

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 3

1. Bildet die folgende Menge mit den angegebenen Operationen einen reellen Vektorraum?
Beweisen Sie Ihre Aussage!

$V =$ Menge aller $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, die $2x_1 + 3x_2 = 4$ erfüllen.

Addition: wie im \mathbb{R}^2 üblich.

Multiplikation mit einem Skalar: wie im \mathbb{R}^2 üblich.

Skizzieren Sie die Menge V als Teilmenge der Zeichenebene!

2. Bildet die folgende Menge mit den angegebenen Operationen einen reellen Vektorraum?
Beweisen Sie Ihre Aussage!

$V =$ Menge aller $(m, n) \in \mathbb{R}^2$, die $3m - 2n = 0$ erfüllen.

Addition: wie im \mathbb{R}^2 üblich.

Multiplikation mit einem Skalar: wie im \mathbb{R}^2 üblich.

Skizzieren Sie die Menge V als Teilmenge der Zeichenebene!

3. Die folgende Menge mit den angegebenen Operationen bildet *keinen* reellen Vektorraum:

$V = \mathbb{R}^2 =$ Menge aller reellen Zahlenpaare.

Addition: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$.

Multiplikation mit einem Skalar: $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_2, \lambda x_1)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(x_1, x_2) \in V$.

Gehen Sie die Vektorraum-Axiome [(1) – (8) auf Seite 23 des Lehrbuchs von Jänich] durch! Welche sind erfüllt, welche sind verletzt?

4. Bildet die folgende Menge mit den angegebenen Operationen einen reellen Vektorraum?
Beweisen Sie Ihre Aussage!

$V =$ Menge aller reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung

$$\psi'(x) + 2\psi(x) = 0.$$

Addition: $(\phi + \chi)(x) = \phi(x) + \chi(x)$ für alle $\phi, \chi \in V$.

Multiplikation mit einem Skalar: $(\lambda\phi)(x) = \lambda\phi(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\phi \in V$.

Freiwillige Zusatzaufgabe: Können Sie explizit angeben, aus welchen Funktionen V besteht?

5. Beweisen Sie, dass in jedem (reellen oder komplexen) Vektorraum V gilt: $0x = 0$ für alle $x \in V$.
6. Beweisen Sie, dass in jedem (reellen oder komplexen) Vektorraum V gilt: $(-1)x = -x$ für alle $x \in V$.
7. Ist $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ ein Untervektorraum von \mathbb{R}^2 ? Begründen Sie!
8. Sind U_1 und U_2 Untervektorräume des Vektorraums V , so ist die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ nicht notwendigerweise ein Untervektorraum von V . Geben Sie ein Beispiel!
9. Beweisen Sie folgenden Sachverhalt: Sind U_1 und U_2 Untervektorräume des Vektorraums V , so ist auch der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V .