

Übungen zu Lineare Algebra für PhysikerInnen

Übungstermin 2

1. Die folgenden Elemente des (mit der üblichen Vektorraumstruktur versehenen) \mathbb{R}^2 seien gegeben: $u = (2, 3)$, $v = (3, -1)$, $w = (4, 6)$, $a = (-5, 9)$.
- (i) Kann man a als Linearkombination von u und v anschreiben? Falls ja, tun Sie es – falls nein, begründen Sie! Machen Sie eine Skizze des Sachverhalts!
 - (ii) Kann man a als Linearkombination von u und w anschreiben? Falls ja, tun Sie es – falls nein, begründen Sie! Machen Sie eine Skizze des Sachverhalts!

2. Die Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ seien gegeben wie in Aufgabe 1. Kann man *jeden* Vektor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination von u und v anschreiben? Falls ja, tun Sie es – falls nein, begründen Sie!

3. Die Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ seien gegeben wie in Aufgabe 1. Ermitteln und beschreiben bzw. – falls möglich – skizzieren Sie die folgenden Mengen:

- (i) $A = \{ \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$
- (ii) $B = \{ u + x \mid x \in \mathbb{R}^2 \}$
- (iii) $C = \{ \lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$
- (iv) $D = \{ \lambda u + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$
- (v) $E = \{ v + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$
- (vi) $F = \{ w + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

4. Für welche der in Aufgabe 3 angegebenen Mengen gilt, dass die Summe zweier Elemente stets wieder ein Element der Menge ist?
5. In der Zeichenebene werden Pfeile durch „Aneinanderlegen“ addiert. In jedem reellen Vektorraum V gilt das Kommutativgesetz [Axiom (2) auf Seite 23 des Lehrbuchs von Jänich]:

$$x + y = y + x \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Illustrieren Sie diesen Sachverhalt durch Pfeile in der Zeichenebene! Verwenden Sie in dieser und in den folgenden Aufgaben *nicht* die Komponentendarstellung von Elementen des \mathbb{R}^2 !

6. In jedem reellen Vektorraum V gilt das Assoziativgesetz [Axiom (1) auf Seite 23 des Lehrbuchs von Jänich]:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{für alle } x, y, z \in V.$$

Illustrieren Sie diesen Sachverhalt durch Pfeile in der Zeichenebene! Setzen Sie dabei lediglich die Regel für die Addition von Pfeilen und – falls für eine aussagekräftige Zeichnung nötig – das Kommutativgesetz voraus!

7. In jedem reellen Vektorraum V gilt

$$-(x + y) = -x - y \quad \text{für alle } x, y \in V,$$

wobei $-x - y$ die Kurzschreibweise für $-x + (-y)$ ist. Illustrieren Sie diesen Sachverhalt durch Pfeile in der Zeichenebene! Verwenden Sie dabei lediglich die Regel für die Addition von Pfeilen, das Kommutativgesetz und die Regel, dass $-x$ durch einen Pfeil dargestellt wird, der gleich lang wie x , parallel zu x , aber entgegengesetzt orientiert ist!

8. Begründen Sie die „Spitze-minus-Schaft-Regel“ in der Zeichenebene mit Hilfe der Vektorraum-Axiome!

Die „Spitze-minus-Schaft-Regel“ besagt: Werden zwei Vektoren x und y in der Zeichenebene durch Pfeile mit gleichem Anfangspunkt („Schaft“) dargestellt, so wird $x - y$ durch jenen Pfeil dargestellt, der vom Endpunkt (der „Spitze“) von y zum Endpunkt von x verläuft (d.h. dessen Schaft die Spitze von y und dessen Spitze die Spitze von x ist).

Verwenden Sie bei der Begründung nur die allgemeinen Rechenregeln, die in jedem reellen Vektorraum gelten, sowie die Regel zur Addition von Pfeilen!

9. Begründen Sie: Werden in der Zeichenebene die Vektoren x und y sowie der Vektor $\frac{1}{2}(x + y)$ durch Pfeile mit gleichem Anfangspunkt dargestellt, so liegt die Spitze von $\frac{1}{2}(x + y)$ im Halbpunkt der Strecke zwischen den Spitzen von x und y . Verwenden Sie dabei nur die allgemeinen Rechenregeln, die in jedem reellen Vektorraum gelten, sowie die Regel zur Addition von Pfeilen!