Universität Wien, WS 2017/18

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 9

1. Berechnen Sie $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$!

2. Berechnen Sie $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$!

3. Berechnen Sie $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$!

4. Berechnen Sie $\det\begin{pmatrix} 2 & 8 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$!

5. Was lässt sich im Allgemeinen über die Determinante einer Projektionsmatrix sagen?

6. Sei M eine reelle 2×2-Matrix.
   (i) Zeigen Sie, dass $\det(M)$ gleich plus oder minus dem Flächeninhalt des von den Spaltenvektoren von M im $\mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms ist!
   (ii) Schließen Sie daraus mit der Formel für die Determinante der transponierten Matrix, dass das Gleiche auch für die Zeilenvektoren von M gilt!
   (iii) Geben Sie eine geometrische Charakterisierung, wie das Vorzeichen von $\det(M)$ (sofern $\det(M) \neq 0$ ist) von der relativen Lage der Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) von M im $\mathbb{R}^2$ abhängt!

7. Zum Zusammenhang zwischen Volumen, Spatprodukt und Determinante:
   (i) Zeigen Sie, dass das Spatprodukt dreier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ gleich dem orientierten Volumen des von ihnen aufgespannten Parallelepipeds ist! (Benutzen Sie dazu am besten die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts und des Vektorprodukts im $\mathbb{R}^3$!)
   (ii) Sei A eine reelle 3×3-Matrix. Zeigen Sie, dass $\det(A)$ gleich dem Spatprodukt der Spaltenvektoren von A ist!

8. Zeigen Sie, dass die Determinanten ähnlicher Matrizen gleich sind!