Universität Wien, WS 2017/18

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 8

1. Sei $\mathcal{P}_n$ die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$. Gegeben ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} &f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2 \\ &f(p) := \text{die Polynomfunktion } t \mapsto \int_0^t p(\tau) d\tau\,. \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie die Matrix $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ von f

   (i) bezüglich der Basen $\mathcal{B} = (t \mapsto 1,\, t \mapsto t)$ von $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{C} = (t \mapsto 1,\, t \mapsto t,\, t \mapsto t^2)$ von $\mathcal{P}_2$,

   (ii) bezüglich der Basen $\mathcal{B} = (t \mapsto 1,\, t \mapsto t)$ von $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{C} = (t \mapsto 1 + t,\, t \mapsto 1 - t,\, t \mapsto t^2)$ von $\mathcal{P}_2$!

2. Zeigen Sie, dass die Ähnlichkeit von Matrizen

   Für $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist $A \sim B :\Leftrightarrow$ es gibt eine invertierbare Matrix $S \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $B = S^{-1} A\, S$.

   eine Äquivalenzrelation ist!

3. Beweisen Sie die Rechenregel $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ für das Bilden der Spur quadratischer Matrizen!

4. Für zwei $n \times n$-Matrizen A, B über $\mathbb{K}$ und für ein $c \in \mathbb{K}$ gelte

$$AB - BA = cE.$$

   Zeigen Sie, dass dann $c = 0$ ist. (Tipp: Bilden Sie von beiden Seiten dieser Beziehung die Spur!) Dieser unscheinbar anmutende Sachverhalt hat wichtige Konsequenzen für die Quantenphysik.

5. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &\mu(x, y) := -4x + 5y \end{aligned}$$

   ein lineares Funktional auf $\mathbb{R}^2$ ist! Stellen Sie es als Matrix dar:

$$\mu : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto\ ?$$

6. Sei $\mathcal{P}_2$ die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} &\kappa : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R} \\ &\kappa(p) := p(1) \end{aligned}$$

ein lineares Funktional auf V (also ein Element des Dualraums V^*) ist und ermitteln Sie seine Matrix $[\kappa]_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (t \mapsto 1,\, t \mapsto t,\, t \mapsto t^2)$ von $\mathcal{P}_2$!

7. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, und sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Dann kann jedes $x \in V$ eindeutig in der Form $x = \sum_{k=1}^{n} c_k\, v_k$ mit $c_k \in \mathbb{K}$ geschrieben werden.

   (i) Nun sei $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq n$. Zeigen Sie dass die Abbildung $w_j : V \to \mathbb{K}$, die jedem $x \in V$ seinen Entwicklungskoeffizienten c_j zuordnet, ein lineares Funktional ist!
   (ii) Zeigen Sie, dass $(w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis des Dualraums V^* ist! (Sie wird die zu $\mathcal{B}$ duale Basis genannt.)
   (iii) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $V \to V^*$, die jedem v_j das lineare Funktional w_j zuordnet, ist ein Isomorphismus ist!

8. H-Aufgabe: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die Abbildung $\Psi : V \to V^{**}$ sei folgendermaßen definiert: Für jedes $x \in V$ ist $\Psi(x)$ ein lineares Funktional auf V^*, das so wirkt:

$$\begin{aligned} &\Psi(x) : V^* \to \mathbb{K} \\ &\Psi(x) : f \in V^* \mapsto f(x) \in \mathbb{K}\,. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass Ψ ein Isomorphismus ist!

9. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und seien U und W Untervektorräume von V mit $U \cap W = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $U + W$ (das aufgrund des trivialen Durchschnitts von U und W auch in der Form $U \oplus W$ geschrieben wird) isomorph ist zum kartesischen Produkt $U \times W$, ausgestattet mit der im Ergänzungsskriptum angegebenen Vektorraumstruktur!

10. Sei V ein Vektorraum und $g : V \to V$ eine Projektion. Zeigen Sie:

    (i) $V = \mathrm{Bild}(g) \oplus \mathrm{Kern}(g)$.
    (ii) $\mathrm{Bild}(g)$ besteht aus allen $x \in V$, für die $g(x) = x$ gilt.

11. Zeigen Sie, dass $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ eine Projektionsmatrix ist! Sie wird als lineare Abbildung $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aufgefasst. Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(Q)$ und $\mathrm{Bild}(Q)$! Beschreiben Sie in Worten oder anhand einer Skizze, wie Q wirkt!