Universität Wien, WS 2017/18

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 2

1. Die folgenden Elemente des (mit der üblichen Vektorraumstruktur versehenen) $\mathbb{R}^2$ seien gegeben: $a = (2, 4)$, $u = (1, -3)$, $v = (2, 3)$, $w = (2, -6)$.

   (i) Kann man a als Linearkombination von u und v anschreiben? Falls ja, tun Sie es – falls nein, begründen Sie! Machen Sie eine Skizze des Sachverhalts!

   (ii) Kann man a als Linearkombination von u und w anschreiben? Falls ja, tun Sie es – falls nein, begründen Sie! Machen Sie eine Skizze des Sachverhalts!

2. Die Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ seien gegeben wie in Aufgabe 1. Kann man *jeden* Vektor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination von u und v anschreiben? Falls ja, tun Sie es – falls nein, begründen Sie!

3. Die Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ seien gegeben wie in Aufgabe 1. Ermitteln und beschreiben bzw. – falls möglich – skizzieren Sie die folgenden Mengen:

   (i) $A = \{\, \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   (ii) $B = \{\, u + x \mid x \in \mathbb{R}^2\}$
   (iii) $C = \{\, \lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   (iv) $D = \{\, \lambda u + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   (v) $E = \{\, v + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   (vi) $F = \{\, w + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

4. Für welche der in Aufgabe 3 angegebenen Mengen gilt, dass jedes Vielfache eines Elements stets wieder ein Element der Menge ist?

5. In der Zeichenebene werden Pfeile durch „Aneinanderlegen“ addiert. In jedem reellen Vektorraum V gilt das Kommutativgesetz [Axiom (2) auf Seite 23 des Lehrbuchs von Jänich]:

$$x + y = y + x \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

   Illustrieren Sie diesen Sachverhalt durch Pfeile in der Zeichenebene! Verwenden Sie in dieser und in den folgenden Aufgaben *nicht* die Komponentendarstellung von Elementen des $\mathbb{R}^2$!

6. In jedem reellen Vektorraum V gilt das Assoziativgesetz [Axiom (1) auf Seite 23 des Lehrbuchs von Jänich]:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{für alle } x, y, z \in V.$$

   Illustrieren Sie diesen Sachverhalt durch Pfeile in der Zeichenebene! Setzen Sie dabei lediglich die Regel für die Addition von Pfeilen und – falls für eine aussagekräftige Zeichnung nötig ist – das Kommutativgesetz voraus!

7. In jedem reellen Vektorraum V gilt

$$-(x+y) = -x - y \quad \text{für alle } x, y \in V,$$

wobei $-x-y$ die Kurzschreibweise für $-x+(-y)$ ist. Illustrieren Sie diesen Sachverhalt durch Pfeile in der Zeichenebene! Verwenden Sie dabei lediglich die Regel für die Addition von Pfeilen, das Kommutativgesetz und die Regel, dass $-x$ durch einen Pfeil dargestellt wird, der gleich lang wie x, parallel zu x, aber entgegengesetzt orientiert ist!

8. Begründen Sie die „Spitze-minus-Schaft-Regel“ in der Zeichenebene mit Hilfe der Vektorraum-Axiome!

   > Die „Spitze-minus-Schaft-Regel“ besagt: Werden zwei Vektoren x und y in der Zeichenebene durch Pfeile mit gleichem Anfangspunkt („Schaft“) dargestellt, so wird $x-y$ durch jenen Pfeil dargestellt, der vom Endpunkt (der „Spitze“) von y zum Endpunkt von x verläuft (d.h. dessen Schaft die Spitze von y und dessen Spitze die Spitze von x ist).

   Verwenden Sie bei der Begründung nur die allgemeinen Rechenregeln, die in jedem reellen Vektorraum gelten, sowie die Regel zur Addition von Pfeilen!

9. Begründen Sie: Werden in der Zeichenebene die Vektoren x und y sowie der Vektor $\frac{1}{2}(x+y)$ durch Pfeile mit gleichem Anfangspunkt dargestellt, so liegt die Spitze von $\frac{1}{2}(x+y)$ im Halbierungspunkt der Strecke zwischen den Spitzen von x und y. Verwenden Sie dabei nur die allgemeinen Rechenregeln, die in jedem reellen Vektorraum gelten, sowie die Regel zur Addition von Pfeilen!

10. Sind A, B und C die Ortsvektoren der Eckpunkte eines Dreiecks, so ist dessen Schwerpunkt durch

$$S = \frac{1}{3}(A+B+C)$$

gegeben. Beweisen Sie, dass das aus den Halbierungspunkten der Seiten des Dreiecks ΔABC bestehende Dreieck (das sogenamme „Mittendreieck“), den gleichen Schwerpunkt besitzt!