Universität Wien, WS 2017/18

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 10

1. Analysieren Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix},$$

ohne es zu lösen:

   (i) Ist die Lösungsmenge leer oder nicht leer? (Wenden Sie die im Buch auf Seite 159 angegebene Methode an!)

   (ii) Falls die Lösungsmenge nicht leer ist: Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar oder besitzt es unendlich viele Lösungen?

   (iii) Falls es unendlich viele Lösungen besitzt: Wie „groß" ist die Lösungsmenge? (Sie ist dann gleich $x_0 + \mathrm{Kern}(A)$, wobei x_0 eine Lösung ist. Ihre „Größe" wird durch $\dim(\mathrm{Kern}(A))$ charakterisiert).

   Tipp: Falls (i) eine nicht leere Lösungsmenge ergibt, können die Fragen (ii) und (iii) sofort beantwortet werden, sobald der Rang von A bekannt ist!

2. Wie in Aufgabe 1 mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 7 & 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

3. Wie in Aufgabe 1 mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

4. Wie in Aufgabe 1 mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems von Aufgabe 1 mit dem Gaußschen Algorithmus!

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems von Aufgabe 3 mit dem Gaußschen Algorithmus!

7. Ist die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \mapsto \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle := x_1\, y_1 - \frac{1}{2}\, x_2\, y_2 \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie!

8. Ist die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \mapsto \langle\!\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle\!\rangle := 3\,(x_1\, y_1 + \, x_2\, y_2) \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie!

9. Bestimmen Sie mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren eine orthonormale Basis des Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$ (mit dem Standard-Skalarprodukt), der von den Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, -1, -1) \\ v_2 &= (1, 1, 3, 3) \\ v_3 &= (2, 1, 0, -3) \end{aligned}$$

aufgespannt wird!

10. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $u, v \in V$ gilt:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\Big).$$

11. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $u, v \in V$ gilt:

$$2\Big(\|u\|^2 + \|v\|^2\Big) = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2.$$

Was bedeutet das für die Geometrie des Parallelogramms?
(Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Parallelogrammgleichung.)

12. Zeigen Sie, dass $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix ist! Gilt darüber hinaus $R \in SO(3)$?