Universität Wien, WS 2016/17

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 12

1. Ermitteln Sie eine Hauptachsen-Transformation für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, d.h. geben Sie eine Matrix $P \in O(2)$ an, für die $P^{-1}AP$ diagonal ist!

2. Ermitteln Sie eine Hauptachsen-Transformation für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, d.h. geben Sie eine Matrix $P \in O(3)$ an, für die $P^{-1}BP$ diagonal ist!

3. Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung. Beweisen Sie die Vollständigkeitsrelation
$$\sum_{k=1}^{r} P_k = \mathrm{Id}_V$$
unter Verwendung einer Orthonormalbasis, in der f diagonal ist (Notation gemäß der Version der Spektraldarstellung im Buch auf Seite 219, zweites Korollar)!

4. Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die mit Hilfe der Spektraldarstellung von f (in der Version im Buch auf Seite 219, zweites Korollar) definierte lineare Abbildung
$$\frac{1}{f} = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\lambda_k} P_k$$
gleich der Inversen f^{-1} ist!

5. Sei V ein euklidischer Vektorraum, $w \in V$ mit $\|w\| = 1$, und sei die lineare Abbildung und $p : V \to V$ definiert durch
$$p(x) = \langle w, x \rangle \, w \, .$$
   (i) Zeigen Sie, dass p die Orthogonalprojektion auf den von w aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum ist!
   (ii) Wie sieht die Spektraldarstellung von p (gemäß der Version im Buch auf Seite 219, zweites Korollar) aus? Geben Sie die λ_k und die P_k an!

6. Sei V ein euklidischer Vektorraum, und seien $u, w \in V$ zwei zueinander orthogonale Einheitsvektoren, die den zweidimensionalen Untervektorraum U aufspannen. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} &q : V \to V \\ &q(x) = \langle u, x\rangle\, u + \langle w, x\rangle\, w \end{aligned}$$

die Orthogonalprojektion auf U ist!

7. Die Spektraldarstellung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ sieht so aus:

$$A = \underbrace{(-3)}_{\lambda_1} \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} + \underbrace{3}_{\lambda_2} \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2}.$$

Rechnen Sie diese Beziehung nach! Verifizieren Sie, dass P_1 und P_2 Orthogonalprojektionen sind, und dass $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ sowie $P_1 + P_2 = E$ gilt!

8. Für die Matrix A von Aufgabe 7 berechnen Sie $\sin(kA)$ und $\cos(kA)$ für $k \in \mathbb{R}$!

9. H-Aufgabe: Sei V ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, die in der Form

$$f = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k$$

dargestellt werden kann. Dabei sind die λ_k voneinander verschiedene reelle Zahlen, und die P_k sind Orthogonalprojektionen, die $P_kP_l = 0$ für $k \neq l$ erfüllen, und für die die Vollständigkeitsrelation $\sum\limits_{k=1}^{n} P_k = \mathrm{Id}_V$ gilt. Zeigen Sie, dass dann automatisch folgt:

   (i) f ist selbstadjungiert.
   (ii) Die λ_k sind genau die (verschiedenen) Eigenwerte von f.
   (iii) Jedes P_k ist die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum E_{λ_k}.

   (Die angegebene Darstellung von f ist dann automatisch die Spektraldarstellung von f. Um also die Spektraldarstellung eines gegebenen selbstadjungierten Operators zu finden, genügt es, ihn in der angegebenen Form darzustellen!)

10. Aus dem Satz von der Jordanschen Normalform folgt, dass jede 2×2-Matrix über $\mathbb{C}$ entweder zu einer Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ oder zu einer Matrix vom Typ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ähnlich ist. Zeigen Sie: Jede 2×2-Matrix über $\mathbb{C}$ ist die Summe aus einer diagonalisierbaren und einer nilpotenten Matrix! (Diese Aussage gilt für quadratische Matrizen jeder Dimension!)