unterschiedlichen Kompetenzniveaus der Schülerinnen und Schüler auch unterschiedlich reagiert wird. Da die Aufgabenstellung der *Fertigungsaufgabe* aber fix vorgegeben ist, kann eine Anpassung an das Vorwissen später in der *explore-Phase* mit geeigneten Hilfestellungen passieren. Die *elicit-Phase* vor der *engage-Phase* wäre im Hinblick auf *Fertigungsaufgaben* auch deshalb nicht zielführend, weil bis dahin noch nicht klar sein sollte, mit welchen mathematischen Operationen die Planung und Herstellung des Produktes einhergehen soll. Da die Planungen thematisch offen gestaltet sind und mehrere Lösungsstrategien möglich sind, wird es schwierig das passende Wissen zu erheben. Außerdem sollen die Lernenden von der Lehrperson so wenig wie möglich beeinflusst werden. Die Planungen sind so gestaltet, dass es den Lernenden frei gestellt ist, wie sie die Aufgabe genau erfüllen. Dabei sollen die Lernenden ohne Einfluss der Lehrperson die Notwendigkeit von Mathematik verspüren. Die *engage-Phase* sollte dabei möglichst frei von Mathematik sein.

Auch die im *7E Modell* zusätzlich nach der *evaluate-Phase* durchgeführte *extend-Phase* bringt für die *Fertigungsaufgabe im Mathematikunterricht* keinen zusätzlichen Mehrwert. Diese Phase ist dafür gedacht, dass das erworbene Wissen nun zusätzlich in einem anderen Kontext betrachtet wird.[56] Dies ist natürlich eine sinnvolle Fortführung zur *Fertigungsaufgabe*, wird aber hier nicht als Teil davon betrachtet und deshalb auch nicht in den Beispielplanungen angeführt. Die Beispielplanungen sollten vor allem als Orientierung dienen, wie *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* eingesetzt werden. Die Feinanpassung bleibt dabei jeder Lehrperson selbst über. Auch wenn keine *elicit-Phase* durchgeführt wird, heißt das nicht, dass die Lehrperson den Wissensstand der Schülerinnen und Schüler nicht ansatzweise einschätzen kann. In der Praxis gibt es mehrere Möglichkeiten ein Bild über die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu erhalten. Neben informeller Leistungsfeststellung in Form von beispielsweise Hausübungen und Gesprächen im Unterricht, die kontinuierlich erwünscht sind, bieten auch vergangene summative Leistungsfeststellungen wie zum Beispiel Tests Einblick in die erworbenen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler. Diese Informationsquellen sind für die in dieser Arbeit vorgestellten Beispielplanungen aussagekräftig genug, da im Prinzip keine neuen mathematischen Inhalte behandelt werden, sondern die Lernenden auf Konzepte zurückgreifen, die sie sich zu einem früheren Zeitpunkt schon angeeignet haben.

3.4 Produkt- vs. Prozessorientierung

Lernen durch reines Beobachten erweist sich in den meisten Fällen als äußert schwierig. Eindeutige Beispiele dazu wären das Erlernen eines Musikinstruments oder einer neuen Sportart. Auch im Mathematikunterricht trifft dieser Gedanke zu, dass die Lernenden durch Eigenaktivität größere Lernerfolge erreichen werden. Es sollen im Mathematikunterricht also Aktivitäten eingesetzt werden, die nicht durch bloßes Anwenden eines Rezepts gelöst werden können, sondern offener gestaltete Aufgaben, die die Lernenden zum Probieren, Vermuten, Entdecken und Begründen animieren. Das Betreiben von Mathematik wird als *Prozess* wahrgenommen, durch den Überlegungen hinterfragt werden, gegebenenfalls verworfen werden und schließlich aber zu einer Überwindung des Problems führen.[57] Die nachstehende Tabelle zeigt eine Gegenüberstellung von

[55]Vgl. Eisenkraft, 2003, S. 57
[56]Vgl. ebd., S. 59
[57]Vgl. Humenberger & Bracke, 2017, S. 107f

Produkt- und Prozessorientierung im Mathematikunterricht.

	Produkt- bzw. Kalkülorientierung	**Prozessorientierung**
Ablauf	Erklären - Musteraufgabe - Üben von Analogaufgaben	Problemstellung - Probieren - Berichten -Reagieren
Ziel, Schwerpunkt	Eindeutigkeit, Sicherheit, Rezept, Ergebnis, Produkt	Verstehen, Begreifen, Prozess, Weg, Methode
Aufgaben	„geschlossene Aufgaben“, drillen von Fertigkeiten, Regelorientierung, quantitativ umfangreiches Üben (viele Aufgaben zum selben Prinzip)	offenere Aufgaben, Entdecken, Experimentieren, Begründen, Formulieren, eigenständige Wege, Beispielorientierung, produktives Üben (qualitativ umfangreich)
L-S-Aktivität	Lehrkraft aktiv, Schülerinnen und Schüler (S&S) eher passiv, Weg der Lehrkraft im Vordergrund	S&S aktiv, Lehrkraft zunächst eher passiv: reagiert dann auf Vorschläge der S&S, Wege der S&S im Vordergrund
Sozialform	Lehrervortrag, fragend-entwickelnd, kleinschrittig, auf ein eindeutiges Ziel hin	Einzel-, Partner-, Gruppenarbeit, flexibel, offen
Vorbereitung	Gute Vorbereitung bis ins Detail der Darbietung	Überlegungen, wie man S&S zu Eigentätigkeit anregen kann (geeignete Aufgaben formulieren)
Erklärungen	sehr umfangreich, Lehrkraft muss von Beginn an alles erklären	weniger Erklärungen, mehr eigenes Nachdenken der S&S
Fehler	sind zu vermeiden, Unterricht als ständige Leistungssituation	zugelassen und sollen konstruktiv verarbeitet werden, deutliche Trennung zwischen Lern-und Leistungssituationen

Tabelle 2: Gegenüberstellung von Produkt- und Prozessorientierung (Humenberger & Bracke, 2017, S. 108)

Die *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* eignen sich besonders gut für prozessorientierten Unterricht. Werden ausgehend von den in dieser Arbeit vorgestellten Musterplanungen später selbst Aufgabenstellungen für *Fertigungsaufgaben* entworfen, sollen die in der Tabelle angeführten Kriterien abgeglichen werden. Besonders zu beachten gilt, dass die Aufgabenstellung, sowie der Planungs- und Fertigungsprozess offen gestaltet werden. Außerdem muss sich die Lehrperson so gut wie möglich zurückhalten und die Schülerinnen und Schüler eigenständig probieren lassen. Es dürfen dabei durchaus Fehler passieren. Die Lehrperson sollte erst dann einschreiten, wenn die Schülerinnen und Schüler den Fehler nach einer gewissen Zeit nicht selbst entdecken und ein konstruktives Weiterarbeiten verhindert würde. Ein solcher Fehler wäre zum Beispiel ein falsches Verständnis der Aufgabenstellung.

3.5 Realitätsbezüge

Wird ein mathematisches Problem in einen realistischen Kontext eingebettet oder, noch besser, entspringt einer realistischen Problemstellung, ist dadurch allerdings nicht sichergestellt, dass Schülerinnen und Schüler interessierter an der Aufgabe sind, als wenn sie keinen Realitätsbezug aufweisen würde. Greefrath spezifiziert hier genauer, indem er Aufgaben mit Realitätsbezügen einen gewissen Grad an *Relevanz* zuordnet. Damit Schülerinnen und Schüler gewisse Aufgaben als *relevant* betrachten, müssen sie nicht nur Realitätsbezug aufweisen, sondern auch über authentische Aufgabenstellungen verfügen und dabei anregend sein. Die Bewertung, ob einen Aufgabe nun aber für die einzelne Schülerin oder den einzelnen Schüler *relevant* ist, wird sehr individuell aufgefasst. Um Aufgaben zu erstellen, die möglichst *lebensrelevant* für viele Schülerinnen und Schüler sind, werden als Beispiele Aufgaben zu Gegenständen aus dem alltäglichen Leben von Schülerinnen und Schülern, wie etwa dem Mobiltelefon, angeführt.[58]

Teilweise passen die Interessensgebiete der Schülerinnen und Schüler bedingt durch das Alter aber nicht mit ihren mathematischen Fähigkeiten zusammen. Dies lässt sich am Beispiel mit Sammelbildern erklären. Besonders Schülerinnen und Schüler am Übergang von der Grundschule in die Sekundarstufe I lassen sich zum Ausfüllen eines Sammelalbums motivieren. Folgende Frage wäre also durchaus interessant und relevant für sie: Wie viele Packungen muss ich im Durchschnitt kaufen, wenn in einer Packung fünf Bilder sind, und ich ein Sammelalbum mit insgesamt 640 verschiedenen Bildern vervollständigen möchte? Allerdings wird die notwendige Mathematik erst in der Sekundarstufe II oder später gelernt. Zu diesem Zeitpunkt ist diese Fragestellung für die Schülerinnen und Schüler allerdings nicht mehr relevant.[59]

Eine weitere Schwierigkeit bei der Erstellung von authentischen und relevanten Aufgaben mit Realitätsbezug stellt die Übersetzung von Realität und Mathematik im Unterricht dar. *„Nicht jede erdenklich reale Situation ermöglicht eine geeignete mathematische Frage oder anders herum lässt sich nicht jeder denkbare Inhalt des Mathematikcurriculums auch in einer authentischen Situation abbilden.“* [60]

Direkte Übersetzungen von den im Mathematikunterricht behandelten mathematischen Methoden und authentischen Alltagsanwendungen lassen sich am ehesten im Bereich der elementaren Arithmetik und später im Bereich der deskriptiven Statistik finden.[61] In anderen Kontexten wird es zunehmend *„schwieriger, Verbindungen von Mathematik und Realität anhand objektiver authentischer Fragestellungen aufzuzeigen. Hier kann die Überlegung sinnvoll sein, stellvertretende Situationen, die einen didaktischen Vorteil gegenüber der Originalsituation haben, zu verwenden [...] und [...] subjektiv authentische Beispiele zu schaffen. [...] Wichtig erscheint bei der Modellierung eines Stellvertreters (oder Modells) einer realen Situation wie auch bei der Propagierung der Authentizität oder der bewussten Verfremdung eines realen Kontexts im Sinne eines Märchens oder Comics die Transparenz, in welcher Form die Realität betrachtet wird. Erst dadurch kann die nicht triviale Anforderung realisiert werden, Schülerinnen und Schülern die Relevanz von Mathematik für reale Fragen nachhaltig zu verdeutlichen.“* [62]

Angewendet auf die *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* bedeutet dies, dass auch hier vor der Herstellungsphase beziehungsweise im Anschluss an die Unterrichtseinheit über den Unterschied der im Unterricht gewählten Vorgehensweise zu der in der Realität verfolgten Variante angesprochen wird. Nur so gewinnen die Schülerinnen und Schüler einen authentischen Einblick darüber, wo in der Realität mathematische Anwendungen vorzufinden sind. Um außerdem möglichst viele verschiedene Interessenstypen und damit verbundenen individuellen Relevanzempfinden gerecht zu werden, wurden für die hier in dieser Arbeit vorgestellten Beispielplanungen *Fertigungsaufgaben* aus den unterschiedlichsten Bereichen gewählt. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, dass die Anwendungen nicht alle aus dem technischen Bereich kommen.

[58] Vgl. Greefrath, 2007, S.31f
[59] Vgl. Kaiser & Henn, 2015, S. 108
[60] Ebd., S. 116
[61] Vgl. ebd., S. 117
[62] Ebd.

4 Beispielplanung 1: Infusionstherapie

In dieser Unterrichtssequenz erstellen die Schülerinnen und Schüler in Gruppen einen Aufbau, um Wasser langsam aus einem Becher rinnen zu lassen. Es ist vorgegeben, in welcher Zeit welche Menge aus dem Becher fließen soll. Das Konzept der Konstruktion kann relativ simpel sein und ist für die Erreichung des Unterrichtsziels eigentlich nicht relevant, sondern dient als Vorwand, dass sich die Schülerinnen und Schüler während des Konstruktions- und iterativen Verbesserungsprozesses mit mathematischen Modellen Informationen beschaffen.

Der Kontext für diese Unterrichtssequenz wurde bewusst im medizinischen Bereich gewählt. Wie im Kapitel *Motivation und Interesse* angesprochen, lässt sich das Interesse vor allem bei Mädchen durch Kontexte im Bereich von *Mensch und Natur* wecken. Außerdem wird die Einheit ausgehend von einer Fernsehserie begonnen, was ebenfalls den Interessen der meisten Schülerinnen und Schüler entspricht. Jede Lehrperson kennt die Interessen der eigenen Klasse am besten. Sollte ein ausgeprägtes Interesse für Umwelt vorhanden sein, kann diese Unterrichtssequenz auch im Rahmen eines Vergleichs von Tröpfchenbewässerung und Pivot-Bewässerung erfolgen.

Die in dieser Unterrichtssequenz nötige Mathematik rührt her von der knappen Zeit, die zur Verfügung steht. So sollen die Schülerinnen und Schüler ihren Prototypen innerhalb von 15 Minuten bauen und optimiert haben. Und zwar so, dass das Wasser dann im Optimalfall genau 20 Minuten braucht, um aus dem Becher zu rinnen. Dafür müssen die Schülerinnen und Schüler also ihre Fähigkeiten Daten zu sammeln, zu strukturieren und zu deuten anwenden. Schließlich muss auf diese Daten reagiert werden, wenn möglich nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ. Die Modelle, die den Wasserausfluss beschreiben, sind vermutlich in der Mehrheit lineare Modelle. Teilweise könnte das den Schülerinnen und Schülern gar nicht bewusst sein. Deshalb ist die mathematische Diskussion in der *explain-Phase* äußerst wichtig. In der *elaborate-Phase* sollen dann auch die unterschiedlichen Darstellungsmethoden von Daten, wie etwa graphisch oder in einer Wertetabelle, vertieft werden.

Für diese Unterrichtssequenz sollten die Schülerinnen und Schüler als Vorwissen den flexiblen Umgang mit Koordinatensystemen mitbringen. Sie sollten also zum Beispiel Wertepaare in einem Koordinatengitter einzeichnen können und umgekehrt. Die Schülerinnen und Schüler sollten verstehen, wie Daten in einem Koordinatensystem im Hinblick auf die Achsenbeschriftung zu deuten sind. Der Funktionsbegriff sollte ebenfalls schon angeschnitten worden sein. Vermutlich bringt die Unterrichtssequenz einen noch größeren Mehrwert, wenn die Schülerinnen und Schüler über Vorwissen im Bereich von linearen und exponentiellen Funktionen verfügen. Die Implementierung der Unterrichtssequenz sollte allerdings auch schon davor möglich sein. Die notwendigen Vorkenntnisse für die gewinnbringendste Implementierung dieser Einheit wäre ein weitere Forschungsmöglichkeit, die im Kapitel *Forschungsdesiderate* noch genauer beschrieben ist.

4.1 Vorbereitung

Für diese Unterrichtssequenz werden zwei Unterrichtsstunden benötigt. In der ersten Unterrichtsstunde werden die Phasen *engage*, *explore* und *explain* durchgeführt. In der nächsten Unterrichtsstunde wird mit den Phasen *elaborate* und *evaluate* abgeschlossen.

Folgende Materialien sollten für diese Unterrichtssequenz vorbereitet werden:

- Papierbecher (für jede Gruppe)
- Wanne oder große, flache Schüssel (für jede Gruppe)

- mehrere Messbecher (am besten auch für jede Gruppe; sollten die SuS wenn mölich selbst mitbringen)
- Strohhalme in unterschiedlichen Größen
- Kreppklebeband
- Papier und Karton
- Wolle
- Wäscheklammern
- Büroklammern
- Küchenrolle oder anderes saugfähiges Material
- evtl. Stoppuhren
- evtl. Handtücher

Außerdem sollte eine Liste vorbereitet werden, auf der die Ergebnisse der einzelnen Gruppen eingetragen werden können.

4.2 Unterrichtsablauf

Engage

Als Einstieg in die *engage-Phase* dient ein Bild aus der Fernsehserie „Grey's Anatomy" (Abbildung 2 auf Seite 24). Das Bild wird am besten projiziert und mit der Frage begleitet, was die SuS denken, was das Thema dieser Unterrichtsstunde sein könnte, basierend auf diesem Bild[63].

Abbildung 2: Infusionstherapie

[63]zitiert nach URL: https://i.ytimg.com/vi/jYyhBaa43Z0/maxresdefault.jpg, abgerufen am 28.04.2020

Nach dem Sammeln der Antworten wird auf den Infusionsbeutel verwiesen. Auf einer Powerpoint-Präsentation könnte er zum Beispiel rot eingekreist werden. Es soll hier genügend Zeit gegeben werden, damit die SuS verstehen lernen, wie das Prinzip der intravenösen Infusion funktioniert. Falls es zu starken emotionalen Erinnerungen kommt, kann auch eine kurze Phase eingeschoben werden, in der die SuS mit dem Banknachbar beziehungsweise der Banknachbarin Gedanken austauschen. Schließlich wird übergeleitet in die *explore-Phase*, in der die SuS in Zweier- oder Dreiergruppen nun selbst eine solche Anlage aufbauen sollen.

Explore

Die SuS werden in homogene Gruppen von zwei bis drei Personen aufgeteilt. Jede Gruppe erhält folgenden Aufgabenzettel:

<u>Aufgabe:</u>

Entwirf einen Aufbau für Infusionstherapie. Beachte die medizinischen Vorgaben für den angeführten Patienten:

Max Mustermann

Medikament: Wasser
Menge: $230\ ml$
Behandlungsdauer: $(20 \pm 2)\ min$

Du hast 15 Minuten Bauzeit zur Verfügung. Dein Ziel ist es, möglichst nahe an die erforderlichen 20 Minuten Behandlungsdauer zu kommen. Teste also immer wieder deinen Aufbau, wie lange das Wasser braucht um aus dem Becher zu rinnen und verändere dein Design so, dass es den Anforderungen immer besser entspricht.

Nach der 15-minütigen Bauzeit werden alle Modelle getestet und gleichzeitig „gestartet“.

Jede Gruppe erhält einen Papierbecher und eine Schüssel oder Wanne, um Wasser darin aufzufangen. Auf einem separaten Tisch liegen unterschiedlichste Materialien bereit. Eine Auflistung dafür ist im Abschnitt „Vorbereitung“ angegeben. Diese Liste darf natürlich gerne ausgeweitet werden. Wichtig ist zu beachten, dass es genügend Materialien gibt, damit jede Gruppe ein vollständiges Setup bauen kann. Diese müssen keineswegs professionell gebaut sein. Jedoch sollte es nicht an Materialmangel scheitern, dass die Gruppen ihre Modelle verbessern können.

Explain

In dieser Phase soll jede Gruppe präsentieren, wie sie ihr Modell Schritt für Schritt verbessert haben. Sie sollen dabei auch angeben, was für eine Rolle die Mathematik in diesem Entwicklungsprozess spielte beziehungsweise welche Rechnungen sie vornahmen. Es kann auch eine Strichliste geführt werden, welche Methoden die einzelnen Gruppen verwendeten. Die Lehrperson stellt in dieser Phase viele Fragen zu den fachlichen Inputs der SuS. Sie kann so (Vor-)Wissen, Fehlvorstellungen und bereits erarbeitete Kompetenzen erheben und den weiteren Verlauf des Unterrichts daran anpassen.

Diese Phase soll etwa 15 Minuten in Anspruch nehmen. Es wird dafür ein Timer gestellt. Nachdem die 15 Minuten vorbei sind, werden die Modelle wieder beobachtet. Es wird festgehalten, bei welchen Modellen der Becher schon leer ist. Anschließend wird laufend mitdokumentiert zu welchen Zeiten die restlichen Becher leer werden. Nach insgesamt 25 Minuten wird gestoppt und festgehalten, welche Becher noch nicht leer sind.

Es kann natürlich sein, dass diese gesamte Zeitspanne für die Auswertungen gar nicht nötig ist. Dann wird die Planung dementsprechend angepasst.

Zum Abschluss dieser Phase werden die SuS daran erinnert, dass sie ihre Notizen, Skizzen und Berechnungen zur nächsten Stunde wieder mitbringen sollen. Es wird noch kurz Zeit gegeben, dass die SuS ihre Notizen strukturieren können, sodass sie nächstes Mal noch wissen, was genau sie mit welcher Rechnung ausgewertet haben.

Elaborate

In dieser Phase werden die gemessenen Testwerte während des Bauprozesses mit den tatsächlichen Werten verglichen. Mit den Werten der Gruppe, die ihre Dauer am besten vorhergesagt, wird eine neue Darstellungsform erarbeitet - der Funktionsgraph einer linearen Funktion.

Ein Beispiel:

Eine Gruppe hat die Messung durchgeführt, dass nach zwei Minuten in der Auffangwanne 33 ml Wasser gelandet sind, und daraus abgeleitet, dass der Becher nach knapp 19,39 Minuten leer ist, weil dann 320 ml ausgetreten sind. War der Becher dann nach genau 19 Minuten tatsächlich leer, ist dies eine ausreichend genaue Berechnung, um damit zu arbeiten.

Ein Koordinatensystem wird erstellt, bei dem auf der ersten Achse die Zeit aufgetragen wird und auf der zweiten Achse der Füllstand des Bechers. Abbildung 3 zeigt ein Beispiel, das mit *Geogebra* erstellt wurde.

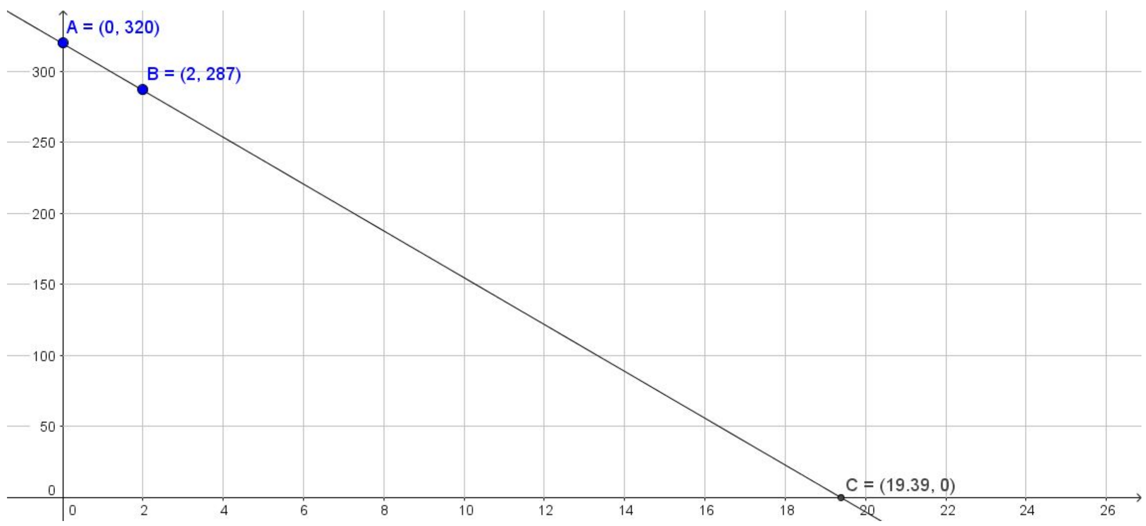


Abbildung 3: Möglicher Funktionsgraph

Als erstes werden die beiden Punkte A und B in das Koordinatensystem eingezeichnet. Schließlich wird eine Gerade durch die Punkte gelegt und die Nullstelle graphisch ermittelt. Dieser Wert wird nun mit der Berechnung der Gruppe verglichen. Es soll auch angemerkt werden, dass dies beinahe mit dem tatsächlichen Wert übereinstimmt, die kleine Abweichung aber davon rühren kann, dass es vielleicht eine falsche Annahme war, dass in jedem Zeitintervall immer gleich viel Flüssigkeit aus dem Becher abrinnt.

Ergänzend sollen die SuS nun anhand des Funktionsgraphen ermitteln, wie viel Flüssigkeit sich beispielsweise noch nach 10 Minuten in dem Becher befand. Es soll hier auch erklärt werden, wie Punkte richtig angegeben werden.

Evaluate

Abschließend wird in der *evaluate-Phase* das Verständnis der linearen Funktionen ausgewertet. Hier soll es eine analoge Aufgabe geben, die die SuS nun sowohl algebraisch als auch graphisch lösen können.

Aufgabe:

Maria Musterfrau werden 400 ml einer bestimmten Medizin über eine Zeitdauer von 80 Minuten verabreicht.

- Gib an, wie viel Milliliter der Medizin nach 20, 60 und 80 Minuten noch vorhanden (im Infusionsbeutel) sind.
- Stelle den Zusammenhang graphisch mit Hilfe eines Funktionsgraphen einer linearen Funktion dar und zeichne die Punkte ein, die beschreiben, wie viel Medizin nach 20, 60 und 80 Minuten noch vorhanden ist. Beschrifte diese Punkte mit den Koordinatenwerten.

4.3 Bemerkungen

Das schrittweise Verbessern des Prototyps ist ein Merkmal des sogenannten *engineering design cycles*. Ein erster Prototyp wird entworfen, gebaut und getestet. Basierend auf den erhaltenen Daten wird das Objekt so verändert, dass es den Anforderungen besser entspricht. Diese neue, verbesserte Version wird ebenfalls gebaut und wieder getestet. Der Vorgang findet so lange statt, bis die Anforderungen an das Modell zufriedenstellend erfüllt werden. Diese iterativen Optimierungsschritte entsprechen relativ gut dem Ablauf, wie er auch oft in der Realität vonstatten geht.[64] Dieser Zyklus des Planens, Testens und Anpassens sollte hin und wieder bewusst eingesetzt werden, um Schülerinnen und Schülern einen Einblick geben zu können, wie im Ingenieurwesen gearbeitet wird. Das Testen finden oft in Zusammenarbeit mit den Klienten statt, um die Anpassungen richtig durchzuführen. Kommunikation ist also ein wichtiger Faktor in Ingenieursberufen.[65]

Es soll auch aufgearbeitet werden, wie vielfältig und in welchen Bereichen Ingenieurstätigkeiten eingesetzt werden. Dies beginnt schon bei dem Design einfacher Gegenstände wie Scheren, Dosenöffnern oder Reißverschlüssen. Weitere Beispiels sind eben Anwendungen in der Medizin wie beispielsweise der Infusionsbeutel oder adaptierte Geräte für Menschen mit Beeinträchtigungen. Die verschiedenen Einsatzgebiete von Ingenieurinnen und Ingenieuren sind noch viel weitläufiger und decken beinahe alle Bereiche des täglichen Lebens ab. Es wäre wünschenswert, dass die Schülerinnen und Schüler ein Bewusstsein dafür entwickeln und Berufe im technischen Bereich wie eben im Ingenieurswesen wahrnehmen als solche, die das Ziel verfolgen das Leben der Menschen zu erleichtern. Sollten Schülerinnen und Schüler den Wunsch verspüren in ihrem späteren Leben

[64] Vgl. Boesdorfer & Greenhalgh, 2014, S.52
[65] Vgl. Hefty, 2015, S. 424f

einen Beruf auszuführen, bei dem sie Menschen helfen können, verstehen sie also im Optimalfall, dass dies besonders mit technischen Berufen, in denen Mathematik notwendig ist, möglich ist.[66]

Es bietet sich hier an über Modellbildung im Allgemeinen zu sprechen und Faktoren zu diskutieren, die für dieses Beispiel erschwerend sind. Wird beispielsweise ein Papierbecher verwendet, ändern sich möglicherweise dessen Eigenschaften, wenn er sich mit Wasser vollsaugt. Hier kann stark ausgeholt werden, wenn die Charakteristik, Stärken und Schwächen von Modellierungen diskutiert werden. Ich verweise hier auf die im vorangegangenen Kapitel *Modellierungsaufgaben* aufgelisteten Erfahrungen, die Schülerinenn und Schüler machen können.

[66] Vgl. Moyer & Everett, 2012, S. 3

5 Beispielplanung 2: Spieleentwicklung

In dieser Unterrichtssequenz dreht sich alles um das Spiel „Dobble“. Das Spiel besteht aus 55 runden Karten, auf denen jeweils 8 verschiedene Symbole abgebildet sind. Das ausgeklügelte am Spiel ist, dass jede Karte mit jeder beliebigen anderen Karte immer genau ein Symbol gleich hat. Die Schülerinnen und Schüler sollen ein eigenen Spiel entwickeln, dass sich vom Originalspiel durch eine unterschiedliche Anzahl an Karten unterscheidet. Bei dieser Planung ist es nicht unbedingt notwendig, dass die SuS die optimale Antwort in der *explore-Phase* herausfinden. Es reicht einerseits, dass sie Ansätze des kombinatorischen, geordneten Zählens verfolgen oder einfach, dass ihnen bewusst wird, dass bei dieser auf den ersten Blick relativ einfach scheinenden Aufgabe, Mathematik eine sehr wichtige Rolle bei der Lösungsfindung spielt.

In der *elaborate-Phase* wird schließlich eine Lösungsstrategie gemeinsam erarbeitet. Diese basiert unter anderem auf Geradengleichungen und Lagebeziehungen zweier Geraden in einer Ebene. Es ist notwendig, dass diese Inhalte vor dieser Unterrichtssequenz schon besprochen wurden. Sollte sich die Lehrperson nicht sicher sein, wie der Leistungsstand der SuS ist, wird hier eine schriftliche Überprüfung empfohlen. Die wichtigste Voraussetzung für diese Einheit ist, dass die SuS angeben können, dass sich zwei nicht-parallele Geraden in der Ebene in genau einem Punkt schneiden.

5.1 Vorbereitung

Diese Unterrichtssequenz wird zwei Unterrichtsstunden dauern. In der ersten Stunde werden die Phasen *engage*, *explore* und *explain* durchgeführt. In der zweiten Unterrichtsstunde wird mit der *elaborate-* und *evaluate-Phase* abgeschlossen. Die Lehrperson sollte mindestens eine Ausführung des Spiels „Dobble“ organisieren und mit in den Unterricht nehmen. Außerdem benötigen die SuS genügend Papier, um sich Notizen machen zu können und die Entwürfe der ersten Kartensets zu skizzieren.

5.2 Unterrichtsablauf

Engage

Die SuS sollen eine Runde des Spiels „Dobble“ spielen und sich an das Spielprinzip gewöhnen. Ist nur ein Kartendeck für die ganze Klasse verfügbar, bekommt jedes Kind zwar nur ein bis zwei Karten. Das Spielprinzip kann dadurch aber trotzdem veranschaulicht werden. Die SuS können beisielsweise 4er Gruppen bilden und das Ziel ist es, die eigene Karte beim Entdecken des identen Symbols auf den Ablagestapel in der Mitte legen zu können. Nach jeder Runde wird neu ausgeteilt.

Es soll sichergestellt werden, dass die SuS verstanden haben, dass jede Karte die gleiche Anzahl an verschiedenen Symbolen hat und dass bei jedem Kartenpaar genau ein Symbol gleich ist. Am besten werden diese zwei Bedingungen an der Tafel festgehalten.

Explore

Die SuS sollen nun ein eigenes Kartenset mit kleinerem Umfang basteln.

Aufgabe:

Du möchtest jemandem zum Geburtstag deine persönliche Version eines „Dobble“-Spiels schenken. Die einzelnen Symbole sollen an gemeinsame Erlebnisse erinnern. Das Spiel soll aus 7 Karten bestehen. Bastle jetzt einen Prototypen dieses Spiels. Du kannst für die Symbole vorübergehend einfach Buchstaben verwenden.

Dies sollte für die *explore-Phase* schon ausreichend sein. Sollten schnellere SuS zusätzliche Fragen bearbeiten wollen, bieten sich folgende Möglichkeiten an:

- Wie viel verschiedene Symbole werden benötigt, wenn das Kartendeck über mindestens 20 Karten verfügen soll?
- Es stehen 7 verschiedene Symbole zur Verfügung. Wie viele Karten können damit entworfen werden, sodass immer noch alle Regeln des „Dobble“-Spiels erfüllt werden?
- Wie viele Karten kann das Kartendeck haben, wenn auf jeder einzelnen Karte drei Symbole sind?

Explain

Die SuS sollen angeben, wie sie die Aufgabe umgesetzt haben. Es wird eine Strichliste geführt, wie viele verschiedene Symbole jede Gruppe insgesamt benötigt hat.

Abschließend teilt die Lehrperson mit der Klasse eine graphische Methode, um auf die Lösung zu kommen (Abbildung 4).

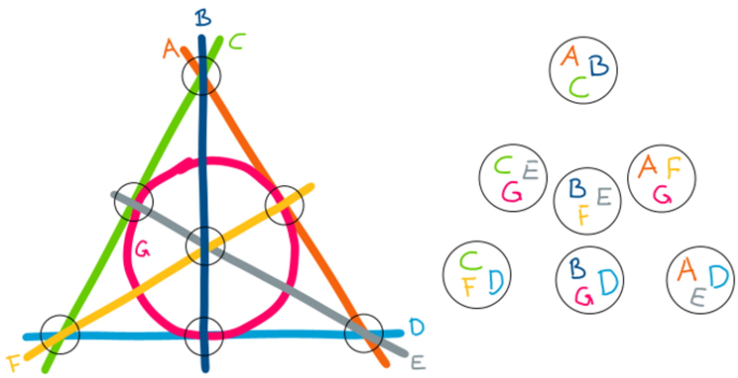


Abbildung 4: Graphische Lösung für ein Kartenset aus 7 Karten bestehend

Dargestellt sind 7 unterschiedlich farbige Linien A bis G, die jeweils bestimmte Symbole repräsentieren. Der Schnittpunkt dreier Linien beschreibt immer eine Karte, die dann genau diese drei durch die Linien repräsentierten Symbole aufweist. Jede Linie hat drei Schnittpunkte. Das bedeutet also, dass jedes Symbol im gesamten Kartendeck insgesamt drei Mal vorkommt. Da je zwei Karten durch mindestens eine Linie verbunden sind, ist garantiert, dass diese beiden Karten ein Symbol gemeinsam haben (jenes Symbol, das die Linie repräsentiert). Jetzt muss nur noch gezeigt werden, dass kein Kartenpaar mehr als ein Symbol gemeinsam hat. Auch dies ist in der Abbildung ersichtlich, da zwei Karten nie mit mehr als einer Linie verbunden werden.

Elaborate

Nun geht es darum, wie das Kartendeck noch erweitert werden kann. Im vorherigen Beispiel war die optimale Lösung ein Kartendeck mit 7 Karten, wofür insgesamt 7 Symbole benötigt wurden, davon auf jeder Karte 3.

Aufgabe:

Wie viele Karten kann das Kartendeck haben, wenn auf jeder Karte 4 Symbole abgebildet sind?

Diese Aufgabe wird gemeinsam mit den SuS erarbeitet. Festgehalten werden soll:

1. Jeder Schnittpunkt, bei dem sich vier Linien schneiden, stellt eine Karte dar.
2. Kann herausgefunden werden, wie viele Karten möglich sind? (Bei zwei Symbolen pro Karte sind es $n \cdot (n-1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ Karten : AB, CB, AC. Bei drei Symbolen pro Karte sind es $n \cdot (n-1) + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ Karten. Also könnten es bei vier Symbolen pro Karte $n \cdot (n-1) + 1 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$ Karten sein.)
3. Bei zwei und drei Symbolen pro Karte ist die Anzahl der Symbole insgesamt (3 und 7) gleich der Anzahl der Karten. Dies könnte also bedeuten, dass in einem Kartendeck, bei dem 4 Symbole auf einer Karte sind, insgesamt 13 Symbole verwendet werden.

Die letzten beiden Punkte müssen nicht unbedingt besprochen werden. Sie schulen das logische und deduktive Denken, sind aber nicht unbedingt notwendig für die weitere Bearbeitung des Beispiels. Es soll nun mit folgendem Raster weitergearbeitet werden:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Steigungen:

0	1	2	„∞"
J	K	L	M

Werden nun Geraden über das 3x3-Raster gelegt, gilt folgendes:

- Jede Gerade beinhaltet 3 Symbole.
- Parallele Geraden schneiden sich nicht.
- Geraden, die nicht horizontal (Steigung $= 0$) oder vertikal (Steigung $=$ „$\inf$“) sind, werden am unteren Ende des Rasters wieder fortgesetzt, wenn sie oben aus dem Raster austreten.
- Geraden mit unterschiedlicher Steigung schneiden sich genau in einem Punkt. (Dies funktioniert übrigens nur, wenn die Seitenlänge des Rasters einer Primzahl entspricht.)

Damit sich die parallelen Geraden schneiden, wird jeweils ein Symbol für die Steigung hinzugefügt.

- Die drei horizontalen Geraden ergeben also die Karten: ABCJ, DEFJ und GHIJ.
- Die drei Geraden mit der Steigung 1 ergeben die Karten: AHFK, DBIK und GECK.
- Die drei Geraden mit der Steigung 2 ergeben die Karten: AEIL, DHCL und GBFL.
- Schließlich kann noch eine weitere Karte erzeugt werden, da die Symbole der vier Steigungen davor noch nicht gleichzeitig auf einer Karte vorgekommen sind: JKLM

Wir haben also ein Kartendeck mit insgesamt 13 Karten und 13 Symbolen, wobei auf jeder Karte jeweils 4 Symbole abgebildet sind, erstellt.

Es kann hier noch hinzugefügt werden, dass die Methode mit dem Raster nicht mit einem 4x4 Raster funktioniert, da dort zum Beispiel horizontale Geraden und Geraden mit der Steigung 2, aufgrund der Fortsetzung der Linien beim Austreten aus dem Raster auf der gegenüberliegenden Seite, insgesamt zwei Schnittpunkte hätten und somit ein Kartenpaar über zwei idente Symbole verfügen würde. Beim 5x5-Raster funktioniert es aber wieder, da 5 eine Primzahl ist und sich somit alle Geraden mit unterschiedlicher Steigung nur ein einziges Mal schneiden.

Evaluate

Nun sollen die SuS eigenständig ein Kartenset entwerfen, auf dem jeweils fünf Symbole auf einer Karte abgebildet sind. Hier wird evaluiert, ob die SuS strukturiert arbeiten können, was bei kombinatorischen Zählweisen einen enormen Vorteil darstellen kann.

Aufgabe:

Erstelle ein Kartenset mit jeweils fünf Symbolen auf einer Karte! Kannst du im Vorhinein schon herausfinden, wie viele unterschiedliche Karten du damit erstellen kannst?

5.3 Bemerkungen

Spiele eignen sich in vielfältiger Weise um Schülerinnen und Schülern bewusst zu machen, wo sich überall Mathematik versteckt. So können etwa Spiele thematisiert werden, bei denen kleine Kopfrechnungen die Gewinnchancen erhöhen können. Als typisches Beispiel wird gerne das Spiel *Die Siedler von Catan* angeführt. Hier wird jeweils mit zwei Würfeln gewürfelt und entsprechend der Augensumme können dann weitere Schritte gesetzt werden. Dabei ist es natürlich von Vorteil, wenn man schon im Vorhinein abschätzen kann mit welcher Wahrscheinlichkeit gewisse Augensummen auftreten werden. Eine andere Möglichkeit ist das besprechen von digitalen Spielen. Beim Programmieren von Videospielen ist man sehr stark auf Mathematik angewiesen. Entweder erneut im Bereich der Wahrscheinlichkeit, im Bereich der Logik oder beispielsweise in der Vektorrechnung, um die Bewegung von Objekten und Personen zu programmieren.

In dieser Unterrichtssequenz wurde jedoch ein Spiel vorgestellt, bei dem die Verwendung von Mathematik nicht zu einer höheren Gewinnchance beitragen kann. Beim Spiel *Dobble* hängen die Gewinnchancen ausschließlich von der Schnelligkeit ab. Wenn diese Unterrichtssequenz beginnt, dürfte es den Schülerinnen und Schülern also noch nicht klar sein, wie nun die Mathematik ins Spiel kommt. Dies passiert erst dann, wenn darüber gesprochen wird, wie dieses Spiel entwickelt wurde. Es soll bewirken, dass Schülerinnen und Schüler Mathematik nach dieser Unterrichtseinheit als relevanter und präsenter im alltäglichen Leben wahrnehmen.

Auch das vernetzte Denken könnte mit dieser Unterrichtseinheit gerechtfertigt werden. Für die Entwicklung der Spielkarten werden sowohl Kombinatorik, Geradengleichungen und Eigenschaften von Primzahlen miteinbezogen. In der Schule ist es oft schwierig authentische Beispiele zu finden, in denen mehrere Teilgebiete zusammentreffen. Gleichzeitig ist es in der Schule oft auch recht intuitiv, welches Teilgebiet der Mathematik zur Lösung einer Aufgabe notwendig sein wird. Dass für die Spieleentwicklung nun Lagebeziehungen von Geraden betrachtet werden, könnte Schülerinnen und Schülern das Gefühl mitgeben, dass sich hinter alltäglichen Dingen aus ihrem Leben öfters mathematische Anwendungen verstecken, die im ersten Moment nicht offensichtlich sind.

6 Beispielplanung 3: Saalkonstruktion

Diese Unterrichtssequenz bewegt sich in den Bereich des Bauingenieurwesens. Es dürfte Schülerinnen und Schülern einleuchten, dass bei der Konstruktion von Gebäuden eine Vielzahl an Berechnungen notwendig sind, bevor die ersten Bauschritte in die Tat umgesetzt werden. Die Schwierigkeit dieser Unterrichtssequenz bestand darin, den Schülerinnen und Schülern eine Aufgabe im Format einer *Fertigungsaufgabe für den Mathematikunterricht* zu stellen. Also, dass das Ziel ein gebautes Objekt ist, welches die Schülerinnen und Schüler im Unterricht in recht kurzer Zeit und mit wenig Materialien herstellen können. Gleichzeitig soll es aber nicht möglich sein, die Aufgabe zu erfüllen, ohne dass etwas gerechnet wird.

Die Aufgabe besteht darin, dass die Schülerinnen und Schüler einen Konzertsaal konstruieren sollen, bei dem man von jedem Sitzplatz aus die gesamte Bühne einsehen kann. Das notwendige Volumen des Konzertsaals soll dabei möglichst wenig zunehmen. Als Ausgangslage bekommen die Schülerinnen und Schüler die Daten eines bereits bestehenden Konzertsaals, bei dem allerdings nicht alle Plätze über eine uneingeschränkte Sicht verfügen.

Mathematik wird hier deshalb notwendig, weil die Schülerinnen und Schüler sonst ihre Ergebnisse nicht überprüfen, präsentieren und vergleichen können. Einerseits müssen sie die Steigung der einzelnen Etagen berechnen um evaluieren zu können, ob Treppen gebaut werden können, die mühelos begehbar sind. Für die Berechnung des Volumens und der Umrechnung der Daten für das Modell müssen sie außerdem verständig mit einem selbst gewählten Maßstab rechnen können. Als Vorwissen sollten die Schülerinnen und Schüler also den Umgang mit Winkelfunktionen und Verhältnisrechnungen mitbringen.

6.1 Vorbereitung

Für diese Unterrichtssequenz sollen zwei Unterrichtsstunden eingeplant werden. In der ersten Unterrichtsstunde werden die Phasen *engage* und *explore* durchgeführt. In der nächsten Unterrichtsstunde wird mit den Phasen *explain*, *elaborate* und *evaluate* abgeschlossen.

Von der Lehrperson werden Karton, Papier und Klebeband zur Verfügung gestellt. Die SuS sollten selbst Scheren, Klebstoff, Lineale, Geodreiecke und Stifte dabei haben.

6.2 Unterrichtsablauf

Engage

Abbildung 5 zeigt das BAM Howard Gilman Opera House in Brooklyn, New York City.[67]

Es gibt Plätze, bei denen sieht man nicht die komplette Bühne. Das in Abbildung 6 dargestellte Foto wurde von einem Sitzplatz auf der höchsten der drei Etagen aufgenommen. Links ist die Bühne nicht komplett einsehbar.

Anhand dieser beiden Bilder soll mit den SuS über die Frage diskutiert werden, wie der Veranstaltungssaal anders gestaltet werden könnte, damit man von allen Sitzplätzen ausgehend die gesamte Bühne sieht. Dabei sollen alle Ideen der SuS zuerst gesammelt und auf der Tafel notiert werden. Diese Ideen werden im Anschluss genauer durchleuchtet und dahingehend überprüft, welche Einschränkungen jeweils zu treffen wären und wie sich der Komfort für das Publikum ändern

[67]zitiert nach URL: https://www.bam.org/rentals/howard-gilman-opera-house, abgerufen am 23.04.2020

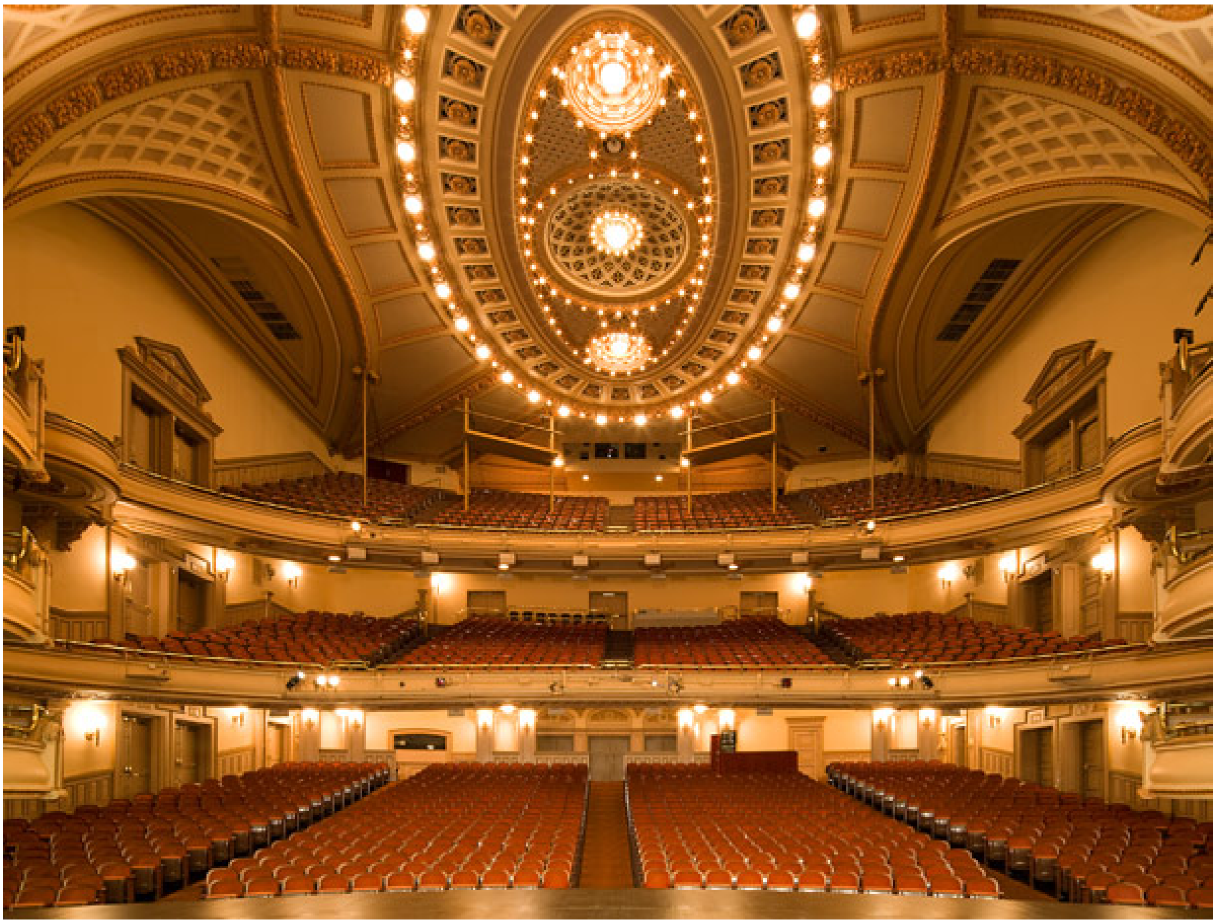


Abbildung 5: BAM Howard Gilman Opera House

Abbildung 6: Eingeschränkte Sicht auf die Bühne

würde. Die Lehrperson soll bei der Diskussion sachlich bleiben und keine Meinung vermitteln, sondern den SuS die Möglichkeit geben sich selbst eine Meinung zu bilden.

Explore

Die SuS werden in heterogene Gruppen zu je vier Personen eingeteilt. Gemeinsam bearbeitet jede Gruppe folgendes Beispiel.

Aufgabe:

Designe ein maßstabgetreues Modell eines neuen Veranstaltungssaals mit gleicher Anzahl an Sitzplätzen, der garantiert, dass die gesamte Bühne von allen Sitzplätzen gesehen werden kann. Auf dem Modell müssen die einzelnen Sitzplätze nicht eingezeichnet sein. Es reicht die Sitzreihen (mit dokumentierter Anzahl an Sitzen) auf dem „Boden“ zu markieren.

Folgende Vorgaben solltest du beachten:

- Die Sitzplatzkapazität von insgesamt 2098 Plätzen soll erhalten bleiben.
- Die Bühne hat eine Breite von 27 Metern und eine Tiefe von 15,3 Metern. Die Vorhanglinien befindet sich 14,2 Meter von der Rückwand entfernt. Dahinter dürfen sich keine Sitzplätze befinden.
- Der von dir entworfene Veranstaltungssaal soll ebenfalls drei Publikumsetagen aufweisen.

Welche Abmessungen muss der Veranstaltungssaal aufweisen, damit die Sitzplätze so platziert werden können, damit alle einen uneingeschränkten Blick auf die Bühne gewährleisten können? Dein Ziel ist es, den Saal so zu konzipieren, dass möglichst wenig zusätzlicher Raum benötigt wird. Zum Vergleich sind hier die Abmessungen des originalen BAM Howard Gilman Opera House angeführt: [68]

Sitzplatzkapazitäten:

Orchester	934
Mezzanin	567
Balkon	525
Logen	72
gesamt	2098

Abmessungen der Bühne (die Werte sind gerundet):

Breite	28m
Tiefe	15,3m
Vorhangslinie bis zur Rückwand	14,2 m
Höhe der Bühne über dem Publikum	0,6 m

geschätze Werte für die Abmessungen des Varanstaltungssaals insgesamt:

[68] zitiert aus URL: https://www.bam.org/media/15829408/BAM-Opera-House-Tech-Specs-February-2019.pdf, abgerufen am 23.04.2020

Breite: 36 m
Länge (Bühnenanfang bis Saalrückwand): 24 m
Höhe: 20 m

Im Anhang befindet sich noch der Saalplan des BAM Howard Gilman Opera House. [69]

Explain

In der *explain-Phase* werden die unterschiedlichen Konstruktionen im Klassenzimmer geteilt. Die Abmessungen der jeweiligen Veranstaltungssäle der Gruppen werden an der Tafel gesammelt und als Vergleichswert das Volumen des Saals berechnet. Die Gruppen sollen erklären, welchen Zugang sie jeweils gewählt haben, um die Sichtbarkeit der Bühne von den einzelnen Sitzplätzen aus zu verbessern. Die Lehrperson stellt hier viele Detailfragen zu den Abmessungen des Saals.

Elaborate

Einige Gruppen werden vermutlich den Zugang wählen, dass die Steigung der Etagen erhöht wird. Hier sollen die SuS mit der Klasse teilen, ob sie sich überlegt haben, welche Einschränkungen dieser Zugang mit sich bringen könnte. Es soll herausgearbeitet werden, dass die „Böden“nicht beliebig steil sein können, weil man sich schließlich noch zwischen den Plätzen bewegen können muss und die Steigung der Treppen nicht beliebig gewählt werden kann. Die SuS sollen folgende Frage bearbeiten:

Aufgabe:

Die Zuschauer müssen mithilfe von Stiegen zu ihren Plätzen gelangen können. Diese sollten 50° nicht überschreiten, weil dann ein Betreten ohne Geländer zu gefährlich wäre. Überprüfe, ob deine Planung diese Regel einhält.

Alternativ kann die konkrete Steigungsangabe in dieser Aufgabenstellung auch weggelassen werden. Es lassen sich im Internet einige interessante Vorgaben finden, an denen sich die Steigung der Treppen zu orientieren hat. Die genauere Bearbeitung dieser Vorgaben und Normen wäre sogar eine mögliche Ausweitung dieser Unterrichtssequenz. Es zeigt den SuS, dass sogar hinter Treppen, die sie vermutlich jeden Tag benützen, mehr Mathematik steckt, als ihnen auf den ersten Blick möglicherweise bewusst ist.

Evaluate

Diese Phase soll dazu dienen, den Fortschritt der SuS im Anwenden von Steigungsberechnungen in der Geometrie zu evaluieren. Hierfür eignet sich eine eingekleidete Aufgabe mit ähnlichem Kontext.

Aufgabe:

[69] https://www.bam.org/media/15524911/19-62209-OH-Seating-Chart-Update-1-.pdf, abgerufen am 23.04.2020

Bei der Renovierung eines Hauses muss die Treppe zur Eingangstür neu gestaltet werden. Der Abstand von der Türschwelle zur Grenze des Grundstücks beträgt 1,20 m. Die Türschwelle befindet sich 30 cm über dem Grundstück. Wie stark ist die Treppe geneigt? Wird ein Geländer benötigt? (ab 45° Steigung)

6.3 Bemerkungen

Um den Inhalt für die Schülerinnen und Schüler *lebensrelevanter* (siehe Kapitel *Realitätsbezüge*) zu gestalten, kann auch ein Veranstaltungssaal aus deren Lebensumgebung gewählt werden. Als Beispiel für Wien würde sich etwa das *GLOBE Wien* anbieten. Dort kann jene Fläche berechnet werden, die nicht mit Sitzplätzen belegt werden darf, da die Sicht durch Säulen versperrt würde. Da es sich dabei um Kreissektoren handelt, wird die Anwendung der Winkelfunktionen in geometrischer Anwendung fortgesetzt.

Diese Unterrichtssequenz beinhaltet viele Elemente des *Modellierens*. Schülerinnen und Schüler lernen begründete Annahmen zu treffen. In diesem Beispiel muss unter anderem der Platz abgeschätzt werden, den ein Sitzplatz einnimmt. Hier wäre es durchaus möglich die Schülerinnen und Schüler im Internet recherchieren zu lassen.

Im Anschluss an die Unterrichtssequenz bietet es sich an, über Statik zu sprechen. Kein Gebäude, keine Brücke, keine Tunnel könnten ohne statische Berechnungen gebaut werden. Und hier sprechen wir erst von Anwendungen im Bereich der Baustatik. In der Schule lassen sich nur schwer Beispiele imitieren, die die Wichtigkeit von statischen Berechnungen illustrieren. Deshalb lohnt es sich umso mehr, sich aktiv mit dieser Thematik auseinanderzusetzen und Schülerinnen und Schülern bewusst zu machen, dass mathematische Berechnungen oft einen essentiellen Beitrag zur Sicherheit von Menschen leisten.

7 Beispielplanung 4: Spirograph

Ein Spirograph ist ein Spielzeug, um geometrische Muster zeichnen zu können. Er besteht meist aus einem Zahnrad, das in einen verzahnten Außenring gelegt wird. Das Zahnrad verfügt über Löcher, durch die eine Stiftspitze passt. Wird das innere Zahnrad nun am äußeren entlanggeführt, verändert sich der Abstand der Stiftspitze zum Außenrand während der Bewegung. Dadurch entsteht ein regelmäßiges Muster. Die Anzahl der Zähne des kleinen inneren Zahnrades und des Außenrades bestimmen die Form des Musters. In der hier vorgestellten Beispielplanung sollen sich die Schülerinnen und Schüler genau diese Verhältnisse berechnen, um gezielt vorhersagen zu können, wie ein Muster aussehen wird. Beziehungsweise ist für diese Unterrichtseinheit genau der umgekehrte Weg relevant: Es stellt sich die Frage, wie viele Zähne die Zahnräder haben müssen, damit ein bestimmtes Muster gezeichnet werden kann.

Je nachdem, ob mit einem 3D Drucker gearbeitet werden kann, unterscheidet sich der Ablauf dieser Unterrichtsequenz. Im Falle des Vorhandenseins eines 3D Druckers besteht die *Fertigungsaufgabe für den Mathematikunterricht* darin, dass die Schülerinnen und Schüler eine genaue Skizze mit exakten Angaben herstellen, sodass die benötigten Zahnräder ausgedruckt werden können. Sollte kein 3D Drucker zur Verfügung stehen, betrachten die Schülerinnen und Schüler den Spirographen aus Sicht des Marketings. Um das Produkt möglichst ansprechend zu gestalten, soll es über detaillierte Anleitungen verfügen, die zeigen, wie der Spirograph genutzt wird und mit welchen Zahnrädern welche Muster erzeugt werden können.

Die einfachste Möglichkeit die richtigen Verhältnisse der Zähne der Zahnräder zu erhalten, stellt das Kürzen eines Bruches dar, bei dem die Anzahl der Zähne des Außenrings im Zähler steht und die Anzahl der Zähne des inneren Zahnrads im Nenner. Es kann aber auch mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfache sowie dem größten gemeinsamen Teiler gerechnet werden. Der Einfachheit halber wurden in dieser Unterrichtsplanung immer die absoluten Werte der Zähne als Vergleichswert herangezogen. Das ganze lässt sich natürlich auch mit dem Durchmesser der Kreise berechnen. Damit die Schülerinnen und Schüler flexibel arbeiten können, sollten sie also schon Brüche so weit wie möglich kürzen und eine Primfaktorzerlegung durchführen können.

7.1 Vorbereitung

Eine wichtige Vorbereitung für die Lehrperson ist es hier, sich selbst einen Überblick über die typischen Eigenschaften eines Spirographen zu verschaffen. Abbildung 7 auf Seite 40 zeigt die einfachste Form eines Spirographen. Dieser besteht aus einer innenverzahnten Lochschablone (diese wird im Folgenden „Außenring“ bezeichnet), sowie einem kleinen und großen Zahnrad.

Wird nun ein Zahnrad mit dem Rand des Außenrings verzahnt, kann ein Stift in ein beliebiges Loch gesteckt werden. Wird dann das Zahnrad durch leichte Druckausübung mit dem Stift entlang des Außenrings im Kreis geführt, entsteht ein Muster. Wenn das innere Zahnrad ausreichend lange am Außenring entlang geführt wird, schließt sich irgendwann der Kreis und der Stift ist wieder an der selben Stelle, wie mit der Zeichnung begonnen worden ist.

Dabei hat das innere Zahnrad die gleiche Stelle des Außenrings mehrere Male passiert. Im Folgenden wird von einer „Runde“ gesprochen, wenn das Innenrad wieder auf dem selben Platz angekommen ist, wie vorher. Dabei spielt es keine Rolle, ob das innere Zahnrad im Vergleich zur vorherigen Position gedreht ist. Abbildung 8 auf Seite 40 zeigt die einzelnen *Runden* des kleinen gelben Zahnrades. Insgesamt wurden drei *Runden* zurückgelegt. Für jede *Runde* wurde ein separates Bild aufgenommen und die entstandene Linie mit einer anderen Farbe gezeichnet.

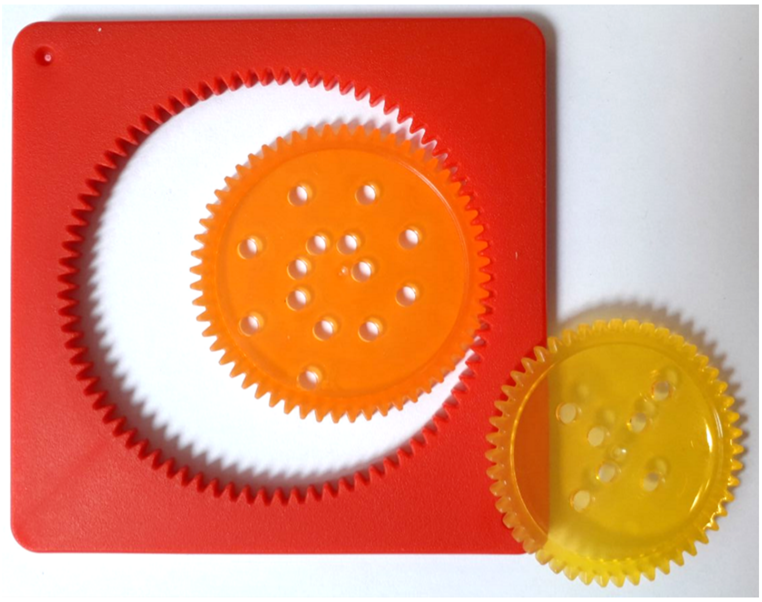


Abbildung 7: Einzelteile: Außenring, großes Zahnrad und kleines Zahnrad

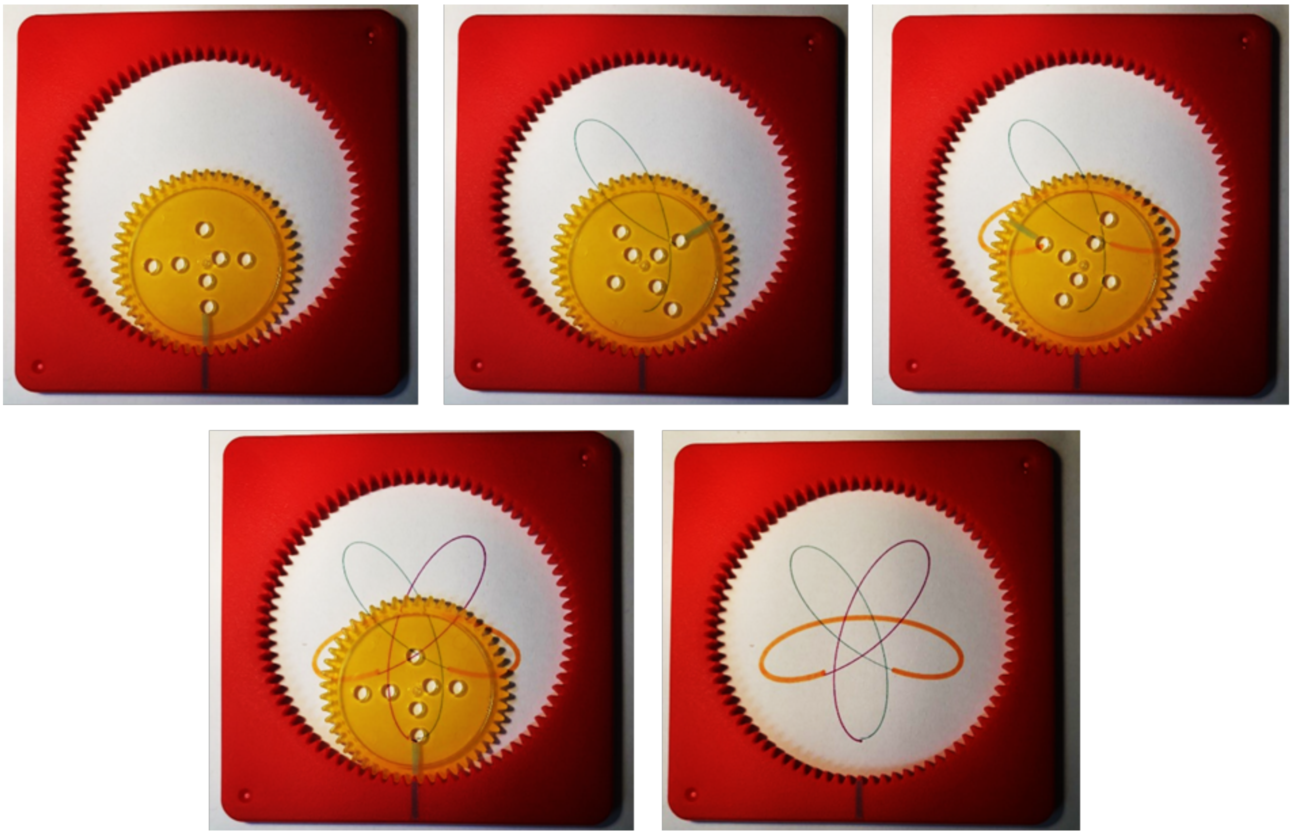


Abbildung 8: Aufnahmen der 3 *Runden* des kleinen Zahnrads

Ein weiteres Erkennungsmerkmal der verschiedenen Muster sind die „Berührungen“ mit dem Außenring. Dabei sind nicht wortwörtlich Berührungen gemeint, sondern jeweils die Stellen, bei denen der Abstand der gezogenen Linie zum Außenrand minimal ist. Die Anzahl der *Berührungen* (die relativ leicht am Muster erkennbar sind) entspricht der Anzahl der Umdrehungen des kleinen Zahnrades in der Mitte. Im Unterricht soll aber weiterhin lieber von *Berührungen* gesprochen werden. Auf einer ebenen Strecke ist es einsichtig, dass ein Rad eine volle Umdrehung zurückgelegt hat, wenn der Berührungspunkt mit der Strecke zu Beginn nun wieder die Strecke berührt. Das Rad ist dann auch genau gleich gedreht, wie vor dieser einen kompletten Umdrehung. Da im Falle des Spirographen der Außenring aber eine gekrümmte Bahn darstellt, ist die Definition einer Drehung zwar insofern dieselbe, dass der *Berührungspunkt des kleinen Zahnrades mit dem Außenring zu Beginn* nach der vollständigen Umdrehung des kleinen Zahnrades erneut den Außenring berührt, jedoch ist das innere Zahnrad gegenüber der Ausgangsposition vor der vollständigen Umdrehung verdreht. Eine Veranschaulichung dieses Zusammenhangs ist mit Abbildung 9 auf Seite 41 gegeben.

Abbildung 9: Fünf *Berührungen* mit dem Außenring

Möchte man die Form der mit dem Spirographen erzeugten Muster analysieren, ist recht offensichtlich, dass die Anzahl der Zähne der einzelnen Teile die entscheidende Rolle spielen. Deshalb sind diese hier schon mal angeführt (Die SuS müssen dies in der Unterrichtseinheit selbst herausfinden.):

- Der große rote Außenring hat 80 Zähne.
- Das große Zahnrad hat 56 Zähne.
- Das kleine Zahnrad hat 48 Zähne.

Um auf die Anzahl der *Runden* und *Berührungen* zu kommen, können die Anzahl der Zähne des Außenrings durch die Anzahl der Zähne des inneren Zahnrads dividiert werden. Für den Fall, dass das kleinere der beiden Zahnräder verwendet wird, ergibt sich also $\frac{80}{48}$. Dies wird schließlich so weit wie möglich gekürzt. Das liefert das Ergebnis $\frac{5}{3}$. Der Zähler gibt die Anzahl der *Berührungen* an, und der Nenner die Anzahl der *Runden*. Das stimmt mit Abbildung 8 und 9 überein.

Es gibt auch die Möglichkeit diese Kennzahlen mit dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfache zu berechnen. Auch wenn dies etwas komplizierter ist, soll aber nicht ausgeschlossen werden, dass einzelne SuS auf diese Idee kommen. Um sie dabei unterstützen zu können (und weil es eine schöne Anwendung für *ggT* und *kgV* ist), sind hier die Überlegungen zur Ermittlung der Kennzahlen mit diesem Ansatz angegeben:

1. Eine *Runde* gibt an, dass das innere Zahnrad das Außenrad wieder am selben Zahn (des Außenrades) berührt. Berührt es das Außenrad mit demselben Zahn (des Innenrads wie zu Beginn), ist die Zeichnung fertig. Also genau mit so viel passierten Zähnen, wie es das *kleinste gemeinsame Vielfache* angibt.

2. Da eine *Runde* so viel Zahnräder „verbraucht", wie der Außenring hat, kann die Anzahl der *Runden* berechnet werden, indem das *kleinste gemeinsame Vielfache* durch die Anzahl der Zähne des Außenrings dividiert wird.

3. Für die Kombination mit dem Außenring, der 80 Zähne hat und dem größeren Zahnrad mit 56 Zähnen, ergibt sich also der Wert $\frac{kgV(56,80)}{80} = \frac{560}{80} = 7$ *Runden*.

Für die Anzahl der *Berührungen* helfen heuristische Überlegungen am besten, um dies leicht verständlich zu begründen:

1. Würde ein inneres Zahnrad mit 40 Zähnen im Außenring mit 80 Zähnen verwendet, würde das innere Zahnrad genau zwei Umdrehungen, also zwei *Berührungen* machen, bis die Figur wieder von vorne beginnt. Als Rechnung ergibt sich für die Anzahl der Berührungen $\frac{80}{40} = 2$

2. Würde ein inneres Zahnrad mit 16 Zähnen im Außenring mit 80 Zähnen verwendet, würde das innere Zahnrad $\frac{80}{16} = 5$ *Berührungen* machen.

3. Hat das innere Zahnrad 32 Zähne, würde es im Außenring mit 80 Zähnen $\frac{80}{32} = 2,5$ *Berührungen* machen. Da nach zweieinhalb *Berührungen* das Muster noch nicht fertig ist, müssen noch weitere *Runden* angehängt werden. Werden diese $2,5$ Berührungen mit zwei multipliziert, ist das Ergebnis 5 und dies bedeutet, dass das innere Zahnrad innerhalb von 2 *Runden* 5 *Berührungen* absolviert. Um auf die Anzahl der Berührungen zu kommen, muss also das Ergebnis multipliziert werden, sodass es eine ganze Zahl $\mathbb{Z}$ ergibt. Dieses Dividieren und anschließende Multiplizieren kann abgekürzt werden, indem durch den größten gemeinsamen Teiler geteilt wird.

4. Für die Anzahl der *Berührungen* erhalten wir also den Zusammenhang Anzahl der Zähne des Außenrings durch den größten gemeinsamen Teiler der beiden „Zahnanzahlen": $\frac{80}{ggT(56,80)} = \frac{80}{8} = 10$ *Berührungen*.

Abbildung 10 auf Seite 43 zeigt ein Muster, das mit einer 56er-Zahnrad in dem Außenring mit 80 Zähnen gezeichnet wurde.

Nun haben wir den Zusammenhang der Anzahl der Zähne der einzelnen Teile mit dem fertigen Bild erarbeitet. Bleibt noch die Frage, wie sich das Bild verändert, wenn unterschiedliche Löcher verwendet werden. Prinzipiell kann festgehalten werden, dass die Formen „spitzigere" beziehungsweise „steilere" *Berührungen* aufweisen, wenn das Loch eine geringere Entfernung zum Rand des Zahnrades hat. Abbildung 11 auf Seite 43 veranschaulicht diesen Zusammenhang. Für alle Bilder wurde das Zahnrad mit 56 Zähnen im Außenring mit 80 Zähnen verwendet. Von links nach rechts wurden jeweils Löcher gewählt, die immer näher im Zentrum des Zahnrades liegen.

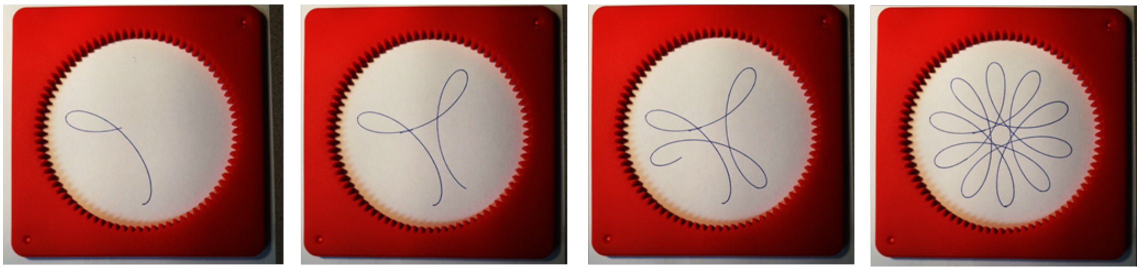


Abbildung 10: In 7 *Runden* werden 10 *Berührungen* erreicht.

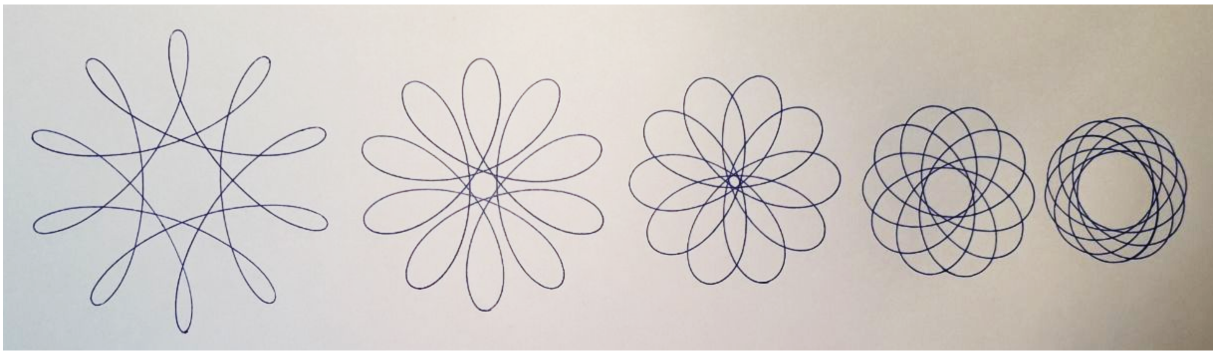


Abbildung 11: Zusammenhang zwischen gewähltem Loch und der resultierenden Form

7.2 Unterrichtsablauf

Die *Fertigungsaufgabe* für diese Unterrichtssequenz ist zweigeteilt und besteht darin, dass die SuS eine Anleitung zur Handhabung des Spirographen erstellen sollen. Es soll beschrieben werden, wie die Anzahl der Zähne der Zahnräder das Muster beeinflussen, das entstehen wird. Um die Aufgabe lösen zu können, wird Mathematik benötigt. Eine Alternative zur Erstellung einer Anleitung wäre (bei Vorhandensein eines 3D Druckers an der Schule), dass die SuS eine detaillierte Skizze erstellen und genau kennzeichnen, welche Eigenschaften die Zahnräder erfüllen müssen, sodass diese dann mit einem 3D Drucker ausgedruckt und somit auch gleich ausprobiert werden können.

Engage

Die Unterrichtssequenz wird damit begonnen, dass die SuS zuerst ein paar Bilder mit dem Spirographen zeichnen dürfen. (Es kann entweder ein großes Set gekauft werden und die Teile auf die SuS aufgeteilt werden oder es werden ein paar zusätzliche Teile mit dem 3D Drucker ausgedruckt.) Ziel soll es sein, dass die SuS sich an die Funktionsweise des Zeichengeräts gewöhnen und gewisse Eigenschaften der Muster beschreiben können.

Zum Abschluss der *engage-Phase* soll gemeinsam mit den SuS besprochen werden, was sie entdeckt haben. Hier soll eine einheitliche Sprache eingeführt werden und die Begriffe „Runden“ und „Berührungen“, sowie „Außenring“ und „inneres Zahnrad“ abgeklärt werden.

Explore

Dann erhalten die SuS eine Aufgabe, die sie erforschen sollen.

Aufgabe:

Du schreibst eine Anleitung für einen Spirographen mit einem Außenring mit 105 Zähnen. In dem Set sind drei Zahnräder enthalten. Diese haben 40, 52 und 75 Zähne. Schreibe eine detaillierte Anleitung, welche Muster mit dem Spirographen erstellt werden können. Gehe dabei insbesondere auf die Anzahl der *Berührungen* ein.

Die SuS sollen am besten mit gestuften Lernhilfen in Form von aufklappbaren Kärtchen an der Tafel unterstützt werden. Dort könnten folgende Fragen aufsteigend von schwacher bis starker Lernhilfe angegeben sein:

1. Ist es immer so, dass die Linien nach einer gewissen Zahl an *Runden* wieder genau aufeinander liegen? Oder kann es sein, man beim Zeichnen nie wieder die selben Linien nachzieht, wie zu Beginn?
2. Wie viele *Runden* müsste das innere Zahnrad zurücklegen, bis es wieder am Anfang angelangt ist, wenn es 20 Zähne hat und der Außenring 30?
3. Der Außenring hat 60 Zähne und das innere Zahnrad hat 24 Zähne. Wie oft muss das innere Zahnrad im Kreis gedreht werden, bis das Muster wiederholt wird? Wie viele *Berührungen* weist dieses Muster auf?

Explain

Hier werden die verschiedenen Lösungsstrategien der SuS zusammengetragen. Sollte es beim Kürzen des Bruches $\frac{105}{52}$ bei einigen SuS zu Schwierigkeiten gekommen sein, könnte hier die Primfaktorzerlegung wiederholt werden und in weiterer Folge das *kleinste gemeinsame Vielfache* und der *größte gemeinsame Teiler* besprochen und mit dem Beispiel verknüpft werden.

Elaborate

Das flexible Rechnen mit Brüchen wird in dieser Phase nun weiter vertieft. Die SuS bearbeiten die folgende Aufgabe.

Aufgabe:

Du möchtest in deiner Anleitung für eine Erweiterungsbox werben. Dafür beschreibst du weitere Muster, die mit anderen Zahnrädern gezeichnet werden könnten. Gib an, wie viele Zähne das innere Zahnrad haben müsste, damit man mit dem Außenring, der 105 Zähne hat, ein Muster mit 5 *Berührungen* erstellen könnte.

Evaluate

Hier eignet sich eine rein innermathematische Aufgabe, um evaluieren zu können, ob die SuS mehr Flexibilität im Umgang mit Brüchen gewonnen haben. Die Aufgabe ist in Form eines sogenannten *exit tickets* gestaltet. Das heißt, die Aufgabe wird am Ende der Stunde ausgeteilt. Nach dem Ausfüllen und Abgeben des Zettels dürfen die SuS ihre Sachen zusammenpacken.

Exit Ticket:

Kürze die Brüche so weit wie möglich.

1. $\frac{196}{42}$
2. $\frac{63}{21}$
3. $\frac{286}{275}$

7.3 Bemerkungen

Ein kleiner Schwachpunkt des Konzepts dieser Unterrichtssequenz ist es, dass den SuS von Anfang an relativ klar ist, dass hier Mathematik angewendet wird und die *Fertigungsaufgabe* sich mit einem Gegenstand beschäftigt, der zu weit entfernt und irrelevant für die Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler sein könnte. Dies könnte mit einer Erhebung evaluiert werden und wird im Kapitel *Forschungsdesiderate* nochmal aufgegriffen.

Die Lösungen der Aufgaben können für Schülerinnen und Schüler recht herausfordernd sein. Einige Schülerinnen und Schüler werden Tipps brauchen, um mögliche Lösungswege zu finden. Diese sind absichtlich in Form von *gestuften Lernhilfen* organisiert, damit Differenzierung gut möglich ist. Wichtig ist dabei, dass es Hürden gibt, sich diese Tipps zu holen. Im Falle dieser vorgeschlagenen Unterrichtsplanung besteht die Hürde darin, dass die Schülerinnen und Schüler zur Tafel vorgehen und die Kärtchen an der Tafel umklappen müssen. Alternativ können auch Briefumschläge in der Klasse verteilt werden, die die Tipps beinhalten. Nachdem eine Schülerin oder ein Schüler diese geöffnet haben, sollen sie den Zettel wieder in das Kuvert geben und so hinterlassen, wie sie es vorgefunden haben.

Es bietet sich an, die Schülerinnen und Schüler in dieser Unterrichtseinheit einen *productive struggle* erleben zu lassen. Die Aufgaben sollen also herausfordernd sein und die Schülerinnen und Schüler dazu zwingen sich mit Aufgaben auseinanderzusetzen, die nicht in ihrem gewöhnlichen Kompetenzbereich liegen. Je öfter Lernende etwas neuem ausgesetzt werden, desto stärkere Zusammenhänge werden vom Gehirn geknüpft. Die Lehrperson kann die Schülerinnen und Schüler unterstützen, indem sie ein Gerüst für zielführende Denkstrategien aufbaut und Herausforderungen so präsentiert, dass sie nicht überwältigend oder überfordernd sind. Auf diese Weise kann ein positives Selbstkonzept bei Schülerinnen und Schülern gestärkt werden.[70]

Diese Unterrichtssequenz eignet sich auch besonders gut für einen sinnvollen Technikeinsatz. Der sogenannte *„Inspirograph"* erlaubt das Zeichnen von virtuellen Spirographen-Bildern, abrufbar unter der URL https://nathanfriend.io/inspirograph/. Diese Website kann eingesetzt werden, um einerseits die Schülerinnen und Schüler mit der Funktionsweise des Spirographen vertraut zu machen, falls zu wenig plastische Objekte zu Verfügung stehen. Damit soll allerdings vorsichtig umgegangen werden, da online die spezielle Funktionsweise nicht ganz authentisch vermittelt werden kann. Besonders gut würde sich die Website aber eignen, damit die Schülerinnen und Schüler ihre Berechnungen überprüfen können. Ein Screenshot dieser Website ist mit Abbildung 12 auf Seite 46 gegeben. Wie man links erkennen kann, sind die Anzahlen der Zähne der Zahnräder leider nicht frei wählbar, sondern nur Zahlen aus einer bestimmten Auswahl möglich.

Abschließend werden hier noch die Lösungen zu den Aufgaben festgehalten. Das Zahnrad mit 40 Zähnen wird im Außenring mit 105 Zähnen wie es der Bruch $\frac{105}{40} = \frac{21}{8}$ andeutet, in 8 *Runden* 21 *Berührungen* machen. Das Zahnrad mit 52 Zähnen wird tatsächlich 105 *Berührungen* aufweisen, die es in 52 *Runden* absolviert, da die beiden Zahlen keinen gemeinsamen Nenner außer 1 haben. Für das dritte Zahnrad mit 75 Zähnen ergibt sich der Bruch $\frac{105}{75} = \frac{7}{5}$. Es werden also in 5 *Runden*

[70] Vgl. Reagan, 2016, S. 7f

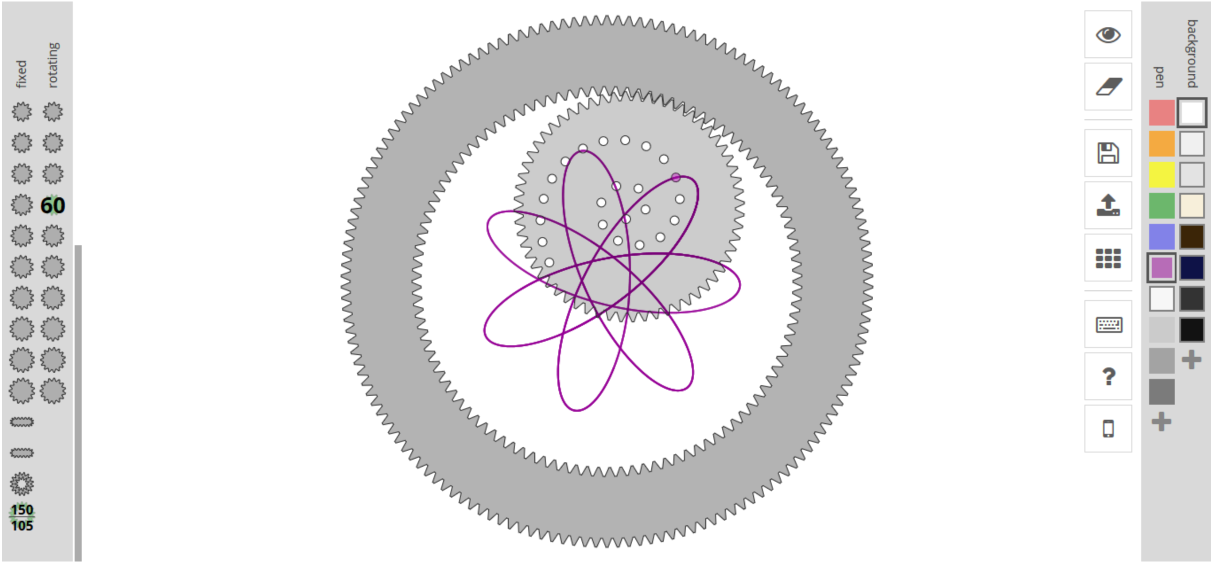


Abbildung 12: Screenshot des Online-Tools „*Inspirograph*“

7 *Berührungen* stattfinden.

Für die zweite Aufgabe gibt es mehrere richtige Antworten. Am *Inspirographen* überprüfbar sind die Kombinationen mit den Zahnrädern mit 63 und 84 Zähnen. Beim Zahnrad mit 63 Zähnen werden laut $\frac{105}{63} = \frac{5}{3}$ die 5 *Berührungen* in nur 3 *Runden* erzeugt. Bei 84 Zähnen werden schon 4 *Runden* benötigt, wie mit $\frac{105}{84} = \frac{5}{4}$ berechnet werden kann. Auch mit beispielsweise 42 Zähnen würde ein Muster erreicht werden, das 5 *Berührungen* mit dem Außenring aufweist. Der Bruch $\frac{105}{42} = \frac{5}{2}$ zeigt, dass dies in 2 *Runden* möglich ist. Diese Berechnung kann im Online-Tool *Inspirograph* nicht überprüft werden, da ein Zahnrad mit 42 Zähnen nicht ausgewählt werden kann. Dies wäre eine zusätzliche Motivation mit 3D Druckern zu arbeiten. Dann könnte ein Zahnrad mit 42 Zähnen ausgedruckt werden und die Berechnungen auf ihre Richtigkeit überprüft werden.

8 Beispielplanung 5: Dreidimensionale Zebrastreifen

In dieser Unterrichtssequenz erarbeiten die Schülerinnen und Schüler gemeinsam in Gruppen, wie sie einen dreidimensionalen Zebrastreifen malen könnten. Dieser wird dann auf dem Pausenhof oder einer als Begegnungszone verwendeten Straße vor der Schule aufgemalt. Um die vorbereitete Skizze auf das echte Bild übertragen zu können, muss ein passender Maßstab gewählt werden. Ansonsten sollten sich die Schülerinnen und Schüler flexibel im Bereich der Geometrie bewegen können.

8.1 Vorbereitung

Für diese Unterrichtssequenz sollen zwei Unterrichtsstunden eingeplant werden. In der ersten Unterrichtsstunde werden die Phasen *engage*, *explore* und *explain* durchgeführt. In der zweiten Unterrichtsstunde geht es weiter mit der *elaborate*- und *evaluate-Phase*.

Von der Lehrperson wird für die erste Unterrichtsstunde eine Präsentation mit Bildern vorbereitet, die *3D Straßenkunst* zeigen. Abbildung 13 und Abbildung 14 auf Seite 48 und 49 zeigen geeignete Beispiele. Es handelt sich hierbei um perspektivisch verzerrte Bilder, die den Anschein erwecken, dass zum Beispiel eine riesige Kluft in der Straße wäre. Positionieren sich Personen nun auf diesen Bildern, wirken diese teilweise noch realistischer. An dieser Stelle sein ein Dank an die Künstlerin Frederike Wouters ausgesprochen, die diese Bilder zur Verfügung gestellt hat.[71]

Das letzte Bild der Präsentation sollte einen dreidimensionalen Zebrastreifen wie in Abbildung 15 auf Seite 49 zeigen.

Für die zweite Unterrichtsstunde werden Farben benötigt, mit denen man auf der Straße malen kann. Dafür eignen sich haltbare Acrylfarben oder wasserlösliche Gouache Farbe sowie Pastellkreiden, Tafelkreiden oder Pigment-Wassermischungen. Für den Zebrastreifen werden die Farben weiß und schwarz benötigt, um mehrere Abstufungen von grau zu erzeugen.

8.2 Unterrichtsablauf

Engage

Zum Einstieg wird den SuS eine Präsentation mit unterschiedlichen 3D Straßenbildern gezeigt. Zum Abschluss der Präsentation wird ein Bild eines 3D Zebrastreifens gezeigt. Die SuS erfahren, dass in dieser Stunde geplant wird, wie ein 3D Zebrastreifen umgesetzt werden kann und in der nächsten Stunde dieser dann wirklich auf die Straßen vor der Schule (oder auf den Pausenhof, falls es keine Fußgängerzone gibt) gemalt wird.

Explore

Die SuS finden sich in vier Gruppen zusammen. Jede dieser vier Gruppen ist für einen Zebrastreifen zuständig. Die einzelnen S sollen eine Aufgabenteilung beim Malen der Zebrastreifen ausarbeiten. Bei der Entwicklung der Skizze sollen aber alle SuS einer Gruppe am gesamten Prozess beteiligt sein.

Jede Gruppe erhält Unterlagen zu „normalen“ Straßenmarkierungen, wie etwa Geschwindigkeitsbeschränkungen oder Richtungspfeilen auf dem Boden nebeneinanderliegender Fahrspuren. Zusätzlich sollen sie recherchieren, wie lange die weißen Streifen der Mittellinie auf den Autobahnen

[71] Bilder aus URL: https://www.freddart.de/de/3d-strassenmalerei/, abgerufen am 29.04.2020

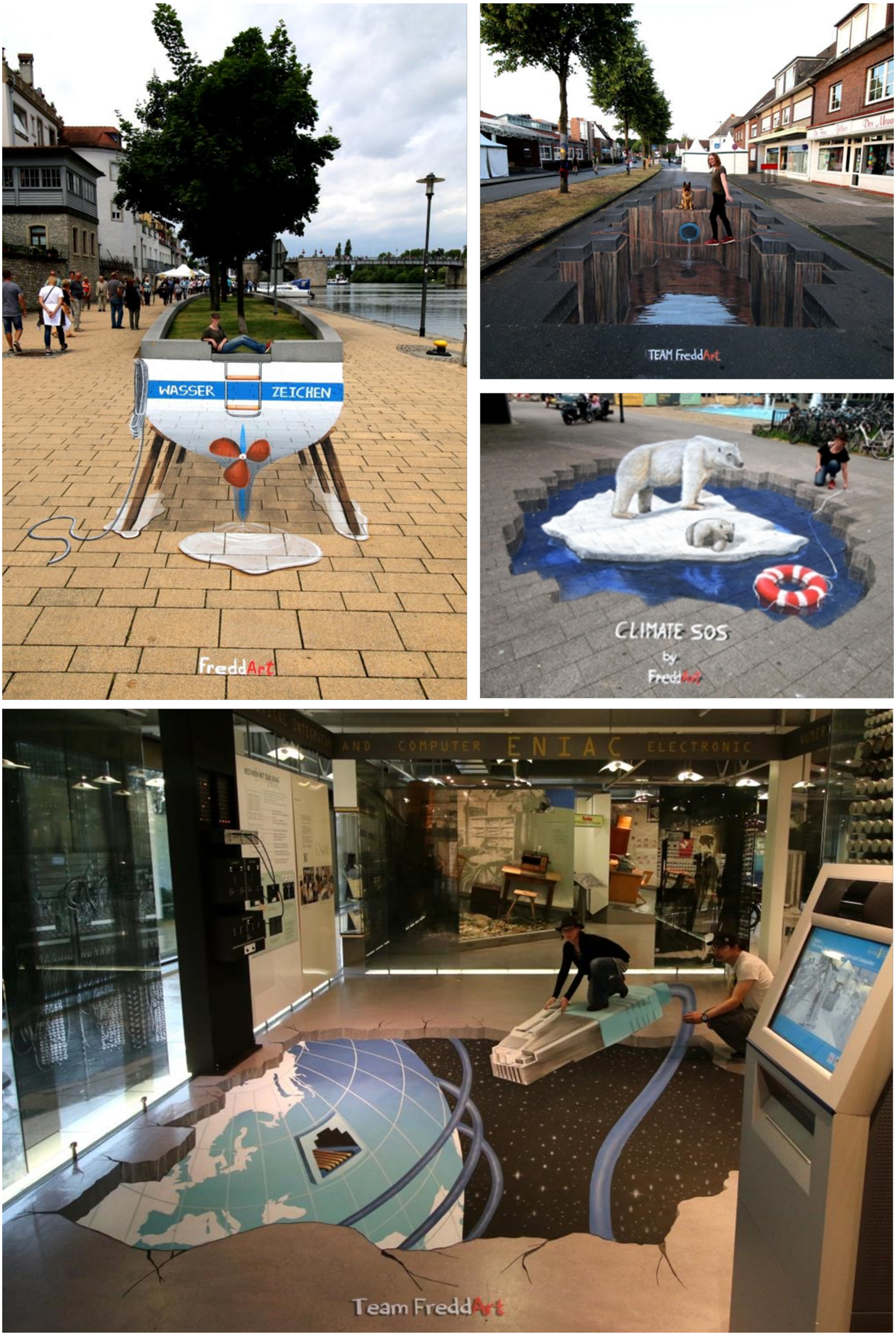


Abbildung 13: Beispielbilder (Mit freundlicher Genehmigung von Frederike Wouters)

Abbildung 14: 3D Streetart Phoenix (Mit freundlicher Genehmigung von Frederike Wouters)

Abbildung 15: 3D Zebrastreifen (Mit freundlicher Genehmigung von Frederike Wouters)

sind (nämlich 6 Meter und die Entfernung zum nächsten Streifen sind 12 Meter[72]). Dies soll ihnen helfen, die längliche Verzerrung zu beachten. Als Anhaltspunkt für den Zebrastreifen wird das letzte Bild der Präsentation weiterhin an die Wand projiziert.

Die Aufgabe in dieser Phase ist es, dass die SuS Skizzen entwerfen, wie sie die 3D Zebrastreifen gestalten könnten.

Aufgabe:

Entwirf eine verkleinerte Skizze des Zebrastreifens, wie du ihn auf der Straße malen würdest. Verwende dazu Schattierungen, damit er möglichst realistisch aussieht. Lege deine Skizze auf den Tisch und betrachte sie aus einiger Entfernung. Optimiere deine Skizze so lange, bis du mit dem Zebrastreifen zufrieden bist.

Möglicherweise muss die Lehrperson manche Gruppen darauf aufmerksam machen, die Streifen ausreichend verzerrt zu gestalten. Ansonsten können die SuS ihre Erzeugnisse aber relativ leicht selbst überprüfen.

Explain

Zu Beginn der *explain-Phase* werden alle Skizzen auf einen Tisch gelegt und ausgewertet, welche Zebrastreifen realistisch aussehen. Falls es noch Gruppen gibt, die Schwierigkeiten haben, wird ihnen von anderen Gruppen erklärt, wie sie zur Optimierung des Skizze vorgehen könnten.

Elaborate

In der *elaborate-Phase* erhalten die SuS eine neue Aufgabe:

Aufgabe:

Erstellt nun eine Skizze pro Gruppe mit genauen Beschriftungen, wie ihr den 3D Zebrastreifen auf der Straße malen wollt. Gebt auch einen Maßstab an, damit ihr wisst, welche Abmessungen die einzelnen Elemente in Wirklichkeit haben.

Die SuS sollen entweder selbst abmessen, wie breit die Straße beziehungsweise der zur Verfügung stehende Platz ist oder bekommen dies von der Lehrperson vorgegeben.

Evaluate

Zum Abschluss sollen die SuS die 3D Zebrastreifen nun auf die Straße malen. Es handelt sich somit unter anderem um eine Selbstevaluation durch die SuS.

[72] zitiert nach URL: https://www.spiegel.de/auto/aktuell/fahrstreifen-fahrer-muss-mindestabstand-nicht-einschaetzen-koennen-a-1014410.html

8.3 Bemerkungen

Beim Durchführen dieser Unterrichtssequenz soll besonders auf die Selbstbestimmungstheorie nach Deci und Ryan (siehe Kapitel *Motivation und Interesse*) geachtet werden. Schülerinnen und Schülern wird es ermöglicht Autonomie zu erleben, indem die Aufgabe offen gehalten wird und wenig Vorgaben gemacht werden, wie das Ziel erreicht werden muss. An dieser Stelle soll es den Schülerinnen und Schülern auch erlaubt sein, eine Internetrecherche zu betreiben. Die genauen Maße eines dreidimensionalen Zebrastreifens sind vermutlich ohnehin schwer zu finden und ansonsten lernen die Schülerinnen und Schüler immer noch, wie sie mit Maßstäben umzugehen haben. Eine Internetrecherche bietet auch die Möglichkeit weitere interessante Fakten zu erfahren, die vorübergehend die *Interessantheit* des Themas steigern kann und dies wiederum kann ein erhöhtes *Interesse* bei den Schülerinnen und Schülern auslösen. Rohlfs führt hierfür folgendes Zitat von Winston Churchill an: *„Personally, I am always ready to learn although I do not always like being taught.“* [73]

Neben der Autonomie spricht dieses Zitat vor allem auch die Möglichkeit zur Selbstbestimmung an. Schülerinnen und Schüler können selbst entscheiden, welche Herangehensweise sie wählen, um den Zebrastreifen zu konstruieren. Es ist ihnen auch freigestellt, wie viel Zusatzinformationen sie sich beschaffen. Dies wird besonders im Hinblick auf die verzerrten Straßenmarkierungen relevant. Die Schülerinnen und Schüler erhalten zwar Informationen, wie stark die Bodenmarkierungen in die Länge gestreckt werden, damit sie aus dem fahrenden Auto harmonisch wirken, jedoch steht es ihnen frei, ob sie diese Informationen verwenden wollen oder nicht. Auch beim Zebrastreifen an sich gibt es keine Vorgaben, wie lang er etwa sein soll oder wie viele Balken er haben sollte.

Zuguterletzt sollte diese Unterrichtssequenz den Schülerinnen und Schülern auch ermöglichen Kompetenz zu erleben. Dies wird unterstützt durch die iterativen Verbesserungsschritte und Austausch mit anderen Gruppen in der *explain-Phase*. Abschließender Faktor hierfür sollte auch das Fertigstellen des Zebrastreifens sein. Durch die wenigen Informationsquellen zu Beginn und der hoffentlich konstruktiven Diskussionen in der Gruppe, sowie der Suche nach kreativen Lösungen wird auch das Erleben eines *productive struggles*[74] begünstigt.

[73] Rohlfs, 2011, S. 93

[74] Vgl. Reagan, 2016, S. 8

9 Beispielplanung 6: Hologramm

In dieser Unterrichtseinheit sollen die Schülerinnen und Schüler eine Vorrichtung für ihr Smartphone basteln, sodass sie damit ein Hologramm erzeugen können. Als Inspiration dient lediglich ein Foto vom Aufbau, wie durch Abbildung 16 gezeigt. Die Aufgabe besteht also darin, herauszufinden, wie das Objekt nachgebaut werden kann.

Abbildung 16: Hologramm-Vorrichtung für das Smartphone

Notwendiges Vorwissen für diese Unterrichtssequenz sind grundlegende geometrische Kenntnisse. Die Schülerinnen und Schüler sollen flexibel mit zwei- und dreidimensionalen Figuren arbeiten können. Relevant für dieses Beispiel sind besonders das Trapez und die Pyramide beziehungsweise der Pyramidenstumpf. Es werden auch einige Dreiecksberechnungen benötigt, weshalb sich die Schülerinnen und Schüler mit der Anwendung von Winkelfunktionen schon recht sicher fühlen sollten.

9.1 Vorbereitung

Diese Unterrichtssequenz kann in einer einzigen Unterrichtsstunde abgehalten werden. Die dafür benötigten Materialien sind das auf Seite 52 angeführte Bild der Hologramm-Vorrichtung, welches an die Wand projiziert wird. Optional kann auch ein kurzes Video abgespielt werden, da die sich bewegenden Hologrammbilder noch eindrucksvoller sein können. Von den Schülerinnen und Schülern wird erwartet, dass sie den Großteil der benötigten Materialien selbst dabei haben. Dazu zählen Scheren, Stifte und Lineale. Die transparenten Folien werden von der Lehrperson mitgebracht. Es ist darauf zu achten, dass diese ausreichend dick sind und somit genügend Stabilität bieten. Die Klebestreifen werden ebenfalls von der Lehrperson zur Verfügung gestellt.

9.2 Unterrichtsablauf

Engage

In der *engage-Phase* wird der Klasse das Foto des Aufbaus gezeigt, mit dem ein Hologramm erzeugt werden kann. Es wird hier bewusst nicht an einem realen Modell im Klassenzimmer vorgeführt, weil die SuS dieses dann rein theoretisch nur noch abmessen müssten und so die Maße für das Objekt nicht mehr selbst herausfinden müssten. Um die Situation also realistischer zu gestalten, wird auf die Vorführung mit dem echten Objekt verzichtet. Die SuS müssen also anhand des Bildes Überlegungen treffen, wie das Objekt konstruiert werden muss, damit Hologramme erzeugt werden können.

Explore

Nach der *engage-Phase* folgt sofort die Aufgabenstellung. Diese bearbeiten die SuS in Zweiergruppen.

Aufgabe:

Fertige ein Objekt, mit dem du mithilfe eines Smartphones ein Hologramm erzeugen kannst!

Explain

Nun sollen die SuS ihre gebastelten Objekte ausprobieren. Sie dürfen dafür ihre eigenen Smartphones verwenden. Passende Videos findet man im Internet unter dem Suchbegriff *Hologramm Videos* genügend. Die einzelnen Gruppen werden dazu aufgefordert ihre Objekte zu vergleichen und Unterschiede aufzuzeigen.

Elaborate

In dieser Phase sollen die SuS herausfinden, ob der Winkel zwischen dem Bildschirm des Smartphones und den Seiten des Objekts eine wesentliche Rolle für die Qualität des Hologramms spielt.

Aufgabe:

Berechne den Winkel, der vom Smartphonebildschirm und der Seite des Objektes eingeschlossen wird. Erstelle eine Tabelle mit den Werten deines Objekts und mindestens drei weiteren Gruppen und halte fest, wie dieser mit der Qualität des Hologramms zusammenhängt.

Evaluate

Die Unterrichtssequenz kann mit einer innermathematischen Evaluation von Dreiecks- und Winkelberechnungen in Form eines *exit tickets* abgeschlossen werden. Eine mögliche Aufgabe dafür lautet folgendermaßen:

Exit Ticket:

Welchen Winkel schließt die Raumdiagonale eines Würfels mit der Grundfläche ein?

9.3 Bemerkungen

Eine mögliche Lösung für die Hologramm-Vorrichtung ist durch Abbildung 17 veranschaulicht. Die Abmessungen sind in Zentimeter angegeben. Bei diesen Maßen schließen die Objektwände mit dem Smartphonebildschirm einen Winkel von ungefähr 45° ein. Der Winkel ist irrelevant für die Qualität des erzeugten Hologramms, allerdings verändert es die Position, an der es erzeugt wird. Bei einem Winkel von genau 45°, sieht man das Hologramm am besten, wenn die Augen auf Höhe des Smartphones sind. Das bringt den Vorteil mit sich, dass man nur das Hologramm, nicht aber das Video beziehungsweise den Bildschirm des Smartphones sieht. Bei einem Winkel, der größer als 45° ist, müsste der Aufbau stärker von oben betrachtet werden, wodurch man auch den Bildschirm sieht. Bei einem Winkel, der kleiner als 45° ist, könnte es passieren, dass die Hologramm-Vorrichtung zu wenig Höhe erreicht, um das Bild vollständig reflektieren zu können.

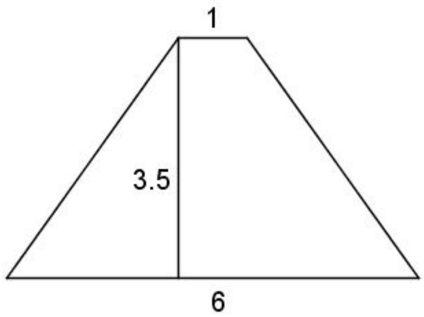


Abbildung 17: Abmessungen eines Bauteils

Es sei als Hintergrundinformation noch angemerkt, dass es sich hier nur um Reflexionen des Lichts handelt und der Begriff *Hologramm* streng genommen falsch ist. Es bietet sich an, diese Unterrichtseinheit fächerübergreifend zum Thema *Optik* in Physik zu organisieren.

10 Diskussion und Forschungsdesiderate

Wie im Vorwort schon angedeutet, wurden die *Fertigungsaufgaben für den Mathematikunterricht* mit dem Ziel entwickelt, dass sich die Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler bezüglich der Mathematik ändert. Das überwiegende Ziel sollte sein, den Alltagsnutzen der Mathematik hervorzuheben. Außerdem sollte das Bewusstsein gestärkt werden, dass in den meisten Anwendungen im Alltag mathematische Überlegungen stecken. Die Schülerinnen und Schüler sollen also durch die Implementierung von *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* die Präsenz und Relevanz von Mathematik in ihrem Alltag und in der Gesellschaft im allgemeinen stärker wahrnehmen.

Die *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* versuchen genau diesen Anspruch zu erfüllen. Durch die Auseinandersetzung mit der vorhandenen Literatur und gründlichen theoretischen Überlegungen konnte ein Unterrichtskonzept entwickelt werden, das diesen Anspruch zu erfüllen scheint. Der Ausgangspunkt stellt die *Fertigungsaufgabe des Technikunterrichts* dar. Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Aufgabe, ein bestimmtes Objekt zu fertigen. Wichtig hierbei ist, dass in der Aufgabenstellung nicht explizit angegeben ist, dass etwas berechnet werden muss. Während des Herstellungsprozesses wird das Anwenden von Mathematik aber ein unumgänglicher Schritt, da die Fertigung ohne Berechnungen nicht möglich ist. Durch die Notwendigkeit von Mathematik zu Erfüllung der Aufgabe ist die Basis für eine Aufgabe geschaffen, in der sich die Schülerinnen und Schüler nicht mehr die Frage stellen, weshalb Mathematik für sie wichtig sein sollte.

Durch die Berücksichtigung des Unterschieds von *Modellierungsaufgaben* und *eingekleideten Aufgaben* wird der Realitätsbezug sinnvoll eingesetzt. Für die *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* kann größtenteils die Perspektive des *angewandten Modellierens* (siehe Kapitel *Modellierungsaufgaben*) verfolgt werden. Mit konkreten und authentischen Beispielen lässt sich das Ziel erreichen, dass die Schülerinnen und Schüler ein besseres Verständnis der Welt aufbauen können.

Die Theorie zur *STEM-infusion* wurde angeführt, weil die *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht* der in der *STEM-infusion* ausgeführten *design challenge* ähneln und die angestrebten Lernziele auch für den Mathematikunterricht wertvoll sind. So wird einerseits das vernetzte Denken gefördert, weiters können diese Art der Aufgabenstellungen das Selbstkonzept der Schülerinnen und Schüler stärken und zuguterletzt haben diese Aufgaben das Potential das oftmals starre und manchmal negative Bild über Mathematik zu verändern. Der in *Beispielplanung 1: Infusionstherapie* durchgeführte *engineering design cycle* verdeutlicht etwa, dass die Arbeit in technischen Berufen oftmals das Ziel verfolgt, den Menschen auf eine bestimmte Art und Weise das Leben zu erleichtern. Es wird verdeutlicht, dass ein ständiger Austausch mit den Kunden notwendig ist und ein Produkt nur durch diese regelmäßige Kommunikation verbessert und an die individuellen Bedürfnisse angepasst werden kann. Die Naturwissenschaften könnten dadurch nicht mehr isoliert wahrgenommen werden, sondern als essentieller Bestandteil unserer Gesellschaft. Zusätzlich förderlich für eine stärkere Wahrnehmung der Präsenz von Mathematik stellen die unterschiedlichen Inhalte der Beispielplanungen dar, die aus einer Vielzahl von Themengebieten ausgewählt wurden. Dabei zielen nicht alle darauf ab, Schülerinnen und Schülern mitteilen zu wollen, dass sie mit dieser Anwendung von Mathematik früher oder später konfrontiert werden, sondern auch um ihnen bewusst zu machen, wo überall Mathematik versteckt ist. *Beispielplanung 2: Spieleentwicklung* zielt beispielsweise rein darauf ab, Schülerinnen und Schülern zu zeigen, dass sich selbst in einfach wirkenden Objekten mehr Mathematik verstecken kann, als es zunächst scheint. Dies könnte das Präsenzgefühl der Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf Mathematik steigern.

10.1 Präsenz

Aus diesen Überlegungen ergibt sich, dass ein Teil der Forschung sich mit der Frage beschäftigen könnte, ob Schülerinnen und Schüler die Präsenz von Mathematik im Alltag und in der Gesellschaft stärker wahrnehmen durch die Implementierung von *Fertigungsaufgaben im Mathematikunterricht*. Der Fokus liegt hier besonders auf Aufgaben, die sich auf Anwendungen im alltäglichen Leben beziehen, und die auf den ersten Blick nicht viel mathematischen Hintergrund haben. Sind Schülerinnen und Schüler dann aufgefordert selbst ein solches Objekt herzustellen, wird ihnen womöglich bewusst, dass dies durch die Anwendung von Mathematik erleichtert wird.

Eine Studie zur Überprüfung dieser Hypothese müsste als Langzeitstudie angelegt werden. Eine einzelne Unterrichtssequenz, die auf diesen Aspekt abzielt, wird vermutlich nur wenig Veränderung in der Auffassung der Schülerinnen und Schüler bewirken können, da dadurch kein dauerhaftes beziehungsweise *individuelles Interesse* aufgebaut wird. Es könnte also eine Studie durchgeführt werden, die mit einem Prätest über die individuelle Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler bezüglich Mathematik beginnt. Danach werden einige Unterrichtssequenzen mit den *Fertigungsaufgaben für den Mathematikunterricht* gehalten und anschließend ein identer oder ähnlicher Test als Posttest durchgeführt. Für eine Auswertung werden Prä- und Posttest schließlich verglichen. Fragen, die auf diesen Tests gestellt werden, könnten folgendermaßen lauten:

- Brauchst du in deinem Alltag oft Mathematik, um Probleme zu lösen?
- Benutzt du viele Dinge, die von Mathematikerinnen und Mathematikern (mit-)entwickelt wurden?
- Spielt Mathematik eine wichtige Rolle in deinem Leben?

Die Fragen können entweder offen gestaltet werden oder als geschlossenes Antwortformat, bei dem der Grad der Zustimmung angegeben werden kann. Besonders Augenmerk sollte dann auf der Formulierung der Fragen liegen, sodass sie nicht so formuliert werden, dass die Schülerinnen und Schüler dazu neigen, die gesellschaftlich erwartet Einstellung anzukreuzen. Damit nicht offensichtlich ist, dass es um die Wahrnehmung von Mathematik geht, könnten auch Distraktoren eingebaut werden, die etwa die Präsenz von Sprachen im Alltag abfragen. Unterstützend könnte der Fragebogen auch in einer allgemeinen Stunde durchgeführt werden und nicht in einer Mathematikstunde, weil dies ebenfalls einen Einfluss auf die Schülerinnen und Schüler zur Folge haben könnte. Gleiches gilt für die Unterrichtssequenzen, die für eine möglichst unbeeinflusste Studie der Wahrnehmung der Mathematik gegenüber nicht im Mathematikunterricht umgesetzt werden.

10.2 Relevanz

Bei der Wahrnehmung um die Relevanz von Mathematik geht es um die Frage, ob die Schülerinnen und Schüler denken, dass Mathematik für sie persönlich wichtig ist. Fragen, die diesen Aspekt evaluieren, könnten folgendermaßen lauten:

- Weißt du schon, was für einen Bildungsweg du nach der Matura verfolgen möchtest?
- Denkst du, dass du in deiner zukünftigen Laufbahn Mathematik brauchen wirst?
- Denkst du, dass Berufe im naturwissenschaftlichen Bereich für unsere Gesellschaft notwendig sind?

Ein Forschungsvorhaben könnte ähnlich gestaltet werden, wie für die Evaluierung der Wahrnehmung der Präsenz von Mathematik, mit dem Unterschied, dass hier die Durchführung im Mathematikunterricht selbst weniger Einfluss auf die Ergebnisse haben wird.

10.3 Implementierung

Die Unterrichtssequenzen, welche in dieser Arbeit vorgestellt wurden, fanden bislang noch keine ausgiebige Anwendung in der Schule. Durch die fehlenden Erfahrungsberichte, ergeben sich noch offene Fragen bezüglich der Implementierung. Diese werden im Folgenden angeführt.

Auf der Theorie basierend wurde mit dem *5E Modell* für die Strukturierung der Unterrichtssequenzen gearbeitet. Dieser Ablauf sollte den Vorteil mit sich bringen, dass in der *engage-Phase* das Interesse der Schülerinnen und Schüler geweckt wird und diese von sich aus die Aufgabe in der *explore-Phase* erfüllen möchten. Da dies eine idealisierte Aussage ist, wäre der tatsächliche Effekt, sowie ob und in welchem Ausmaß zusätzliche Faktoren eine Rolle für die Steigerung der Motivation spielen, interessant zu evaluieren. Es soll dabei auch der Frage nachgegangen werden, ob es zur Steigerung der Motivation förderlich ist, dass die Notwendigkeit der Mathematik in der Aufgabenstellung nicht direkt angesprochen wird.

Ein weiterer Forschungswunsch behandelt die *Offenheit* der Aufgaben. Eine Aufgabe mit großer *Offenheit* lässt mehrere verschiedene Lösungswege zu. Solche Aufgaben können das Verständnis für mathematische Probleme stärken und die Motivation steigern, weil sie Schülerinnen und Schülern Gelegenheit zu selbstständiger und kreativer Arbeit geben. Dadurch werden die Kompetenzen *Argumentieren*, *Modellieren* und *Problemlösen* gestärkt.[75] Fachlich kann bei offenen Aufgabestellungen allerdings nicht immer vorhergesagt werden, wie die Schülerinnen und Schüler ein Problem lösen werden. Es lässt sich also nicht immer exakt festlegen, welches Vorwissen die Schülerinnen und Schüler mitbringen sollten. Im Hinblick auf die *Fertigungsaufgaben für den Mathematikunterricht* könnte dies außerdem bei der Beschaffung der nötigen Materialien ein Problem werden und würde in weiterer Folge die Flexibilität der Schülerinnen und Schüler einschränken. Es ergibt sich also die Frage, ob hier ein optimaler Mittelweg gefunden werden kann.

[75] Vgl. Greefrath, 2007, S. 33

11 Abstract (Deutsch)

Im Zuge dieser Masterarbeit wird ein spezieller Aufgabentyp entwickelt, der die Nützlichkeit von Mathematik in einer Art und Weise vermittelt, dass Schülerinnen und Schüler sich nicht mehr fragen, wofür sie Mathematik in ihrem täglichen oder zukünftigen Leben brauchen. Dies kann mit speziell an den Mathematikunterricht angepassten *Fertigungsaufgaben* realisiert werden.

In dieser Arbeit werden die Merkmale einer solchen *Fertigungsaufgabe* beschrieben und erarbeitet, wie sie im Mathematikunterricht eingebettet werden kann. Als Anhaltspunkt und Inspiration für eigene neue Unterrichtseinheiten dienen sechs verschiedene Beispielplanungen als Orientierung.

Im Anschluss befinden sich Bemerkungen über die Intentionen oder mögliche Anpassungen der vorgestellten Unterrichtssequenzen. Abschließend werden Forschungsdesiderate vorgestellt, die diese Masterarbeit ergänzen würden.

12 Abstract (Englisch)

The aim of this master's thesis is the development of a specific type of task for mathematics teaching with the intended benefit of changing students' perception of the importance and relevance of mathematics in their daily and future lives. This can be achieved by implementing specifically developed *production tasks* into the teaching of mathematics.

This thesis offers a description of the characteristics of these *production tasks* and gives an idea of a successful implementation in mathematics classes. Six different lesson plans will provide orientation and inspiration in order to understand the concept of these teaching sequences and being able to create new ones.

Subsequently, there will be some comments on the intentions and possible adjustments to the described teaching sequences. This is followed by a summary of desired research complementing this thesis.

13 Quellenverzeichnisse

Literaturverzeichnis

Ansberry, K. R., & Morgan, E. R. (2007). More Picture-perfect Science Lessons: Using Children's Books to Guide Inquiry K-4, Chapter 4, 29-34. NSTA press.

Blömeke, S., Felbrich, A., & Müller, C. (2008). Theoretischer Rahmen und Untersuchungsdesign. In: Hahn, T. (2019). Schülerlösungen in Lehrerfortbildungen. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. Math. Lehren 128, 18-22. In: Eilerts, K., & Skutella, K. (2018). Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5: ISTRON-Schriftenreihe. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Boesdorfer, S., & Greenhalgh, S. (2014). Make room for engineering: Strategies to overcome anxieties about adding engineering to your curriculum. The Science Teacher, 81(9), 51-55.

Bybee, R. W., & Landes, N. M. (1990). Science for life & living: An elementary school science program from biological sciences curriculum study. The American Biology Teacher, 52(2), 92-98.

Bybee, R. W. (2009). The BSCS 5E instructional model and 21st century skills. Colorado Springs, CO: BSCS.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Zeitschrift für Pädagogik, 39, 223-238. In: Duit, R. (2010). Piko-Briefe. Der fachdidaktische Forschungsstand kurzgefasst, Februar.

Duit, R. (2010). Piko-Briefe. Der fachdidaktische Forschungsstand kurzgefasst, Februar.

Eilerts, K., & Skutella, K. (2018). Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5: ISTRON-Schriftenreihe. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Eisenkraft, A. (2003). Expanding the 5E model. SCIENCE TEACHER-WASHINGTON, 70(6), 56-59.

Greefrath, G. (2007). Modellieren lernen: mit offenen realitätsnahen Aufgaben. Aulis-Verlag Deubner.

Hefty, L. J. (2015). STEM gives meaning to mathematics. Teaching Children Mathematics, 21(7), 422-429.

Henn, H. W., & Meyer, J (Eds.). (2014). Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 1: ISTRON-Schriftenreihe, Band 18. Springer-Verlag.

Henseler, K., & Höpken, G. (1996). Methodik des Technikunterrichts. Klinkhardt.

Heymann, H. W. (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim: Beltz.

Hoffmann, L., Häußler, P., & Lehrke, M. (1998). Die IPN-Interessenstudie Physik. IPN.

Humenberger, H., & Bracke, M. (Eds.). (2017). Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 3: ISTRON-Schriftenreihe. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Kaiser, G., & Henn, H. W. (2015). Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Moyer, R., & Everett, S. A. (2012). Everyday engineering: Putting the E in STEM teaching and learning. NSTA press.

Pahl, J. P. (2007). Ausbildungs- und Unterrichtsverfahren: ein Kompendium für den Lernbereich Arbeit und Technik (Vol. 2). W. Bertelsmann Verlag.

Posamentier, A. S., Farber, W., Germain-Williams, T. L., Paris, E., Thaller, B., & Lehmann, I. (2013). 100 commonly asked questions in math class: Answers that promote mathematical understanding, Grades 6-12. Corwin Press.

Prenzel, M. (1994). Mit Interesse ins dritte Jahrtausend! Pädagogische Überlegungen. In: Duit, R. (2010). Piko-Briefe. Der fachdidaktische Forschungsstand kurzgefasst, Februar.

Reagan, M. T. (2016). STEM-infusing the Elementary Classroom. Corwin Press.

Rohlfs, C. (2011). Bildungseinstellungen: Schule und formale Bildung aus der Perspektive von Schülerinnen und Schülern. Springer.

Siller, H. S., Greefrath, G., & Blum, W. (2018). Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4: ISTRON-Schriftenreihe. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Onlineressourcen

Artikel im Spiegel (Straßenmarkierungen):
https://www.spiegel.de/auto/aktuell/fahrstreifen-fahrer-muss-mindestabstand-nicht-einschaetzen-koennen-a-1014410.html (abgerufen am 29.04.2020)

BAM Howard Gilman Opera House (Bild):
https://www.bam.org/rentals/howard-gilman-opera-house (abgerufen am 23.04.2020)

BAM Howard Gilman Opera House (Saalplan):
https://www.bam.org/media/15524911/19-62209-OH-Seating-Chart-Update-1-.pdf (abgerufen am 23.04.2020)

BAM Howard Gilman Opera House(technische Daten):
https://www.bam.org/media/15829408/BAM-Opera-House-Tech-Specs-February-2019.pdf (abgerufen am 23.04.2020)

Grey's Anatomy (Bild):
https://i.ytimg.com/vi/jYyhBaa43Z0/maxresdefault.jpg (abgerufen am 28.04.2020)

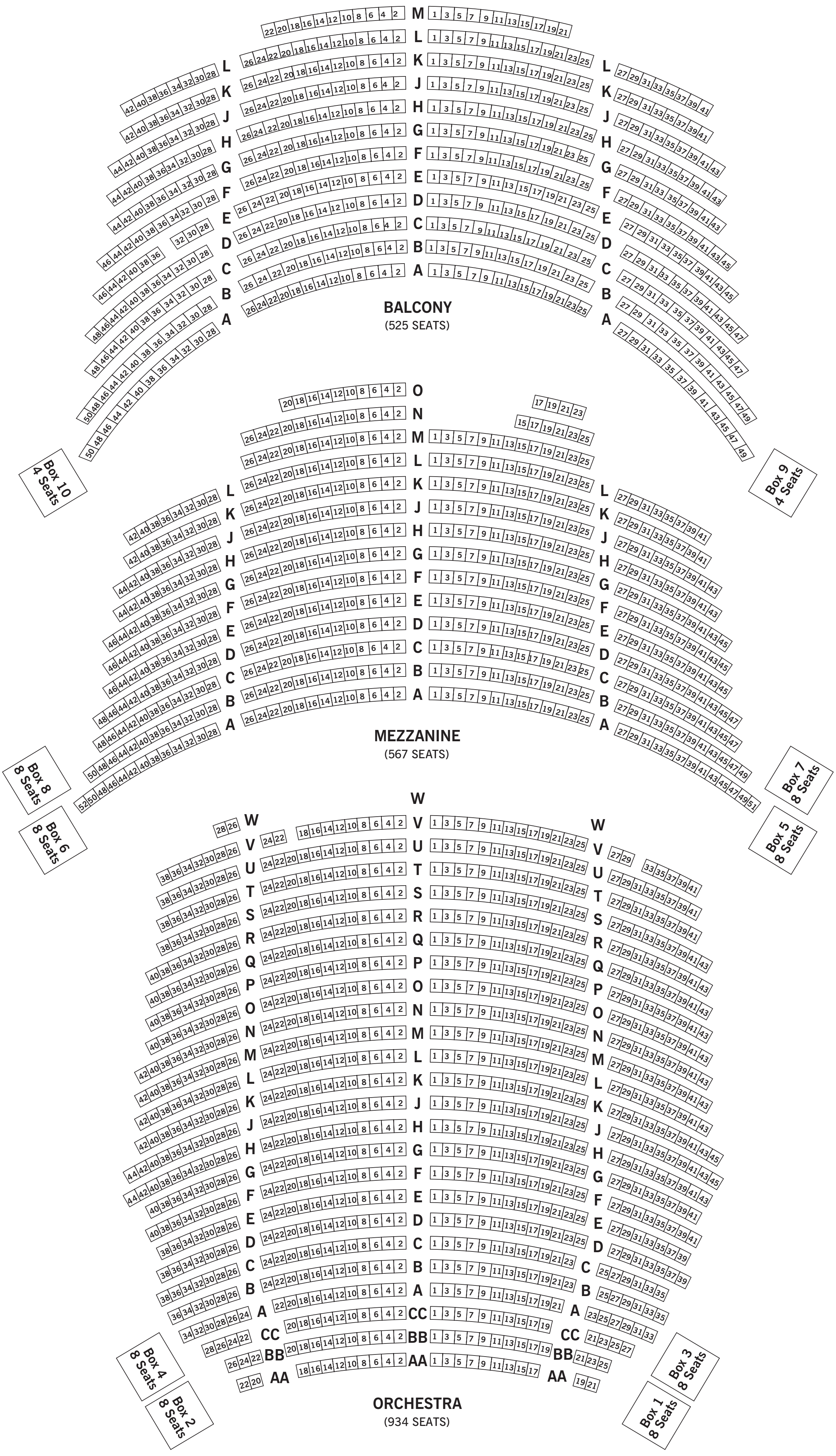
Inspirograph (Online-Tool):
https://nathanfriend.io/inspirograph/ (abgerufen am 21.04.2020)

Streetart Freddart (Bilder):
https://www.freddart.de/de/3d-strassenmalerei/ (abgerufen am 29.04.2020)

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaberinnen beziehungsweise Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis



BAM HOWARD GILMAN OPERA HOUSE

(CAPACITY 2098)