

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 12

1. Ermitteln Sie eine Hauptachsen-Transformation für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, d.h. geben Sie eine Matrix $P \in O(2)$ an, für die $P^{-1}AP$ diagonal ist!

2. Ermitteln Sie eine Hauptachsen-Transformation für die Matrix $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, d.h. geben Sie eine Matrix $P \in O(3)$ an, für die $P^{-1}BP$ diagonal ist!

3. Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung. Beweisen Sie die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{k=1}^r P_k = \text{Id}_V$$

unter Verwendung einer Orthonormalbasis, in der f diagonal ist (Notation gemäß der Version der Spektraldarstellung im Buch auf Seite 219, zweites Korollar)!

4. Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die mit Hilfe der Spektraldarstellung von f (in der Version im Buch auf Seite 219, zweites Korollar) definierte lineare Abbildung

$$\frac{1}{f} = \sum_{k=1}^r \frac{1}{\lambda_k} P_k$$

gleich der Inversen f^{-1} ist!

5. Sei V ein euklidischer Vektorraum, $w \in V$ mit $\|w\| = 1$, und sei die lineare Abbildung und $p : V \rightarrow V$ definiert durch

$$p(x) = \langle w, x \rangle w.$$

- (i) Zeigen Sie, dass p die Orthogonalprojektion auf den von w aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum ist!
- (ii) Wie sieht die Spektraldarstellung von p (gemäß der Version im Buch auf Seite 219, zweites Korollar) aus? Geben Sie die λ_k und die P_k an!

6. Sei V ein euklidischer Vektorraum, und seien $u, w \in V$ zwei zueinander orthogonale Einheitsvektoren, die den zweidimensionalen Untervektorraum U aufspannen. Zeigen Sie, dass

$$q : V \rightarrow V$$

$$q(x) = \langle u, x \rangle u + \langle w, x \rangle w$$

die Orthogonalprojektion auf U ist!

7. Die Spektraldarstellung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ sieht so aus:

$$A = \underbrace{(-5)}_{\lambda_1} \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} + \underbrace{5}_{\lambda_2} \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2}.$$

Rechnen Sie diese Beziehung nach! Verifizieren Sie, dass P_1 und P_2 Orthogonalprojektionen sind, und dass $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ sowie $P_1 + P_2 = E$ gilt!

8. Für die Matrix A von Aufgabe 7 berechnen Sie $\sin(kA)$ und $\cos(kA)$ für $k \in \mathbb{R}$!
9. H-Aufgabe: Sei V ein euklidischer Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, die in der Form

$$f = \sum_{k=1}^r \lambda_k P_k$$

dargestellt werden kann. Dabei sind die λ_k voneinander verschiedene reelle Zahlen, und die P_k sind Orthogonalprojektionen, die $P_k P_l = 0$ für $k \neq l$ erfüllen, und für die die Vollständigkeitsrelation $\sum_{k=1}^n P_k = \text{Id}_V$ gilt. Zeigen Sie, dass dann automatisch folgt:

- (i) f ist selbstadjungiert.
- (ii) Die λ_k sind genau die (verschiedenen) Eigenwerte von f .
- (iii) Jedes P_k ist die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum E_{λ_k} .

(Die angegebene Darstellung von f ist dann automatisch die Spektraldarstellung von f . Um also die Spektraldarstellung eines gegebenen selbstadjungierten Operators zu finden, genügt es, ihn in der angegebenen Form darzustellen!)

10. Aus dem Satz von der Jordanschen Normalform folgt, dass jede 2×2 -Matrix über \mathbb{C} entweder zu einer Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ oder zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ähnlich ist. Zeigen Sie: Jede 2×2 -Matrix über \mathbb{C} ist die Summe aus einer diagonalisierbaren und einer nilpotenten Matrix! (Diese Aussage gilt für quadratische Matrizen jeder Dimension!)