Universität Wien, WS 2017/18

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 13

Wir sind nun beim letzten Übungstermin angelangt. Am Ende eines Semesters besteht in Übungen immer das Problem, dass sich Aufgaben zu den zuletzt behandelten Vorlesungsinhalten nur schwer oder gar nicht mehr ausgehen. Wir lösen es auf die folgende Weise: Sollten einiger der Inhalte, die den folgenden Übungsaufgaben zugrunde liegen, noch nicht in der Vorlesung behandelt worden sein, dann lesen Sie bitte die entsprechenden Stellen im Ergänzungsskriptum und bearbeiten die Aufgaben 1− 11! Danach finden Sie noch drei Aufgaben (E1−E3), die Sie sich bei Interesse genauer ansehen!

1. Sei V ein unitärer Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots v_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie, dass die Entwicklungskoeffizienten c_j eines Vektors $x = \sum_{j=1}^{n} c_j\, v_j$ mit Hilfe der Formel
$$c_j = \langle v_j, x\rangle$$
berechnet werden können!

2. Sei V ein unitärer Vektorraum der Dimension n, und sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein n-Tupel von Vektoren $\in V$ mit der Eigenschaft
$$\sum_{j=1}^{n} \langle v_j, x\rangle\, v_j = x \quad \text{für alle } x \in V.$$
Zeigen Sie, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V ist!

3. Beweisen Sie, dass für das Adjungieren komplexer $n \times n$-Matrizen die Regel
$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$
gilt!

4. Zeigen Sie, dass für komplexe quadratische Matrizen gilt: $\det(A^\dagger) = \overline{\det(A)}$.

5. Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert der komplexen quadratischen Matrix A, so ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von $A^\dagger$.
(Tipp: Benutzen Sie das charakteristische Polynom von A und die in Aufgabe 4 angegebene Regel!)

6. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $M(n \times n, \mathbb{C})$ aller komplexen $n \times n$-Matrizen mit

$$\langle A, B \rangle_{\mathsf{HS}} := \mathrm{Tr}(A^\dagger B)$$

zu einem unitären Vektorraum wird! (Der Index $_{\mathsf{HS}}$ steht für Hilbert-Schmidt. $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{\mathsf{HS}}$ wird als *Hilbert-Schmidt-inneres Produkt* und die zugehörige Norm $\| \cdot \|_{\mathsf{HS}}$ als *Hilbert-Schmidt-Norm* bezeichnet).

7. Zeigen Sie, dass $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}E_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3\right)$ mit

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(den so genannten *Pauli-Matrizen*) bezüglich des Hilbert-Schmidt-inneren Produkts eine Orthonormalbasis von $M(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist!

8. Wenn man sich mit Quanteninformation beschäftigt, ist es oft nötig, eine komplexe 2×2-Matrix A in der Form

$$A = c_0 E_2 + \sum_{j=1}^{3} c_j \sigma_j$$

zu schreiben. Geben Sie ein Rezept an, wie die Entwicklungskoeffizienten c_0, c_1, c_2 und c_3 für eine gegebene 2×2-Matrix A möglichst schnell berechnet werden können! (Tipp: Denken Sie dabei auch an die Aufgaben 1, 6 und 7!)

9. Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Eine hermitischer linearer Operator $f : V \to V$ heißt *positiv semidefinit*, wenn $\langle v, f(v) \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie: Die Eigenwerte eines positiv semidefiniten Operators sind alle ≥ 0.
(Tipp: Setzen Sie für v einen Eigenvektor von f ein!)

10. Sei V die Menge aller Polynomfunktionen $p : [0, 1] \to \mathbb{C}$ vom Grad ≤ 1. (Jedes $p \in V$ ist eine Funktion mit Zuordnungsvorschift $p(t) = a_0 + a_1 t$ für alle $t \in [0, 1]$, wobei a_0 und a_1 komplexe Zahlen sind). V ist ein zweidimensionaler komplexer Vektorraum.

    (i) Zeigen Sie, dass durch $\langle p, q \rangle = \displaystyle\int_0^1 \overline{p(t)}\, q(t)\, dt$ ein inneres Produkt auf V erklärt ist!

    (ii) Geben Sie eine Orthonormalbasis von V an!

11. Die Eigenwerte von 2×2-Matrizen lassen sich mit den (über $\mathbb{C}$ geltenden) Identitäten

    - Summe der Eigenwerte = Spur der Matrix
    - Produkt der Eigenwerte = Determinante der Matrix

    manchmal durch reine Kopfrechnung ermitteln. Bestimmen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen, ohne eine Rechnung auf dem Papier zu machen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Als **Ergänzung** seien Ihnen noch drei Übungsaufgaben zur freiwilligen Bearbeitung an Herz gelegt. Sie betreffen Themen des Vorlesungsstoffs, die voraussichtlich erst nach dem letzten Übugstermin behandelt werden können, und für die daher in den Übungen keine Zeit bleibt:

E1. Welche der folgenden Matrizen sind (i) normal, (ii) unitär, (iii) orthogonal, (iv) hermitisch, (v) antihermitisch?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

E2. Die Spektraldarstellung der hermitischen Matrix $H = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ sieht so aus:

$$H = \underbrace{(-1)}_{\lambda_1} \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} + \underbrace{1}_{\lambda_2} \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}}_{P_2}.$$

(Dass P_1 und P_2 Orthogonalprojektionen sind, also ${P_k}^2 = P_k = {P_k}^\dagger$ erfüllen, und durch $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ und $P_1 + P_2 = E$ miteinander zusammenhängen, brauchen Sie nicht vorzurechnen – bei Interesse verifizieren Sie es für sich!)

Berechnen Sie e^{-itH} für $t \in \mathbb{R}$! Benutzen Sie die Eulersche Formel $e^{\pm i t} = \cos t \pm i \sin t$, um das Ergebnis durch Winkelfunktionen auszudrücken! Kommt es Ihnen bekannt vor?

(Anmerkung: In der Quantemechanik wird eine solche Operation auf den „Hamilton-Operator" H, der die Energie darstellt, angewandt, um aus einem „Zustandvektor" $\psi(0)$ zu einer Anfangszeit den „zeitentwickelten" Zustandsvektor in der Form $\psi(t) = e^{-itH}\psi(0)$ zu erhalten.)

E3. H-Aufgabe: Lesen Sie im Ergänzungsskriptum den Abschnitt über den Bra-Ket-Formalismus!

(i) Rekapitulieren Sie, was Symbole wie $|\psi\rangle$ und $\langle\psi|$ bedeuten!

(ii) Für ein gegebenes $|\psi\rangle$ mit $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ sei der lineare Operator $T := \mathrm{Id} - |\psi\rangle\langle\psi|$ definiert. Berechnen Sie:

(a) $T|\psi\rangle$

(b) $T|\phi\rangle$ für ein beliebiges $|\phi\rangle$ mit $\langle\psi|\phi\rangle = 0$

Wie sind die Resultate zu interpretieren? Welcher Typ von Operator ist T?