Universität Wien, WS 2016/17

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 5

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} &D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ &D(x_0, x_1, x_2) := (x_0 + x_1, x_0 - x_1, 2x_2) \end{aligned}$$

   linear ist!

2. Ist die Abbildung

$$\begin{aligned} &\sigma : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2 \\ &\sigma(x, y, z) := (y + 1, x - 1) \end{aligned}$$

   linear? Begründen Sie!

3. Ist die Abbildung

$$\begin{aligned} &\tau : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ &\tau(a, b, c, d) := (a, a - b, a - b - c) \end{aligned}$$

   injektiv? Ist sie surjektiv? (Argumentieren Sie direkt mit der Definition der Begriffe „injektiv“ und „surjektiv“, also ohne Methoden der linearen Algebra heranzuziehen!)

4. Gegeben ist die Abbildung

$$\begin{aligned} &\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \\ &\rho(x, y, z) := (x, x, y + z, 0). \end{aligned}$$

   (i) Zeigen Sie, dass ρ linear ist!
   (ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\rho)$! Ist ρ injektiv?
   (iii) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(\rho)$! Ist ρ surjektiv?

5. Sei $\Omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ jene lineare Abbildung, die $(1, 0)$ in $(2, -3, 1)$ und $(0, 1)$ in $(3, 1, 2)$ überführt.

   (i) Geben Sie eine Formel für die Wirkung von Ω an: $\Omega(x, y) = ?$
   (ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\Omega)$! Ist Ω injektiv?
   (iii) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(\Omega)$! Ist Ω surjektiv?

6. Sei $\mathcal{P}_2$ die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Wie bereits bekannt (Übungstermin 4), ist $\mathcal{P}_2$ ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Welche der folgenden Operationen für Polynomfunktionen definieren eine Abbildung $\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$? Welche davon sind linear? Begründen Sie Ihre Antworten!

   (i) $f : p \mapsto f(p)$ mit $f(p) : t \mapsto t^2\, p(t)$
   (ii) $g : p \mapsto f(p)$ mit $g(p) : t \mapsto t\, p'(t)$
   (iii) $h : p \mapsto f(p)$ mit $h(p) : t \mapsto p''(t)$
   (iv) $k : p \mapsto f(p)$ mit $k(p) : t \mapsto \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_0^t p(\tau) d\tau$
   (v) $j : p \mapsto f(p)$ mit $j(p) : t \mapsto p(t) + 1$

7. Sei $\mathcal{P}_2$ die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2, und sei

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$$
$$\Phi(a_0, a_1, a_2) := \text{die Polynomfunktion } t \mapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2\,.$$

   (i) Zeigen Sie, dass Φ eine lineare Abbildung ist!
   (ii) Zeigen Sie, dass Φ bijektiv – also mit (i) ein Isomorphismus – ist!
   (iii) Die Ableitung p' jeder Polynomfunktion $p \in \mathcal{P}_2$ ist wieder ein Element von $\mathcal{P}_2$. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $p \mapsto p'$ eine lineare Abbildung $\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ ist!

8. Für die in Aufgabe 7 beschriebene Situation sei

$$S := \Phi^{-1} \circ \text{Bilden der Ableitung} \circ \Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

   (i) Geben Sie eine Formel für die Wirkung von S an: $S(a_0, a_1, a_2) = ?$
   (ii) Zeichnen Sie ein kommutatives Diagramm, in dem die Vektorräume $\mathcal{P}_2$ und $\mathbb{R}^3$ sowie der Zusammenhang der Abbildungen „Bilden der Ableitung“, Φ und S dargestellt wird!
   (iii) Berechnen Sie $S \circ S$ und $S \circ S \circ S$! Wie interpretieren Sie ihr Ergebnis?

9. Sei W ein Vektorraum. Für ein festgehaltenes $\xi \in W$ sei

$$\varphi : W \to W$$
$$\varphi(x) = \xi.$$

   (φ ist also eine *konstante* Abbildung). Welche Bedingung muss ξ erfüllen, damit φ eine lineare Abbildung ist?