Universität Wien, WS 2017/18

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 5

1. Ist die Abbildung

$$\rho : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$$
$$\rho(x, y, z) := (x + iy, 1 + iz)$$

linear? Begründen Sie!

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$D(x_1, x_2, x_3) := (x_2, -x_1, x_3)$$

linear ist!

3. Ist die Abbildung

$$\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$
$$\sigma(a, b, c, d) := (a + b, a + c, d)$$

injektiv? Ist sie surjektiv? (Argumentieren Sie direkt mit der Definition der Begriffe „injektiv“ und „surjektiv“, also ohne Methoden der linearen Algebra heranzuziehen!)

4. Gegeben ist die Abbildung

$$\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$
$$\tau(x, y, z) := (x, y, z, x + y + z).$$

(i) Zeigen Sie, dass τ linear ist!
(ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\tau)$! Ist τ injektiv?
(iii) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(\tau)$! Ist τ surjektiv?

5. Sei $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ jene lineare Abbildung, die $(1, 0)$ in $(1, 1, 1)$ und $(0, 1)$ in $(1, 2, 3)$ überführt.

(i) Geben Sie eine Formel für die Wirkung von Γ an: $\Gamma(x, y) = ?$
(ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\Gamma)$! Ist Γ injektiv?
(iii) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(\Gamma)$! Ist Γ surjektiv?

6. Sei $\mathcal{P}_2$ die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Wie bereits bekannt (Übungstermin 4), ist $\mathcal{P}_2$ ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Welche der folgenden Operationen für Polynomfunktionen definieren eine Abbildung $\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$? Welche davon sind linear? Begründen Sie Ihre Antworten!

   (i) $f : p \mapsto f(p)$ mit $f(p) : t \mapsto t\,p(t)$
   (ii) $g : p \mapsto g(p)$ mit $g(p) : t \mapsto (t+1)\,p'(t)$
   (iii) $h : p \mapsto h(p)$ mit $h(p) : t \mapsto t^2 p''(t)$
   (iv) $j : p \mapsto j(p)$ mit $j(p) : t \mapsto p(t) - 3$
   (v) $k : p \mapsto k(p)$ mit $k(p) : t \mapsto \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_0^t p(\tau) d\tau$

7. Sei $\mathcal{P}_2$ die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2, und sei

$$\begin{aligned} &\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2 \\ &\Phi(a_0, a_1, a_2) := \text{die Polynomfunktion } t \mapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 . \end{aligned}$$

   (i) Zeigen Sie, dass Φ eine lineare Abbildung ist!
   (ii) Zeigen Sie, dass Φ bijektiv – also mit (i) ein Isomorphismus – ist!
   (iii) Die Ableitung p' jeder Polynomfunktion $p \in \mathcal{P}_2$ ist wieder ein Element von $\mathcal{P}_2$. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $p \mapsto p'$ eine lineare Abbildung $\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ ist!

8. Für die in Aufgabe 7 beschriebene Situation sei

$$T := \Phi^{-1} \circ \text{Bilden der Ableitung} \circ \Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

   (i) Geben Sie eine Formel für die Wirkung von T an: $T(a_0, a_1, a_2) = ?$
   (ii) Zeichnen Sie ein kommutatives Diagramm, in dem die Vektorräume $\mathcal{P}_2$ und $\mathbb{R}^3$ sowie der Zusammenhang der Abbildungen „Bilden der Ableitung", Φ und T dargestellt wird!
   (iii) Berechnen Sie $T \circ T$ und $T \circ T \circ T$! Wie interpretieren Sie ihr Ergebnis?

9. Sei U ein Vektorraum. Für ein festgehaltenes $\xi \in U$ sei

$$\begin{aligned} &\omega : U \to U \\ &\omega(x) = x - \xi . \end{aligned}$$

   Welche Bedingung muss ξ erfüllen, damit ω eine lineare Abbildung ist?