Universität Wien, WS 2016/17

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 4

1. Zeigen Sie unter Verwendung der „offiziellen" Definition der linearen Unabhängigkeit (Buch, Seite 57), dass das Tripel (v_1, v_2, v_3) von Elementen $v_j \in \mathbb{R}^3$ mit

   $$v_1 = (1, -2, 1)$$
   $$v_2 = (2, -1, 2)$$
   $$v_3 = (1, -1, 0)$$

   linear unabhängig (und daher eine Basis von $\mathbb{R}^3$) ist! Entwickeln Sie den Vektor $u = (3, 3, 3)$ in diese Basis (d.h. bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass $u = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \, v_j$ gilt)!

2. Zeigen Sie unter Verwendung der „offiziellen" Definition der linearen Unabhängigkeit (Buch, Seite 57), dass das Tripel (w_1, w_2, w_3) von Elementen $w_j \in \mathbb{R}^3$ mit

   $$w_1 = (1, -2, 2)$$
   $$w_2 = (2, 3, 1)$$
   $$w_3 = (3, 8, 0)$$

   linear abhängig ist! Charakterisieren Sie den Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, den diese Vektoren aufspannen, in möglichst kompakter Form!

3. Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Untervektorräume von $\mathbb{C}^3$:

   (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \,|\, x + iy = 0\}$
   (ii) $L(w_1, w_2)$ mit $w_1 = (1, 0, 0)$ und $w_2 = (i, 0, 0)$
   (iii) $L(z_1, z_2, z_3)$ mit $z_1 = (1, -1, 2)$, $z_2 = (i, -i, 2)$ und $z_3 = z_1 - z_2$

4. Sei $\mathcal{P}_2$ die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Mit den üblichen Definitionen der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar

   $$(p + q)(t) = p(t) + q(t) \quad \text{und} \quad (\lambda p)(t) = \lambda p(t) \text{ für } \lambda, t \in \mathbb{R}$$

   ist $\mathcal{P}_2$ ein reeller Vektorraum.

   (i) Bestimmen Sie seine Dimension!
   (ii) Geben Sie zwei verschiedene Basen an!
   (iii) Entwickeln Sie das Polynom $r : t \mapsto 1 + 2t - 3t^2$ in die in (ii) angegebenen Basen!

5. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ aufgefasst werden kann! Welche Dimension hat (i) $\mathbb{C}$ als Vektorraum über sich selbst, (ii) $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$?

6. Berechnen Sie das Vektorprodukt $u \times v$ mit $u = (2, -1, 3)$ und $v = (3, -2, 1)$!

7. Zeigen Sie, dass das *Spatprodukt* zyklisch ist, d.h. dass für beliebige $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\langle u \times v, w \rangle = \langle v \times w, u \rangle = \langle w \times u, v \rangle \,.$$

8. Sei $a \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle a, a \rangle = 1$. Berechnen/vereinfachen Sie (und verwenden Sie dabei die Einsteinsche Summenkonvention):

   (i) $u_j = 3\,\delta_{jk}\,a_k$
   (ii) $v_j = (\delta_{jk} + a_j\,a_k)\,a_k$
   (iii) $w_{jk} = (\delta_{jr}\,\delta_{ks}\,\varepsilon_{rsl} + \delta_{jr}\,\varepsilon_{rkl} - \varepsilon_{jkl})\,a_l$
   (iv) $\Gamma_j = \varepsilon_{jkl}\,a_j\,a_k\,a_l$

9. Beweisen Sie die Beziehung $\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{jkl} = 6$ (wobei hier die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wurde)!

10. Beweisen Sie die Beziehung $\varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{jkn} = 2\,\delta_{ln}$ (wobei hier die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wurde)!

11. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Stellen Sie eine Formel für $(a \times b) \times c$ auf, die keine Vektorprodukte der beteiligten Vektoren enthält! Verwenden Sie dabei das Epsilon-Symbol!