Universität Wien, WS 2017/18

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 6

1. Stellen Sie die lineare Abbildung
$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$A(x,y) := (2x - 4y, 3x + y)$$
in Matrixform dar:
$$A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \ ?$$

2. Die 2×2-Matrix B stelle jene lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dar, die $e_1 = (1,0)$ in $(4,5)$ überführt und $e_2 = (0,1)$ in $2e_1 - e_2$. Schreiben Sie B an!

3. Sei $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Beschreiben Sie in Worten (oder anhand einer Skizze), was N mit den Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ macht! Was geschieht demnach, denn N mehrere Male hintereinander angewandt wird?

4. Die 3×3-Matrix S stelle die Spiegelung an der yz-Ebene des $\mathbb{R}^3$ dar.
   (i) Schreiben Sie sie an!
   (ii) Überlegen Sie: Was eine „Spiegelung“ ist, ist für uns (seit der Volksschule) intuitiv ganz klar. Macht dieser Begriff alleine auf der Basis der Vektorraumstruktur Sinn, oder wird dabei auch das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ verwendet?

5. Seien e_j die Vektoren der Standardbasis im $\mathbb{C}^3$. Die 3×3-Matrix C stelle eine lineare Abbildung $C : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dar, die so wirkt:
$$C : e_1 \mapsto e_1 + 2e_2$$
$$C : e_2 \mapsto e_1 - 2e_2$$
$$C : e_3 \mapsto e_1 + i\, e_2$$
Schreiben Sie C an! Ist die Abbildung, die C darstellt, injektiv? Ist sie surjektiv?

6. Schreiben Sie das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 &= -4 \end{aligned}$$
in Matrixform als $Ax = b$ mit $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $b \in M(2 \times 1, \mathbb{R})$ an!

7. Sei U der aus der Menge aller reellen Vielfachen von $(0,0,1)$ bestehende Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Quotientenvektorraum $\mathbb{R}^3/U$! Überprüfen Sie die Dimensionsformel für Quotientenvektorräume (Buch Seite 99)!

8. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Bestimmen Sie:

   (i) V/V
   (ii) $V/\{0\}$

9. Schreiben Sie jene Matrizen an, die Drehungen im $\mathbb{R}^2$ um die Winkel (i) $\frac{\pi}{4}$, (ii) $\frac{\pi}{3}$, (iii) $\frac{\pi}{2}$, (iv) $\frac{3\pi}{4}$ und (v) π im Gegenuhrzeigersinn beschreiben! In den Endergebnissen sollten keine Winkelfunktionen mehr auftreten.

10. Überprüfen Sie durch explizite Matrizenmultiplikation, dass die dreimalige Anwendung der Drehung (i) von Aufgabe 9 mit der Drehung (iv) übereinstimmt!

11. Im Ergänzungsskriptum (in einem späteren Abschnitt) lesen Sie: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Spiegelung an jener Ebene durch den Ursprung, die normal zum Vektor $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt. (Zugrunde gelegt ist natürlich der $\mathbb{R}^3$). Verifizieren Sie das!