Universität Wien, WS 2017/18

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 7

1. Welche Dimensionen haben die folgenden Vektorräume?

   (i) Vektoraum aller linearen Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
   (ii) Vektoraum aller linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
   (iii) Vektoraum aller linearen Abbildungen $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$
   (iv) Vektoraum aller linearen Abbildungen $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$

2. Berechnen Sie:
$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad (-2 \;\; 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} (2 \;\; -1)$$

3. Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ihre Potenzen A^2, A^3 und A^4! Geben Sie ganz allgemein A^r für $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ an! Was folgt daraus für die Potenzen der Matrix $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

4. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen durch Anwendung elementarer Umformungen:
$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Berechnen Sie die Inverse der Matrix
$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
durch elementare Umformungen! Überprüfen Sie Ihr Ergebnis (i) durch Nachrechnen der Beziehung $M^{-1}M = E$ und (ii) mit Hilfe des Computeralgebra-Systems *Mathematica*!

6. Die Matrix
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
ist nicht invertierbar. Woran merkt man das, wenn man versucht, ihre Inverse durch elementare Umformungen zu ermitteln?

7. Im Buch (Seite 127) werden die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus als bekannt vorausgesetzt. Drehen Sie den Spieß um, indem Sie $A_\varphi A_\psi = A_{\varphi+\psi}$ aus naheliegenden geometrischen Gründen voraussetzen und damit die Additionstheoreme beweisen!

8. Zeigen Sie, dass die Elemente $B \in O(2) \backslash SO(2)$ die Eigenschaft $B^2 = E$ haben!

9. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass im Allgemeinen $B_\varphi B_\psi \neq B_\psi B_\varphi$ ist! (Was diese B's bedeuten, wird im Buch auf Seite 126 definiert).