

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 8

1. Sei \mathcal{P}_n die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$. Gegeben ist die lineare Abbildung

$$f : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$$
$$f(p) := \text{die Polynomfunktion } t \mapsto tp(t).$$

Bestimmen Sie die Matrix $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ von f

- (i) bezüglich der Basen $\mathcal{B} = (t \mapsto 1, t \mapsto t)$ von \mathcal{P}_1 und $\mathcal{C} = (t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2)$ von \mathcal{P}_2 ,
- (ii) bezüglich der Basen $\mathcal{B} = (t \mapsto 1, t \mapsto t)$ von \mathcal{P}_1 und $\mathcal{C} = (t \mapsto 1+t, t \mapsto 1-t, t \mapsto t^2)$ von \mathcal{P}_2 !

2. Zeigen Sie, dass die Ähnlichkeit von Matrizen

Für $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist $A \sim B : \Leftrightarrow$ es gibt eine invertierbare Matrix $S \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $B = S^{-1}AS$.

eine Äquivalenzrelation ist!

3. Beweisen Sie die Rechenregel $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ für das Bilden der Spur quadratischer Matrizen!
4. Für zwei $n \times n$ -Matrizen A, B über \mathbb{K} und für ein $c \in \mathbb{K}$ gelte

$$AB - BA = cE.$$

Zeigen Sie, dass dann $c = 0$ ist. (Tipp: Bilden Sie von beiden Seiten dieser Beziehung die Spur!) Dieser unscheinbar anmutende Sachverhalt hat wichtige Konsequenzen für die Quantenphysik.

5. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi(x, y) := 3x - 2y$$

ein lineares Funktional auf \mathbb{R}^2 ist! Stellen Sie es als Matrix dar:

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto ?$$

6. Sei \mathcal{P}_2 die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2 . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\omega : \mathcal{P}_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega(p) &:= -2p(0)\end{aligned}$$

ein lineares Funktional auf V (also ein Element des Dualraums V^*) ist und ermitteln Sie seine Matrix $[\omega]_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2)$ von \mathcal{P}_2 !

7. Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} , und sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Dann kann jedes $x \in V$ eindeutig in der Form $x = \sum_{k=1}^n c_k v_k$ mit $c_k \in \mathbb{K}$ geschrieben werden.

- (i) Nun sei $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq n$. Zeigen Sie dass die Abbildung $w_j : V \rightarrow \mathbb{K}$, die jedem $x \in V$ seinen Entwicklungskoeffizienten c_j zuordnet, ein lineares Funktional ist!
- (ii) Zeigen Sie, dass (w_1, \dots, w_n) eine Basis des Dualraums V^* ist! (Sie wird die zu \mathcal{B} duale Basis genannt.)
- (iii) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $V \rightarrow V^*$, die jedem v_j das lineare Funktional w_j zuordnet, ein Isomorphismus ist!

8. H-Aufgabe: Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} . Die Abbildung $\Psi : V \rightarrow V^{**}$ sei folgendermaßen definiert: Für jedes $x \in V$ ist $\Psi(x)$ ein lineares Funktional auf V^* , das so wirkt:

$$\begin{aligned}\Psi(x) : V^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ \Psi(x) : f \in V^* &\mapsto f(x) \in \mathbb{K}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Zeigen Sie, dass Ψ ein Isomorphismus ist!

9. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} , und seien U und W Untervektorräume von V mit $U \cap W = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $U + W$ (das aufgrund des trivialen Durchschnitts von U und W auch in der Form $U \oplus W$ geschrieben wird) isomorph ist zum kartesischen Produkt $U \times W$, ausgestattet mit der im Ergänzungsskriptum angegebenen Vektorraumstruktur!
10. Sei V ein Vektorraum und $g : V \rightarrow V$ eine Projektion. Zeigen Sie:
- (i) $V = \text{Bild}(g) \oplus \text{Kern}(g)$.
 - (ii) $\text{Bild}(g)$ besteht aus allen $x \in V$, für die $g(x) = x$ gilt.
11. Zeigen Sie, dass $Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine Projektionsmatrix ist! Sie wird als lineare Abbildung $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aufgefasst. Bestimmen Sie $\text{Kern}(Q)$ und $\text{Bild}(Q)$! Beschreiben Sie in Worten oder anhand einer Skizze, wie Q wirkt!