Universität Wien, WS 2016/17

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 6

1. Stellen Sie die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} &A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &A(x, y) := (3x - y, 2x + 4y) \end{aligned}$$

   in Matrixform dar:

$$A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \ ?$$

2. Die 2×2-Matrix B stelle jene lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dar, die $e_1 = (1, 0)$ in $(3, 2)$ überführt und $e_2 = (0, 1)$ in $(-5, 7)$. Schreiben Sie B an!

3. Die 3×3-Matrix S stelle die Spiegelung an der yz-Ebene des $\mathbb{R}^3$ dar.
   (i) Schreiben Sie sie an!
   (ii) Überlegen Sie: Was eine „Spiegelung" ist, ist für uns (seit der Volksschule) intuitiv ganz klar. Macht dieser Begriff alleine auf der Basis der Vektorraumstruktur Sinn, oder wird dabei auch das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ verwendet?

4. Für $q \in \mathbb{R}$ sei $T = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Beschreiben Sie in Worten (und anhand einer Skizze), was T (i) mit den Vektoren der Standardbasis, (ii) mit Vektoren des $\mathbb{R}^2$ im Allgemeinen macht! Wie würden Sie eine solche lineare Abbildung bezeichnen?

5. Seien e_j die Vektoren der Standardbasis im $\mathbb{C}^3$. Die 3×3-Matrix C stelle eine lineare Abbildung $C : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dar, die so wirkt:

$$\begin{aligned} C &: e_1 \mapsto e_1 + e_2 \\ C &: e_2 \mapsto e_1 - e_2 \\ C &: e_3 \mapsto e_1 + i\, e_2 \end{aligned}$$

   Schreiben Sie C an! Ist die Abbildung, die C darstellt, injektiv? Ist sie surjektiv?

6. Schreiben Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 1 \end{aligned}$$

   in Matrixform als $Ax = b$ mit $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $b \in M(2 \times 1, \mathbb{R})$ an!

7. Sei $U = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$, als Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ aufgefasst (d.h. U ist die z-Achse des $\mathbb{R}^3$). Bestimmen Sie den Quotientenvektorraum $\mathbb{R}^3/U$! Überprüfen Sie die Dimensionsformel für Quotientenvektorräume (Buch Seite 99)!

8. Diskutieren Sie in Worten den Sachverhalt von Aufgabe 7 anhand des folgenden Szenarios: Es soll ein Modell eines dreidimensionalen Objekt dargestellt werden. Die xy-Ebene wird als horizontal angesehen, die z-Achse als vertikal. Jeder Punkt des Modells besitzt daher eine Höhe (nämlich seine z-Koordinate). Nun soll ein zweidimensionaler Plan gezeichnet werden, der die Aufsicht des Objekts darstellt. Insgesamt spielen mehrere Mengen mit:

   - der Raum, in dem sich das Objekt befindet,
   - die Menge aller Höhen, die Punkte des Raumes annehmen können
   - und schließlich die Menge aller Punkte des Plans.

   Erklären Sie anhand dieses Szenarios die Bedeutung der Vektorräume $\mathbb{R}^3$, $U = z$-Achse und $\mathbb{R}^3/U$!

9. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Bestimmen Sie:

   (i) V/V
   (ii) $V/\{0\}$

10. Schreiben Sie jene Matrizen an, die Drehungen im $\mathbb{R}^2$ um die Winkel (i) $\frac{\pi}{4}$, (ii) $\frac{\pi}{3}$, (iii) $\frac{\pi}{2}$ und (vi) $\frac{3\pi}{4}$ im Gegenuhrzeigersinn beschreiben! In den Endergebnissen sollten keine Winkelfunktionen mehr auftreten.

11. Im Ergänzungsskriptum (in einem späteren Abschnitt) lesen Sie: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   beschreibt eine Spiegelung an jener Ebene durch den Ursprung, die normal zum Vektor $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt. (Zugrunde gelegt ist natürlich der $\mathbb{R}^3$). Verifizieren Sie das!