Universität Wien, WS 2016/17

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 3

1. Bildet die folgende Menge mit den angegebenen Operationen einen reellen Vektorraum? Beweisen Sie Ihre Aussage!

   $V =$ Menge aller $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, die $2r - 3s = 0$ erfüllen.
   Addition: wie im $\mathbb{R}^2$ üblich.
   Multiplikation mit einem Skalar: wie im $\mathbb{R}^2$ üblich.

   Skizzieren Sie die Menge V als Teilmenge der Zeichenebene!

2. Bildet die folgende Menge mit den angegebenen Operationen einen reellen Vektorraum? Beweisen Sie Ihre Aussage!

   $V =$ Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die $x + y = 1$ erfüllen.
   Addition: wie im $\mathbb{R}^2$ üblich.
   Multiplikation mit einem Skalar: wie im $\mathbb{R}^2$ üblich.

   Skizzieren Sie die Menge V als Teilmenge der Zeichenebene!

3. Die folgende Menge mit den angegebenen Operationen bildet *keinen* reellen Vektorraum:

   $V = \mathbb{R}^2 =$ Menge aller reellen Zahlenpaare.
   Addition: $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$.
   Multiplikation mit einem Skalar: $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_2, \lambda x_1)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(x_1, x_2) \in V$.

   Gehen Sie die Vektorraum-Axiome [(1) – (8) auf Seite 23 des Lehrbuchs von Jänich] durch! Welche sind erfüllt, welche sind verletzt?

4. Bildet die folgende Menge mit den angegebenen Operationen einen reellen Vektorraum? Beweisen Sie Ihre Aussage!

   $V =$ Menge aller reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung

   $$\phi'(x) = -\phi(x).$$

   Addition: $(\phi + \chi)(x) = \phi(x) + \chi(x)$ für alle $\phi, \chi \in V$.
   Multiplikation mit einem Skalar: $(\lambda\phi)(x) = \lambda\phi(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\phi \in V$.

   Freiwillige Zusatzaufgabe: Können Sie explizit angeben, aus welchen Funktionen V besteht?

5. Beweisen Sie, dass in jedem (reellen oder komplexen) Vektorraum V gilt: $0x = 0$ für alle $x \in V$.

6. Beweisen Sie, dass in jedem (reellen oder komplexen) Vektorraum V gilt: $(-1)x = -x$ für alle $x \in V$.

7. Beweisen Sie folgenden Sachverhalt: Sind U_1 und U_2 Untervektorräume des Vektorraums V, so ist auch der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V.

8. Sind U_1 und U_2 Untervektorräume des Vektorraums V, so ist die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ nicht notwendigerweise ein Untervektorraum von V. Geben Sie ein Beispiel!