Universität Wien, WS 2017/18

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 11

1. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (i) über $\mathbb{R}$, d.h. für den Fall, dass sie als lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aufgefasst wird,
   (ii) über $\mathbb{C}$, d.h. für den Fall, dass sie als lineare Abbildung $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ aufgefasst wird.

2. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$!

3. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$!

4. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & -1 \end{pmatrix}$!

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$!
   Wie interpretieren Sie Ihre Ergebnisse?

6. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$!

7. Sei $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Bestimmen Sie die Eigenwerte dieser Matrix (über $\mathbb{C}$) unter Zuhilfenahme der Ergebnisse der Aufgaben 1 und 2, ohne eine weitere Rechnung durchzuführen!

8. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ der Dimension n, und sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie: f besitzt höchstens n verschiedene Eigewerte.

9. Beweisen Sie das folgende praktische Kriterium für Diagonalisierbarkeit: Besitzt eine $n \times n$-Matrix genau n verschiedene Eigenwerte, so ist sie diagonalisierbar.

10. Welche Matrizen der Aufgaben 1 – 7 sind (i) über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar, (ii) über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

11. Beweisen Sie, dass jede reelle $n \times n$-Matrix für ungerades n mindestens einen reellen Eigenwert besitzt!

12. Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von A, so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2.