Universität Wien, WS 2017/18

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 4

1. Zeigen Sie unter Verwendung der „offiziellen“ Definition der linearen Unabhängigkeit (Buch, Seite 57), dass das Tripel (v_1, v_2, v_3) von Elementen $v_j \in \mathbb{R}^3$ mit

$$v_1 = (1, -2, 2)$$
$$v_2 = (2, 3, 1)$$
$$v_3 = (3, 8, 0)$$

   linear abhängig ist! Charakterisieren Sie den Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, den diese Vektoren aufspannen, in möglichst kompakter Form!

2. Zeigen Sie unter Verwendung der „offiziellen“ Definition der linearen Unabhängigkeit (Buch, Seite 57), dass das Tripel (w_1, w_2, w_3) von Elementen $w_j \in \mathbb{R}^3$ mit

$$w_1 = (1, -2, -1)$$
$$w_2 = (2, -1, 2)$$
$$w_3 = (1, -1, 0)$$

   linear unabhängig (und daher eine Basis von $\mathbb{R}^3$) ist! Entwickeln Sie den Vektor $u = (1, 2, 3)$ in diese Basis (d.h. bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass $u = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \, w_j$ gilt)!

3. Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Untervektorräume von $\mathbb{C}^3$:

   (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \,|\, z = x + iy\}$
   (ii) $L(y_1, y_2, y_3)$ mit $y_1 = (1, 0, 2)$, $y_2 = (0, -i, 1)$ und $y_3 = y_1 + y_2$
   (iii) $L(u, v)$ mit $u = (0, 1, 0)$ und $v = (0, -i, 0)$

4. Sei $\mathcal{P}_2$ die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Mit den üblichen Definitionen der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar

$$(p + q)(t) = p(t) + q(t) \quad \text{und} \quad (\lambda p)(t) = \lambda p(t) \text{ für } \lambda, t \in \mathbb{R}$$

   ist $\mathcal{P}_2$ ein reeller Vektorraum.

   (i) Bestimmen Sie seine Dimension!
   (ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3) := (t \mapsto 1 + t, t \mapsto 1 - t, t \mapsto t^2)$ eine Basis von $\mathcal{P}_2$ ist!
   (iii) Entwickeln Sie das Polynom $r : t \mapsto 1 - t^2$ in die Basis $\mathcal{B}$!

5. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ aufgefasst werden kann! Welche Dimension hat (i) $\mathbb{C}$ als Vektorraum über sich selbst, (ii) $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$?

6. Berechnen Sie das Vektorprodukt $u \times v$ mit $u = (3, 2, -1)$ und $v = (1, -2, 2)$!

7. Zeigen Sie, dass für das *Spatprodukt* $\langle u \times v, w \rangle$ dreier Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ folgende Eigenschaften gelten:

   (i) Unter Vertauschung zweier der drei Vektoren ändert $\langle u \times v, w \rangle$ sein Vorzeichen.
   (ii) Es gilt $\langle u \times v, w \rangle = 0$ genau dann, wenn (u, v, w) linear abhängig ist. (Hier genügt ein überzeugendes *geometrisches* Argument!)

8. Sei $u \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle u, u \rangle = 1$. Berechnen/vereinfachen Sie (und verwenden Sie dabei die Einsteinsche Summenkonvention):

   (i) $v_j = \delta_{jk}\, u_k$
   (ii) $w_j = (\delta_{jk} - u_j\, u_k)\, u_k$
   (iii) $t_{jk} = (\delta_{jr}\, \delta_{ks}\, \varepsilon_{rsl} + \delta_{jr}\, \varepsilon_{rkl} + \varepsilon_{jkl})\, a_l$
   (iv) $\rho_j = \frac{1}{3} \varepsilon_{jkl}\, u_j\, u_k\, u_l$

9. Beweisen Sie die Beziehung $\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{jkl} = 6$ (wobei hier die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wurde)!

10. Beweisen Sie die Beziehung $\varepsilon_{jkl}\, \varepsilon_{jkn} = 2\, \delta_{ln}$ (wobei hier die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wurde)!

11. Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Stellen Sie eine Formel für $(u \times v) \times w$ auf, die keine Vektorprodukte der beteiligten Vektoren enthält! Verwenden Sie dabei das Epsilon-Symbol und die für das Epsilon-Symbol im Ergänzungsskriptum angegebenen Eigenschaften!